

Ασκήσεις Επανάληψης  
Γ' Λυκείου Κατεύθυνσης  
2021 – 2022

Πηγή:  
<https://mathm.schools.ac.cy/index.php/el/yliko/endeiktiko-yliko>

Σε μερικές από τις ασκήσεις, έχουν τροποποιηθεί οι εκφωνήσεις ούτως ώστε να μην υπάρχουν ασάφειες ή έτσι ώστε να αναδεικνύεται ο γενικότερος σκοπός της άσκησης.

Ιωάννης Ι. Ιωακείμ

<http://ioakimioannis.com>

‘Δεν υπάρχει τίποτα στο οποίοι μπορούν να φανούν χρήσιμοι οι συλλογισμοί από όσο στη θρησκεία. [...] Ένας ορθολογιστής μπορεί να την οικοδομήσει σαν αληθινή επιστήμη.

*Η μεγαλύτερη απόδειξη περί της καλοσύνης της θεότητας, για μένα, είναι τα λουλούδια.*

‘Όλα τα άλλα, οι δυνατότητες ή οι επιθυμίες μας, το φαγητό, αποτελούν πρωταρχικές ανάγκες. Αυτό το λουλούδι όμως, είναι κάτι παραπάνω, Η ωριμότητα, το άρωμά του, είναι στολίδια της ζωής, όχι προϋπόθεσή της. Μόνο μια θεότητα μπορεί να δώσει κάτι περισσότερο από τη ζωή και γι’ αυτό, το ξαναλέω, έχουμε κάτι στο οποίο να ελπίζουμε χάρη στα λουλούδια.’

---

– Sir Arthur Conan Doyle

Προτεινόμενες λύσεις των ασκήσεων από το (επίσημο)  
‘Ενδεικτικό Υλικό Παιδαγωγικής Στήριξης Μαθητών | Μαθητριών’,  
Γ’ Λυκείου κατεύθυνσης  
L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X typesetting: Ioannis Ioakim

Λευκωσία, Κύπρος, Ιανουάριος 2022

## Ενότητα Ι -Εφαρμογές του Διαφορικού Λογισμού

- (1) (i) Να βρείτε την εξίσωση της κάθετης της καμπύλης με εξίσωση  $y = x \ln x$  η οποία είναι παράλληλη στην ευθεία με εξίσωση  $2x - 2y + 3 = 0$ .
- (ii) Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτόμενων της καμπύλης με εξίσωση  $\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{7} = 1$ , που είναι κάθετες στην ευθεία με εξίσωση  $2x + 4y - 3 = 0$ .

### Απάντηση.

Υπενθύμιση:

#### Ορισμός

δες Β' Λυκείου κατ., Τεύχος Δ/κεφάλαιο 10, σελ. 106

Έστω ότι η **συνάρτηση**  $f$  ορίζεται σε ένα ανοικτό διάστημα  $\Delta \subseteq \mathbb{R}$ , το οποίο περιέχει το  $x_0$ . Αν το όριο

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

(δηλαδή ο παράγωγος αριθμός  $f'(x_0)$ ) υπάρχει και είναι πραγματικός αριθμός, τότε η ευθεία που διέρχεται από το σημείο  $A(x_0, f(x_0))$  της γραφικής παράστασης της συνάρτησης  $f$  και έχει κλίση  $\lambda = f'(x_0)$ , ονομάζεται **εφαπτομένη ευθεία** της συνάρτησης  $f$  στο σημείο  $A$ .

Άρα, η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης  $f$  στο σημείο  $A(x_0, f(x_0))$  είναι η

$$y - y_0 = f'(x_0) \cdot (x - x_0).$$

Στην περίπτωση που η εξίσωση της καμπύλης είναι σε πεπλεγμένη μορφή<sup>1</sup>, για να βρούμε την κλίση της εφαπτομένης της καμπύλης στο σημείο  $A(x_0, y_0)$ , παραγωγίζουμε πεπλεγμένα την εξίσωσή της και λύνουμε ως προς  $y'$ .

- (i) Η καμπύλη εδώ καθορίζεται από τη **συνάρτηση**  $y = x \ln x$ ,  $x > 0$ . Είναι

$$y' = (x \ln x)' = x' \ln x + x(\ln x)' = \ln x + x \cdot \frac{1}{x} = \ln x + 1, \quad x > 0.$$

Είναι

$$2x - 2y + 3 = 0 \Leftrightarrow y = x + \frac{3}{2}$$

και άρα η κλίση της πιο πάνω ευθείας είναι  $\lambda_{(\epsilon)} = 1$ . Αλλά η εφαπτομένη που ψάχνουμε είναι παράλληλη με την ευθεία αυτή, άρα  $\lambda_{(\epsilon)} = \lambda_{\epsilon\phi.} = 1$ , δηλαδή (αν  $(x_0, y_0)$  το σημείο επαφής)

$$y'(x_0) = \lambda_{\epsilon\phi.} = 1 \Leftrightarrow \ln x_0 + 1 = 1 \Leftrightarrow x_0 = 1.$$

Τότε,  $y_0 = y(x_0) = 1 \ln 1 = 0$ . Έτσι, η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης στο σημείο της  $(1, 0)$  είναι η  $y - 0 = 1 \cdot (x - 1)$ , δηλαδή η

$$y = x - 1.$$

- (ii) Εδώ η καμπύλη καθορίζεται από την πεπλεγμένη εξίσωση  $\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{7} = 1$ , την οποία παραγωγίζουμε (πεπλεγμένα):

$$\begin{aligned} \frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{7} = 1 &\Leftrightarrow \frac{2x}{2} - \frac{2yy'}{7} = 0 \\ &\Leftrightarrow y' = \frac{7x}{2y}, \end{aligned}$$

<sup>1</sup>Μια εξίσωση της μορφής  $F(x, y) = 0$ , όπου  $F$  μια συνάρτηση 2 μεταβλητών, λέγεται **πεπλεγμένη**. **Πεπλεγμένη συνάρτηση** λέγεται μια συνάρτηση  $f$  η οποία καθορίζεται από μια πεπλεγμένη εξίσωση, δηλαδή τέτοια ώστε να ικανοποιεί μια εξίσωση της μορφής  $F(x, f(x)) = 0$ .

φυσικά για  $y \neq 0$  (όπου το γράφημα της καμπύλης έχει κατακόρυφη εφαπτομένη).

Είναι

$$2x + 4y - 3 = 0 \Leftrightarrow y = 3 - \frac{x}{2}$$

και άρα η κλίση της πιο πάνω ευθείας είναι  $\lambda_{(\epsilon)} = -\frac{1}{2}$ . Αλλά η εφαπτομένη που ψάχνουμε είναι κάθετη στην ευθεία αυτή, άρα  $\lambda_{(\kappa\alpha\theta.)} = -\frac{1}{\lambda_{\epsilon}} = 2$ , δηλαδή (αν  $(x_0, y_0)$ ,  $y_0 \neq 0$  το σημείο επαφής), τότε

$$\frac{7x_0}{2y_0} = 2 \Leftrightarrow y_0 = \frac{7x_0}{4}.$$

Αλλά, το σημείο αυτό ανήκει στην καμπύλη, άρα επαληθεύει την εξίσωσή της:

$$\frac{x_0^2}{2} - \frac{y_0^2}{7} = 1$$

και αντιθιστώντας το  $y_0 = \frac{7x_0}{4}$  βρίσκουμε  $x_0^2 = 16 \Rightarrow x_0 = \pm 4$ . Στα σημεία αυτά αντιστοιχούν τα  $y_0 = 7$  και  $y_0 = -7$  αντίστοιχα.

Άρα, έχουμε δύο εφαπτομένες, τις

$$(\epsilon\phi.1) : y - 7 = 2(x - 4) \Leftrightarrow \boxed{y - 2x = -1}$$

και

$$(\epsilon\phi.2) : y + 7 = 2(x + 4) \Leftrightarrow \boxed{y - 2x = 1}.$$

(2) Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς  $\alpha$  και  $\beta$  έτσι ώστε

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 + \alpha e^{2-x} + \beta x}{x^2 - 4} = \frac{1}{2}.$$

**Απάντηση.**

Είναι  $\lim_{x \rightarrow 2} (x^2 - 4) = 4 - 4 = 0$ . **AN** επιπλέον είναι  $\lim_{x \rightarrow 2} (x^3 + \alpha e^{2-x} + \beta x) = 0$ , δηλαδή  $8 + \alpha e^0 + 2\beta = 0$ , δηλαδή

$$\alpha + 2\beta = -8, \tag{1}$$

τότε το όριο αποτελεί απροσδιοριστία τύπου  $\frac{0}{0}$ . Έχουμε

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x^3 + \alpha e^{2-x} + \beta x)'}{(x^2 - 4)'} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x^2 - \alpha e^{2-x} + \beta}{2x} = \frac{12 - \alpha + \beta}{4} \in \overline{\mathbb{R}}.$$

Τότε, από κανόνα του De L' Hopital,

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 + \alpha e^{2-x} + \beta x}{x^2 - 4} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x^3 + \alpha e^{2-x} + \beta x)'}{(x^2 - 4)'},$$

δηλαδή

$$\frac{1}{2} = \frac{12 - \alpha + \beta}{4},$$

δηλαδή

$$\alpha - \beta = 10. \tag{2}$$

Από τις (1) και (2), έχουμε  $\boxed{\alpha = 4, \beta = -6}$ .

Όμως, αφού το όριο υπάρχει και ισούται με  $1/2$ , οι τιμές αυτές των  $\alpha$  και  $\beta$  είναι και οι μοναδικές. Πράγματι, μπορούμε εύκολα να δούμε (π.χ. με χρήση κανόνα του De L' Hopital) ότι

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 + 4e^{2-x} - 6x}{x^2 - 4} = \frac{1}{2}.$$

(3) Να δείξετε ότι

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = 1.$$

**Απάντηση.**

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x - \frac{1}{e^x}}{e^x + \frac{1}{e^x}}$$

και άρα αφού  $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$  και  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^x} = 0$ , το πιο πάνω όριο αποτελεί απροσδιοριστία τύπου  $\frac{+\infty}{+\infty}$ .

Εφαρμόζοντας στο πιο πάνω όριο, όπως είναι, κανόνα του De L' Hopital, οδηγούμαστε σε μια ατέρμονη ακολουθία απροσδιόριστων μορφών  $\frac{+\infty}{+\infty}$ .

Αν όμως, έχοντας ως οδηγό το ότι  $\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{e^x - \frac{1}{e^x}}{e^x + \frac{1}{e^x}}$ , αντιλαμβανόμαστε ότι μπορούμε να 'διώξουμε' τον όρο  $e^x$ , πολλαπλασιάζοντας αριθμητή και παρονομαστή με αυτόν:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x - \frac{1}{e^x}}{e^x + \frac{1}{e^x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x (e^x - \frac{1}{e^x})}{e^x (e^x + \frac{1}{e^x})} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}.$$

Το τελευταίο όριο είναι απροσδιοριστία τύπου  $\frac{+\infty}{+\infty}$ . Έχουμε:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(e^{2x} - 1)'}{(e^{2x} + 1)'} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2e^{2x}}{2e^{2x}} = 1$$

και άρα από κανόνα του De L' Hopital,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(e^{2x} - 1)'}{(e^{2x} + 1)'} = 1.$$

Αυτό είναι ισοδύναμο με το να θέσουμε  $w = e^x$ : το όριο που θα προκύψει είναι το

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{w - \frac{1}{w}}{w + \frac{1}{w}}$$

το οποίο με μια εφαρμογή κανόνα του De L' Hopital, είναι ίσο με 1.

Το πιο πάνω μας λέει και κάτι άλλο: αν 'διώξουμε' τον όρο  $e^{-x}$ , θα οδηγηθούμε πάλι σε μια ατέρμονη ακολουθία απροσδιόριστων μορφών. ◀

**Υπενθύμιση: Βασικά όρια**

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{ax} = \begin{cases} +\infty, & \text{αν } a > 0 \\ 0, & \text{αν } a < 0 \end{cases}.$$

Για παράδειγμα,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-2x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^{2x}} = 0,$$

αφού  $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{2x} = +\infty$ .

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{ax} = \begin{cases} +\infty, & \text{αν } a < 0 \\ 0, & \text{αν } a > 0 \end{cases}.$$

Για παράδειγμα,

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{2x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{e^{-2x}} = 0,$$

αφού  $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-2x} = +\infty$ .

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty.$$

(4) Να υπολογίσετε τα πιο κάτω όρια:

$$(i) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln^2 x}{x}, \quad (ii) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{\varepsilon\varphi x}}{\ln(x+1)}, \quad (iii) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^{-3x}}{x^2}.$$

**Απάντηση.**

(i) Είναι  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln^2 x = \left( \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x \right)^2 = +\infty$ , αφού  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$  και  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$ .  
 Συνεπώς, το όριο αποτελεί απροσδιοριστία τύπου  $\frac{+\infty}{+\infty}$ .

Έχουμε:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln^2 x)'}{x'} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( 2 \ln x \cdot \frac{1}{x} \right) = 2 \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x}.$$

Αλλά και πάλι, το τελευταίο όριο αποτελεί απροσδιοριστία τύπου  $\frac{+\infty}{+\infty}$ . Έχουμε:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln x)'}{x'} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0.$$

Άρα, από κανόνα του De L' Hopital,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln^2 x}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln^2 x)'}{x'} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(2 \ln x)'}{x'} = 0.$$

(ii) Είναι  $\lim_{x \rightarrow 0} (e^x - e^{\varepsilon\varphi x}) = e^0 - e^{\varepsilon\varphi 0} = 1 - e^0 = 1 - 1 = 0$  και  $\lim_{x \rightarrow 0} \ln(x+1) = \ln \left( \lim_{x \rightarrow 0} (x+1) \right) = \ln(0+1) = \ln 1 = 0$  και άρα το όριο αποτελεί απροσδιοριστία τύπου  $\frac{0}{0}$ .

Έχουμε:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^x - e^{\varepsilon\varphi x})'}{(\ln(x+1))'} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - (\varepsilon\varphi x)' e^{\varepsilon\varphi x}}{\frac{1}{x+1}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - \tau\varepsilon\mu^2 x e^{\varepsilon\varphi x}}{\frac{1}{x+1}} \\ &= \frac{e^0 - \tau\varepsilon\mu^2 0 e^{\varepsilon\varphi 0}}{\frac{1}{0+1}} = \frac{1 - 1 \cdot e^0}{1} = 1 - 1 \\ &= 0. \end{aligned}$$

Άρα, από κανόνα του De L' Hopital,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{\varepsilon\varphi x}}{\ln(x+1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^x - e^{\varepsilon\varphi x})'}{(\ln(x+1))'} = 0.$$

(iii) Είναι  $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-3x} = +\infty$  και  $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 = +\infty$  και άρα το όριο αποτελεί απροσδιοριστία τύπου  $\frac{+\infty}{+\infty}$ . Έχουμε:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(e^{-3x})'}{(x^2)'} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-3e^{-3x}}{2x} = -\frac{3}{2} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^{-3x}}{x}.$$

Εύκολα βλέπουμε ότι το τελευταίο όριο είναι απροσδιοριστία τύπου  $\frac{+\infty}{-\infty}$ . Έχουμε:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(e^{-3x})'}{x'} = -3 \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-3x} = +\infty \in \overline{\mathbb{R}}.$$

Άρα, από κανόνα του De L' Hopital,

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^{-3x}}{x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(e^{-3x})'}{(x^2)'} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(e^{-3x})''}{(x^2)''} = +\infty.$$

(5) Να βρείτε τα τοπικά ακρότατα και τα σημεία καμπής (αν υπάρχουν) των πιο κάτω συναρτήσεων:

(i)  $f(x) = x + \frac{1}{x}$

(ii)  $g(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 10$ .

**Απάντηση.**

(i)  $f(x) = x + \frac{1}{x}$ . Είναι  $D(f) = \mathbb{R} - \{0\}$ . Η  $f$  είναι παραγωγίσιμη παντού στο πεδίο ορισμού της με

$$f'(x) = \left(x + \frac{1}{x}\right)' = 1 - \frac{1}{x^2} = \frac{x^2 - 1}{x^2}, \quad \forall x \neq 0.$$

Είναι

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow (x - 1)(x + 1) = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1.$$

Τα κρίσιμα σημεία της  $f$  είναι τα  $x = 0, \pm 1$ .

Κάνουμε τον πίνακα μεταβολών της  $f'$  και παρατηρούμε ότι:

$\forall x \in (-\infty, -1) \Rightarrow f'(x) > 0 \Rightarrow f$  γνησίως αύξουσα,

$\forall x \in (-1, 0) \Rightarrow f'(x) < 0 \Rightarrow f$  γνησίως φθίνουσα

και αφού  $f'(-1) = 0$ , από το Κριτήριο Πρώτης Παραγώγου για τοπικά ακρότατα, η  $f$  παρουσιάζει **τοπικό μέγιστο** στο σημείο  $(-1, f(-1)) = (-1, -2)$ ,

$\forall x \in (0, 1) \Rightarrow f'(x) < 0 \Rightarrow f$  γνησίως φθίνουσα,

$\forall x \in (1, +\infty) \Rightarrow f'(x) > 0 \Rightarrow f$  γνησίως αύξουσα

και αφού  $f'(1) = 0$ , από το Κριτήριο Πρώτης Παραγώγου για τοπικά ακρότατα, η  $f$  παρουσιάζει **τοπικό ελάχιστο** στο σημείο  $(1, f(1)) = (1, 2)$ .

Τώρα,

$$f''(x) = \frac{2}{x^3} \neq 0, \quad \forall x \neq 0$$

και άρα το γράφημα της  $f$  δεν παρουσιάζει πουθενά καμπή (δεν υπάρχουν σημεία καμπής). ◀

(ii)  $g(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 10$ . Είναι  $D(f) = \mathbb{R}$ , αφού η  $g$  είναι πολυωνυμική συνάρτηση. Η  $g$  είναι παραγωγίσιμη παντού στο πεδίο ορισμού της με

$$\begin{aligned} g'(x) &= (x^3 - 3x^2 - 9x + 10)' = 3x^2 - 6x - 9 \\ &= 3(x^2 - 2x + 3), = 3(x - 3)(x + 1) \quad \forall x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Είναι

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow (x - 3)(x + 1) = 0 \Leftrightarrow x = -1, 3.$$

Τα κρίσιμα σημεία της  $g$  είναι τα  $x = -1, 3$ .

Κάνουμε τον πίνακα μεταβολών της  $g'$  και παρατηρούμε ότι:

$\forall x \in (-\infty, -1) \Rightarrow g'(x) > 0 \Rightarrow g$  γνησίως αύξουσα,

$\forall x \in (-1, 3) \Rightarrow g'(x) < 0 \Rightarrow g$  γνησίως φθίνουσα

$\forall x \in (3, +\infty) \Rightarrow g'(x) > 0 \Rightarrow g$  γνησίως αύξουσα

και συνεπώς, αφού  $g'(-1) = 0$  και  $g'(3) = 0$ , από το Κριτήριο Πρώτης Παραγώγου για τοπικά ακρότατα, η  $g$  παρουσιάζει στα σημεία  $(-1, g(-1)) = (-1, 15)$  και  $(3, g(3)) = (3, -17)$  **τοπικό μέγιστο** και **τοπικό ελάχιστο** αντίστοιχα.

Είναι

$$g''(x) = 6x^2 - 6 = 6(x - 1), \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

και άρα  $g''(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$ . Αφού  $\forall x < 1$  είναι  $g''(x) < 0$ , άρα η  $g$  κοίλη στο  $(-\infty, 1)$  και αφού  $\forall x > 1$  είναι  $g''(x) > 0$ , άρα η  $g$  κυρτή στο  $(1, +\infty)$ . Έτσι, αφού η κυρτότητα αλλάζει στο  $x = 1$  και  $g''(1) = 0$ , το γράφημα της  $g$  παρουσιάζει **σημείο καμπής**, το  $(1, g(1)) = (1, -1)$ .

(6) Να βρείτε τα τοπικά ακρότατα της συνάρτησης  $f$  με τύπο

$$f(x) = \frac{\eta\mu x}{2 - \sigma\upsilon\nu x}$$

στο διάστημα  $[0, 2\pi]$  και ακολούθως να εξετάσετε αν εφαρμόζεται το Θεώρημα του Rolle για την  $f$  στο εν λόγω διάστημα.

**Απάντηση.**

Κατ' αρχάς, η συνάρτηση που μας δίνεται έχει νόημα, αφού ο παρονομαστής δεν μπορεί ποτέ να μηδενιστεί, αφού όπως ξέρουμε,  $-1 \leq \sigma\upsilon\nu x \leq 1, \forall x \in \mathbb{R}$ .

Η  $f$  είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα  $[0, 2\pi]$  (στα άκρα του διαστήματος υπάρχουν οι πλευρικές παράγωγοι) με

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(\eta\mu x)'(2 - \sigma\upsilon\nu x) - (\eta\mu x)(2 - \sigma\upsilon\nu x)'}{(2 - \sigma\upsilon\nu x)^2} \\ &= \frac{\sigma\upsilon\nu x(2 - \sigma\upsilon\nu x) - (\eta\mu x)(\eta\mu x)}{(2 - \sigma\upsilon\nu x)^2} \\ &= \frac{2\sigma\upsilon\nu x - \sigma\upsilon\nu^2 x - \eta\mu^2 x}{(2 - \sigma\upsilon\nu x)^2} \\ &= \frac{2\sigma\upsilon\nu x - (\sigma\upsilon\nu^2 x + \eta\mu^2 x)}{(2 - \sigma\upsilon\nu x)^2} \\ &= \frac{2\sigma\upsilon\nu x - 1}{(2 - \sigma\upsilon\nu x)^2}. \end{aligned}$$

Είναι

$$\begin{aligned} f'(x) = 0 &\Leftrightarrow 2\sigma\upsilon\nu x - 1 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x = \frac{1}{2} \\ &\Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x = \sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{3}\right) \\ &\Leftrightarrow x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3}, \quad k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Βάζοντας τιμές στο  $k \in \mathbb{Z}$ , βρίσκουμε ότι οι μόνες λύσεις της πιο πάνω που ανήκουν στο διάστημα  $[0, 2\pi]$  είναι οι  $x = \frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}$ .

Κάνουμε τον πίνακα μεταβολών της  $f'$  και παρατηρούμε ότι:

$\forall x \in (0, \pi/3) \Rightarrow f'(x) > 0 \Rightarrow f$  γνησίως αύξουσα,

$\forall x \in (\pi/3, 5\pi/3) \Rightarrow f'(x) < 0 \Rightarrow f$  γνησίως φθίνουσα

$\forall x \in (5\pi/3, 2\pi) \Rightarrow f'(x) > 0 \Rightarrow f$  γνησίως αύξουσα

και συνεπώς, αφού  $f'(\pi/3) = 0$  και  $f'(5\pi/3) = 0$ , από το Κριτήριο Πρώτης Παραγώγου για τοπικά ακρότατα, η  $f$  παρουσιάζει στα σημεία  $(\pi/3, f(\pi/3))$  και  $(5\pi/3, f(5\pi/3))$  **τοπικό μέγιστο** και **τοπικό ελάχιστο** αντίστοιχα. Είναι

$$f(\pi/3) = \frac{\eta\mu(\pi/3)}{2 - \sigma\upsilon\nu(\pi/3)} = \frac{\sqrt{3}/2}{2 - \frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{3}/2}{3/2} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

και

$$\begin{aligned} f(5\pi/3) &= f(2\pi - \pi/3) = \frac{\eta\mu(2\pi - \pi/3)}{2 - \sigma\upsilon\nu(2\pi - \pi/3)} \\ &= \frac{-\eta\mu(\pi/3)}{2 - \sigma\upsilon\nu(\pi/3)} = -f(\pi/3) \\ &= -\frac{\sqrt{3}}{3}. \end{aligned}$$

Επίσης, αφού η  $f$  είναι συνεχής σε κλειστό διάστημα, τα άκρα του πεδίου ορισμού της είναι τοπικά ακρότατα: από τον πίνακα μεταβολών της  $f'$  έχουμε ότι το  $(0, f(0)) = (0, 0)$  είναι



τοπικό ελάχιστο και το  $(2\pi, f(2\pi)) = (0, 0)$  είναι τοπικό μέγιστο.

Τώρα,

- $f$  συνεχής στο  $[0, 2\pi]$  ως πηλίκο συνεχών συναρτήσεων,
- $f$  παραγωγίσιμη στο  $(0, 2\pi)$  ως πηλίκο παραγωγίσιμων συναρτήσεων,
- $f(0) = f(2\pi) (= 0)$

και άρα εφαρμόζεται το Θεώρημα του Rolle για την  $f$  στο διάστημα  $[0, 2\pi]$ . ◀

- (7) Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς  $\alpha$  και  $\beta$  έτσι ώστε η γραφική παράσταση της συνάρτησης  $y = f(x) = \alpha x^3 + \beta x^2$  να έχει σημείο καμπής στο  $A(1, 2)$ .

**Απάντηση.**

Ξέρουμε ότι αν η γραφική παράσταση της συνάρτησης  $f$  παρουσιάζει σημείο καμπής στο σημείο  $x = x_0$ , είναι παραγωγίσιμη σε κάποια ανοικτή περιοχή του σημείου  $x = x_0$  και υπάρχει ο  $f''(x_0)$ , τότε  $f''(x_0) = 0$ .

Εδώ πρόκειται για μια απλή περίπτωση (όπως και οι πλείστες συναρτήσεις που εμφανίζονται στα σχολικά πλαίσια) όπου η συνάρτηση είναι παντού παραγωγίσιμη στο πεδίο ορισμού της (είναι πολυωνυμική). Συνεπώς, αφού η γραφική παράσταση της συνάρτησης  $f$  παρουσιάζει σημείο καμπής στο  $A(1, 2)$ , τότε  $f''(1) = 0$ .

Είναι  $f''(x) = 6\alpha x + 2\beta$  και άρα η πιο πάνω δίνει  $6\alpha + 2\beta = 0$ , δηλαδή

$$\beta = -3\alpha. \quad (3)$$

Επίσης, αφού η γραφική παράσταση της συνάρτησης  $f$  περνά από το σημείο  $A(1, 2)$ , έχουμε ότι  $f(1) = 2$ , δηλαδή

$$\alpha + \beta = 2. \quad (4)$$

Λύνοντας το σύστημα που προκύπτει από τις (3) και (4), βρίσκουμε

$$\alpha = -1 \quad \text{και} \quad \beta = 3.$$

◀

- (8) Να εφαρμόσετε το Θεώρημα μέσης τιμής του Διαφορικού Λογισμού για τη συνάρτηση  $f(x) = x^2 + x + 3$  στο διάστημα  $[-2, 4]$  και να ερμηνεύσετε γεωμετρικά το αποτέλεσμα.

**Απάντηση.**

- $f$  συνεχής στο  $[-2, 4]$  ως πολυωνυμική,
  - $f$  παραγωγίσιμη στο  $(-2, 4)$  ως πολυωνυμική
- και άρα εφαρμόζεται το Θεώρημα μέσης τιμής του Διαφορικού Λογισμού για τη συνάρτηση  $f$  στο διάστημα  $[-2, 4]$ :

$$\exists \xi \in (-2, 4) : f'(\xi) = \frac{f(4) - f(-2)}{4 - (-2)} = \frac{23 - 5}{6} = \frac{18}{6} = 3.$$

Έχουμε  $f'(x) = 2x + 1$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}$  και άρα η πιο πάνω δίνει

$$2\xi + 1 = 3 \Rightarrow \xi = 1 \in (-2, 4).$$

**Γεωμετρική ερμηνεία:**

Στο σημείο με  $\xi = 1 \in (-2, 4)$ , ο στιγμιαίος ρυθμός μεταβολής ισούται με το μέσο ρυθμό μεταβολής σε όλο το διάστημα  $(-2, 4)$ . Δηλαδή η εφαπτομένη στο σημείο  $(1, f(1)) = (1, 5)$  είναι παράλληλη με το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει τα σημεία  $(-2, f(-2)) = (-2, 5)$  και  $(4, f(4)) = (4, 23)$ .

**Σημείωση:** Είναι

$$f(x) = x^2 + x + 3 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{11}{4}$$

και άρα η γραφική παράσταση της  $f$  είναι παραβολή με κορυφή  $K\left(-\frac{1}{2}, \frac{11}{4}\right)$  στην οποία έχει ελάχιστο. ◀

- (9) Για μια παραγωγίσιμη συνάρτηση  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  ισχύει  $|f'(x)| \leq 2, \forall x \in \mathbb{R}$ .  
Αν  $f(1) = 20$ , να δείξετε ότι  $18 \leq f(2) \leq 22$ .

**Απάντηση.**

Είναι

$$|f'(x)| \leq 2, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow -2 \leq f'(x) \leq 2, \forall x \in \mathbb{R}$$

και αφού μας δίνεται η τιμή της συνάρτησης  $f$  στο σημείο  $x = 1$  και μας ζητείται να αποδείξουμε μια ανισοτική σχέση που ικανοποιεί η τιμή της συνάρτησης  $f$  στο σημείο  $x = 2$ , το μυαλό μας πηγαίνει στο Θεώρημα μέσης τιμής του Διαφορικού Λογισμού, αφού αυτό μας δίνει πληροφορία για την παράγωγο. Προφανώς θα το εφαρμόσουμε για την  $f$  στο διάστημα  $[1, 2]$  :

- $f$  συνεχής στο  $[1, 2]$  ως παραγωγίσιμη
- $f$  παραγωγίσιμη στο  $(1, 2)$  (δεδομένο)

και άρα εφαρμόζεται το Θεώρημα μέσης τιμής του Διαφορικού Λογισμού για τη συνάρτηση  $f$  στο διάστημα  $[1, 2]$ :

$$\exists \xi \in (1, 2) : f'(\xi) = \frac{f(2) - f(1)}{2 - 1} = f(2) - f(1) = f(2) - 20.$$

Αφού όμως  $-2 \leq f'(x) \leq 2, \forall x \in \mathbb{R}$ , τότε και  $-2 \leq f'(\xi) \leq 2$ , δηλαδή  $-2 \leq f(2) - 20 \leq 2$ , δηλαδή  $-2 + 20 \leq f(2) \leq 2 + 20$ , δηλαδή

$$18 \leq f(2) \leq 22.$$



- (10) (i) Να δείξετε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης  $f(x) = \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta$  ( $\alpha \neq 0$ ) έχει μοναδικό σημείο καμπής, του οποίου να προσδιορίσετε τις συντεταγμένες.
- (ii) Αν επιπλέον υποθέσουμε ότι  $\beta^2 = 3\alpha(\gamma - 2)$ , να δείξετε ότι στο σημείο καμπής της γραφικής παράστασης της  $f$  η εφαπτόμενη είναι παράλληλη προς την ευθεία με εξίσωση  $y = 2x + 7$ .

**Απάντηση.**

- (i) Η  $f$  είναι δις παραγωγίσιμη στο  $\mathbb{R}$ , ως πολυωνυμική. Είναι

$$\begin{aligned} f(x) &= \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta \\ \Rightarrow f'(x) &= 3\alpha x^2 + 2\beta x + \gamma \\ \Rightarrow f''(x) &= 6\alpha x + 2\beta. \end{aligned}$$

Είναι  $f''(x) = 0 \Leftrightarrow 6\alpha x + 2\beta = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{\beta}{3\alpha}$ , αφού  $\alpha \neq 0$ . Είτε  $\alpha < 0$  είτε  $\alpha > 0$ , η κυρτότητα στο γράφημα της  $f$  αλλάζει εκατέρωθεν του σημείου με  $x = -\frac{\beta}{3\alpha}$ , άρα έχει σημείο καμπής στο σημείο αυτό.

- (ii) Είναι

$$\begin{aligned} f'\left(-\frac{\beta}{3\alpha}\right) &= 3\alpha\left(-\frac{\beta}{3\alpha}\right)^2 + 2\beta\left(-\frac{\beta}{3\alpha}\right) + \gamma \\ &= \frac{\beta^2}{3\alpha} - \frac{2\beta^2}{3\alpha} + \gamma = \frac{\beta^2}{3\alpha} + \gamma \\ &\stackrel{\beta^2=3\alpha(\gamma-2)}{=} \frac{3\alpha(\gamma-2)}{3\alpha} + \gamma = 2. \end{aligned}$$

Άρα, η κλίση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της  $f$  στο σημείο καμπής της έχει κλίση ίση με  $f' \left( -\frac{\beta}{3\alpha} \right) = 2$  και άρα παράλληλη με την ευθεία με εξίσωση  $y = 2x + 7$ , αφού έχουν την ίδια κλίση.

- (11) Χρησιμοποιώντας το Θεώρημα μέσης τιμής του Διαφορικού Λογισμού για τη συνάρτηση  $f(x) = \ln x$  να δείξετε ότι αν  $0 < \alpha < \beta$ , τότε

$$1 - \frac{\alpha}{\beta} < \ln \left( \frac{\beta}{\alpha} \right) < \frac{\beta}{\alpha} - 1.$$

**Απάντηση.**

Γνωρίζουμε ότι (Θεωρία) η συνάρτηση  $f$  είναι παντού παραγωγίσιμη στο πεδίο ορισμού της, δηλαδή στο διάστημα  $(0, +\infty)$ , άρα **για κάθε** ζεύγος πραγματικών αριθμών  $\alpha$  και  $\beta$  με  $0 < \alpha < \beta$ , η  $f$  είναι συνεχής στο **διάστημα**  $[\alpha, \beta]$  και παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του. Συνεπώς, εφαρμόζεται το Θεώρημα μέσης τιμής του Διαφορικού Λογισμού για τη συνάρτηση  $f$  στο διάστημα  $[\alpha, \beta]$  :

$$\exists \xi \in (\alpha, \beta) : f'(\xi) = \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha} = \frac{\ln \beta - \ln \alpha}{\beta - \alpha} = \frac{\ln \left( \frac{\beta}{\alpha} \right)}{\beta - \alpha}.$$

Αλλά,  $f'(x) = 1/x$ ,  $\forall x \in (\alpha, \beta) \Rightarrow f'(\xi) = 1/\xi$ . Επίσης,

$$0 < \alpha < \xi < \beta \Rightarrow \frac{1}{\beta} < \frac{1}{\xi} < \frac{1}{\alpha}.$$

Από τα πιο πάνω έχουμε:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\beta} < \frac{\ln \left( \frac{\beta}{\alpha} \right)}{\beta - \alpha} < \frac{1}{\alpha} & \stackrel{\beta - \alpha > 0}{\Rightarrow} \frac{\beta - \alpha}{\beta} < \ln \left( \frac{\beta}{\alpha} \right) < \frac{\beta - \alpha}{\alpha} \\ & \Rightarrow \frac{\beta}{\beta} - \frac{\alpha}{\beta} < \ln \left( \frac{\beta}{\alpha} \right) < \frac{\beta}{\alpha} - \frac{\alpha}{\alpha} \\ & \Rightarrow 1 - \frac{\alpha}{\beta} < \ln \left( \frac{\beta}{\alpha} \right) < \frac{\beta}{\alpha} - 1. \end{aligned}$$

- (12) Να εξετάσετε τη συνάρτηση  $f(x) = \sqrt{2-x}$ , ως προς τη μονοτονία με χρήση των αντίστοιχων ορισμών της μονοτονίας.

**Απάντηση.**

Είναι  $2 - x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 2$  και άρα  $D(f) = (-\infty, 2]$ .

Έστω  $x_1, x_2 \in (-\infty, 2]$  με  $x_1 < x_2$ . Τότε,

$$\begin{aligned} x_1 < x_2 & \Rightarrow -x_1 > -x_2 \\ & \Rightarrow 2 - x_1 > 2 - x_2 \\ (g(x) = \sqrt{x} \text{ γν. αύξουσα}) & \Rightarrow \sqrt{2 - x_1} > \sqrt{2 - x_2}, \end{aligned}$$

δηλαδή

$$f(x_1) > f(x_2)$$

και αφού τα  $x_1$  και  $x_2$  ήταν **τυχόντα**, η  $f$  είναι **γνησίως φθίνουσα** συνάρτηση. ◀

(13) Έστω συνάρτηση  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  συνεχής, δύο φορές παραγωγίσιμη στο  $(a, b)$  με  $f(a) = f(b) = 0$ . Αν υπάρχει  $c \in (a, b)$  τέτοιο ώστε  $f(c) > 0$ , να αποδείξετε ότι:

(i) υπάρχουν  $\xi_1, \xi_2 \in (a, b)$  τέτοια ώστε  $f'(\xi_1)f'(\xi_2) < 0$ ,

(ii) υπάρχει  $\xi \in (a, b)$  τέτοιο ώστε  $f''(\xi) < 0$ .

Υπόδειξη: Εφαρμόστε επανειλημμένα το ΘΜΤΔΛ.

**Απάντηση.**

Αφού η  $f$  είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο  $(a, b)$ , η  $f$  είναι παραγωγίσιμη στο  $(a, b)$ .

(i)  $c \in (a, b) \Rightarrow a < c < b$ .

Ικανοποιούνται οι υποθέσεις του ΘΜΤΔΛ για την  $f$  στο διάστημα  $(a, c)$  :

$$\exists \xi_1 \in (a, c) : f'(\xi_1) = \frac{f(c) - \overbrace{f(a)}^{=0}}{c - a} = \frac{f(c)}{c - a} > 0,$$

αφού  $f(c) > 0$  και  $c > a \Rightarrow c - a > 0$ .

Ικανοποιούνται οι υποθέσεις του ΘΜΤΔΛ για την  $f$  στο διάστημα  $(c, b)$  :

$$\exists \xi_2 \in (c, b) : f'(\xi_2) = \frac{\overbrace{f(b)}^{=0} - f(c)}{b - c} = -\frac{f(c)}{b - c} = \frac{f(c)}{c - b} < 0,$$

αφού  $f(c) > 0$  και  $b > c \Rightarrow c - b < 0$ .

Άρα,  $f'(\xi_1)f'(\xi_2) < 0$ .

(ii) Ικανοποιούνται οι υποθέσεις του ΘΜΤΔΛ για την  $f'$  στο διάστημα  $(\xi_1, \xi_2)$  :

$$\exists \xi \in (\xi_1, \xi_2) : f''(\xi) = \frac{f'(\xi_2) - f'(\xi_1)}{\xi_2 - \xi_1}.$$

Αλλά,  $\xi_2 > \xi_1 \Rightarrow \xi_2 - \xi_1 > 0$  και  $f'(\xi_2) < 0$ ,  $-f'(\xi_1) < 0 \Rightarrow f'(\xi_2) - f'(\xi_1) < 0$  και συνεπώς,

$$f''(\xi) = \frac{f'(\xi_2) - f'(\xi_1)}{\xi_2 - \xi_1} < 0.$$

(14) (i) Να εξετάσετε ως προς τη μονοτονία τη συνάρτηση

$$f(x) = \ln(1+x) - \frac{1}{x}, \quad x \in (0, 1].$$

(ii) Να δείξετε ότι

$$\ln(1+x) < \frac{1}{x}, \quad \forall x \in (0, 1).$$

**Απάντηση.**

(i) Η συνάρτηση  $f$  είναι παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του πεδίου ορισμού της, δηλαδή στο διάστημα  $(0, 1)$  ως σύνθεση παραγωγίσιμων συναρτήσεων. Έχουμε:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left( \ln(1+x) - \frac{1}{x} \right)' = (\ln(1+x))' - \left( \frac{1}{x} \right)' \\ &= \frac{(1+x)'}{1+x} - \left( -\frac{1}{x^2} \right) = \frac{1}{1+x} + \frac{1}{x^2} \\ &= \frac{x^2 + x + 1}{x^2(1+x)} \end{aligned}$$

και άρα  $f'(x) > 0, \forall x \in (0, 1)$ . Συνεπώς, η  $f$  είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα  $(0, 1)$  και, λόγω της συνέχειας της  $f$  στο σημείο  $x = 1$ , αυτή είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα  $(0, 1]$ .

- (ii) Θεωρούμε τη συνάρτηση  $f$  του προηγούμενου ερωτήματος. Δείξαμε ότι είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα  $(0, 1]$ , άρα

$$f(x) \leq f(1), \forall x \in (0, 1],$$

με την ισότητα **μόνο** για  $x = 1$ .

Τώρα,  $f(1) = \ln 2 - 1 = \ln 2 - \ln e < 0$ , αφού όπως ξέρουμε, η συνάρτηση  $g(x) = \ln x$  είναι γνησίως αύξουσα και  $2 < e$  (άρα  $\ln 2 < \ln e$ ). Συνεπώς,

$$f(x) < 0, \forall x \in (0, 1),$$

δηλαδή

$$\ln(1+x) < \frac{1}{x}, \quad \forall x \in (0, 1).$$

- (15) (i) Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = 2\eta\mu x + x - 2, \quad x \in \left[\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right].$$

(α') Να εξετάσετε τη συνάρτηση ως προς τη μονοτονία.

(β') Να βρείτε το σύνολο τιμών της.

- (ii) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση  $2\eta\mu x + x - 3 = 0$  έχει ακριβώς μία πραγματική λύση στο διάστημα  $\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right)$ .

**Απάντηση.**

- (i)(α') Η συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη (ως σύνθεση παραγωγίσιμων) με

$$f'(x) = 2\sigma\upsilon\nu x + 1, \quad \forall x \in \left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right).$$

Αφού  $\sigma\upsilon\nu x > 0, \forall x \in \left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right)$ , τότε  $f'(x) > 0, \forall x \in \left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right)$  και άρα η  $f$  είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα  $\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right)$  και φυσικά, λόγω της συνέχειας της συνάρτησης στα άκρα του διαστήματος αυτού, η  $f$  είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα  $\left[\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right]$ .

- (β') Αφού η  $f$  είναι γνησίως αύξουσα συνάρτηση, ορισμένη στο κλειστό διάστημα  $\left[\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right]$ , το σύνολο τιμών της είναι το διάστημα  $\left[f\left(\frac{\pi}{3}\right), f\left(\frac{\pi}{2}\right)\right]$ , δηλαδή (μετά από υπολογισμούς) το διάστημα

$$\left[\sqrt{3} + \frac{\pi - 9}{3}, \frac{\pi}{2} - 1\right].$$

- (ii) Θεωρούμε τη συνάρτηση  $f(x) = 2\eta\mu x + x - 3$ .

**Η εξίσωση  $f(x) = 0$  έχει μια τουλάχιστον λύση στο διάστημα  $\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right)$ :**

- $f$  συνεχής στο  $\left[\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right]$  ως σύνθεση συνεχών
- $f(\pi/3) < 0, f(\pi/2) > 0 \Rightarrow f(\pi/3)f(\pi/2) < 0$

και άρα από το Θεώρημα του Bolzano, η εξίσωση  $f(x) = 0$  έχει τουλάχιστον λύση στο διάστημα  $\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right)$ .

**Η εξίσωση  $f(x) = 0$  έχει το πολύ μία λύση στο διάστημα  $\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right)$ :**

Υποθέτουμε ότι η εξίσωση έχει δύο διακεκριμένες λύσεις  $x_1$  και  $x_2$  (έστω  $x_1 < x_2$ ), δηλαδή  $f(x_1) = f(x_2) = 0$ . Τότε ορίζεται το διάστημα  $[x_1, x_2]$  στο οποίο ικανοποιούνται οι υποθέσεις του Θεωρήματος του Rolle:

$$\exists \xi \in (x_1, x_2) : f'(\xi) = 0.$$

Αλλά,  $f'(x) = 2\sigma\upsilon\nu x + 1 \neq 0, \forall x \in (x_1, x_2) \subset (\pi/3, \pi/2)$ . Καταλήξαμε λοιπόν σε άτοπο.

Άρα, η εξίσωση  $f(x) = 0$ , δηλαδή η  $2\eta\mu x + x - 3 = 0$  έχει ακριβώς μία πραγματική λύση στο διάστημα  $(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2})$ .

**Εναλλακτικά**, αφού η  $f$  είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα  $(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2})$  και έχει τουλάχιστον μία λύση σε αυτό, αυτή είναι και η μοναδική λύση που έχει. ◀

(16) Αφού βρείτε το πεδίο ορισμού, τα σημεία τομής με τους άξονες, τα διαστήματα μονοτονίας, τα ακρότατα, την κυρτότητα, τα σημεία καμπής και τις ασύμπτωτες, να κάνετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης με τύπο:

(i)  $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1}$

(iii)  $f(x) = \frac{x - 2}{x^2 + x - 2}$

(ii)  $f(x) = xe^{\frac{1}{x}}$

(iv)  $f(x) = \frac{x^2 - 4x + 4}{x - 4}$

**Απάντηση.**

(i)  $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1} = \frac{x^2 + 1}{(x - 1)(x + 1)}$ .

• Εύρεση πεδίου ορισμού  $D(f)$  της  $f$ :  
 Η συνάρτηση  $f$  είναι **ρητή**. Συνεπώς,

$$D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid (x - 1)(x + 1) \neq 0\} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \pm 1\} = \mathbb{R} - \{\pm 1\}.$$

• Εύρεση σημείων τομής με τους άξονες των συντεταγμένων:  
 $x^2 + 1 \neq 0, \forall x \in \mathbb{R}$ , συνεπώς το γράφημα της  $f$  δεν τέμνει τον άξονα των  $x$ . Είναι  $f(0) = \frac{0+1}{0-1} = -1$  και άρα το σημείο τομής με τον άξονα των  $y$  είναι το  $(0, -1)$ .

• Εύρεση διαστημάτων μονοτονίας και ακρότατων τιμών:  
 Η συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη στο πεδίο ορισμού της: για  $x \neq \pm 1$ ,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(x^2 + 1)'(x^2 - 1) - (x^2 - 1)'(x^2 + 1)}{(x^2 - 1)^2} \\ &= \frac{2x(x^2 - 1) - 2x(x^2 + 1)}{(x^2 - 1)^2} \\ &= \frac{2x^3 - 2x - 2x^3 - 2x}{(x^2 - 1)^2} \\ &= \frac{-4x}{(x^2 - 1)^2} = \frac{-4x}{(x - 1)^2(x + 1)^2}. \end{aligned}$$

Συνεπώς,  $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ . Το **κρίσιμο σημείο** της  $f$  είναι μόνο το  $x = 0$ .

Κάνοντας τον πίνακα μεταβολών της  $f'$  βρίσκουμε:

$\forall x \in (-\infty, -1), f'(x) > 0 \Rightarrow f$  γνησίως αύξουσα,

$\forall x \in (-1, 0), f'(x) > 0 \Rightarrow f$  γνησίως αύξουσα,

$\forall x \in (0, 1), f'(x) < 0 \Rightarrow f$  γνησίως φθίνουσα,

$\forall x \in (1, +\infty), f'(x) < 0 \Rightarrow f$  γνησίως φθίνουσα.

Αφού  $f'(0) = 0$  και από το πιο πάνω, έπεται ότι στο σημείο  $(0, f(0)) = (0, -1)$  η γρ. παράσταση της  $f$  παρουσιάζει τοπικό μέγιστο.

• Έλεγχος ύπαρξης ασυμπτώτων

Ελέγχουμε τη συμπεριφορά της  $f$  στα άκρα του πεδίου ορισμού της  $(-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, +\infty)$  :

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2}{x^2} = 1$$

και άρα η ευθεία με εξίσωση  $y = 1$  είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη του γραφήματος της  $f$  στο  $+\infty$  και στο  $-\infty$ .

Τώρα,

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1} = \left( \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{x^2 + 1}{x - 1} \right) \cdot \left( \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{1}{x + 1} \right) \\ &= (-1) \cdot (-\infty) = +\infty, \end{aligned}$$

αφού  $x < -1 \Rightarrow x + 1 < 0$  και

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1} = \left( \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x^2 + 1}{x - 1} \right) \cdot \left( \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{1}{x + 1} \right) \\ &= (-1) \cdot (+\infty) = -\infty, \end{aligned}$$

αφού  $x > -1 \Rightarrow x + 1 > 0$ .

Άρα, η ευθεία με εξίσωση  $x = -1$  είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της  $f$  αριστερά και δεξιά του  $x = -1$ . Εργαζόμενοι εντελώς όμοια, βρίσκουμε:

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty$$

και άρα η ευθεία με εξίσωση  $x = 1$  είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της  $f$  αριστερά και δεξιά του  $x = 1$ .

• Εύρεση σημείων καμπής

Εύκολα βρίσκουμε:

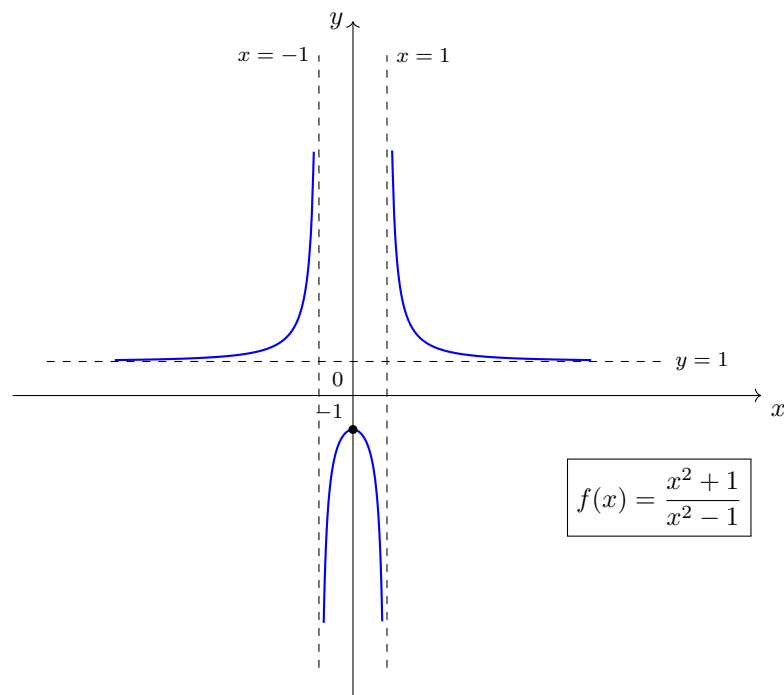
$$f''(x) = \frac{4(3x^2 - 1)}{(x^2 - 1)^3} \Rightarrow f''(x) \neq 0, \quad \forall x \in D(f).$$

Συνεπώς, η γραφική παράσταση της  $f$  δεν έχει σημεία καμπής.

Αφού  $\forall x \in (-\infty, -1)$ ,  $f''(x) > 0 \Rightarrow f$  κυρτή,

$\forall x \in (-1, 1)$ ,  $f''(x) < 0 \Rightarrow f$  κοίλη,

$\forall x \in (1, +\infty)$ ,  $f''(x) > 0 \Rightarrow f$  κυρτή.



(ii)  $f(x) = xe^{\frac{1}{x}}$ .

- Εύρεση πεδίου ορισμού  $D(f)$  της  $f$  :

Είναι γινόμενο δύο συναρτήσεων, μια εκ των οποίων έχει πεδίο ορισμού το  $\mathbb{R}$  και η άλλη το  $\mathbb{R} - \{0\}$ . Άρα,

$$D(f) = \mathbb{R} - \{0\}.$$

- Εύρεση σημείων τομής με τους άξονες των συντεταγμένων:

Αφού  $D(f) = \mathbb{R} - \{0\}$ , η γρ. παράσταση της  $f$  δεν τέμνει τους άξονες των συντεταγμένων.

- Εύρεση διαστημάτων μονοτονίας και ακρότατων τιμών:

Η συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη στο πεδίο ορισμού της: για  $x \neq 0$ ,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(xe^{\frac{1}{x}}\right)' = x' \cdot e^{\frac{1}{x}} + x \left(e^{\frac{1}{x}}\right)' \\ &= e^{\frac{1}{x}} + x \left(\frac{1}{x}\right)' \cdot e^{\frac{1}{x}} \\ &= e^{\frac{1}{x}} - \frac{1}{x^2} \cdot e^{\frac{1}{x}} \\ &= e^{\frac{1}{x}} \left(1 - \frac{1}{x}\right). \end{aligned}$$

Συνεπώς,  $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 1 - \frac{1}{x} = 0 \Leftrightarrow x = 1$ . Το **κρίσιμο σημείο** της  $f$  είναι μόνο το  $x = 1$ .

Κάνοντας τον πίνακα μεταβολών της  $f'$  βρίσκουμε:

$\forall x \in (-\infty, 0), f'(x) > 0 \Rightarrow f$  γνησίως αύξουσα,

$\forall x \in (0, 1), f'(x) < 0 \Rightarrow f$  γνησίως φθίνουσα,

$\forall x \in (1, +\infty), f'(x) > 0 \Rightarrow f$  γνησίως αύξουσα.

Αφού  $f'(1) = 0$  και από το πιο πάνω, έπεται ότι στο σημείο  $(1, f(1)) = (1, e)$  η γρ. παράσταση της  $f$  παρουσιάζει **τοπικό ελάχιστο**.

- Έλεγχος ύπαρξης ασυμπτώτων

Ελέγχουμε τη συμπεριφορά της  $f$  στα άκρα του πεδίου ορισμού της  $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$  :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} xe^{\frac{1}{x}} = \left(\lim_{x \rightarrow +\infty} x\right) \cdot \left(\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\frac{1}{x}}\right) = (+\infty) \cdot 1 = +\infty,$$

αφού

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\frac{1}{x}} = e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x}} = e^0 = 1$$

και ομοίως,

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} xe^{\frac{1}{x}} = -\infty.$$

Τώρα,

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} xe^{\frac{1}{x}} = 0 \cdot 0 = 0,$$

αφού

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} e^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{e^{-\frac{1}{x}}} = \frac{1}{\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{e^{-\frac{1}{x}}}} = 0.$$

Τέλος,

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} xe^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{\frac{1}{x}},$$

το οποίο είναι απροσδιόριστη μορφή τύπου 0/0. Είναι

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\left(e^{\frac{1}{x}}\right)'}{\left(\frac{1}{x}\right)'} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-\frac{1}{x^2} \cdot e^{\frac{1}{x}}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\frac{1}{x}} = e^{\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x}} = +\infty$$



και άρα από κανόνα του De L Hopital,

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} x e^{\frac{1}{x}} = +\infty.$$

Άρα, ο άξονας των  $y$  είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της γρ. παράστασης της  $f$  από τα δεξιά.

Ελέγχουμε για την ύπαρξη πλάγιας ασύμπτωτης:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x e^{\frac{1}{x}}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\frac{1}{x}} = 1$$

(το τελευταίο όριο υπολογίστηκε πιο πάνω).

Τώρα,

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - 1 \cdot x] &= \lim_{x \rightarrow +\infty} [x e^{\frac{1}{x}} - x] = \lim_{x \rightarrow +\infty} x [e^{\frac{1}{x}} - 1] \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{\frac{1}{x}} - 1}{\frac{1}{x}}. \end{aligned}$$

Εύκολα βλέπουμε ότι το τελευταίο όριο είναι απροσδιόριστη μορφή τύπου 0/0. Τότε

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(e^{\frac{1}{x}} - 1)'}{(\frac{1}{x})'} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-\frac{1}{x^2} \cdot e^{\frac{1}{x}}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\frac{1}{x}} = e^{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = e^0 = 1$$

και άρα από κανόνα του De L Hopital,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{\frac{1}{x}} - 1}{\frac{1}{x}} = 1.$$

Συνεπώς, η ευθεία με εξίσωση  $y = x + 1$  είναι πλάγια ασύμπτωτη της γρ. παράστασης της  $f$  στο  $+\infty$ .

Εντελώς όμοια βρίσκουμε ότι η ίδια ευθεία είναι πλάγια ασύμπτωτη της γρ. παράστασης της  $f$  στο  $-\infty$ .

• Εύρεση σημείων καμπής

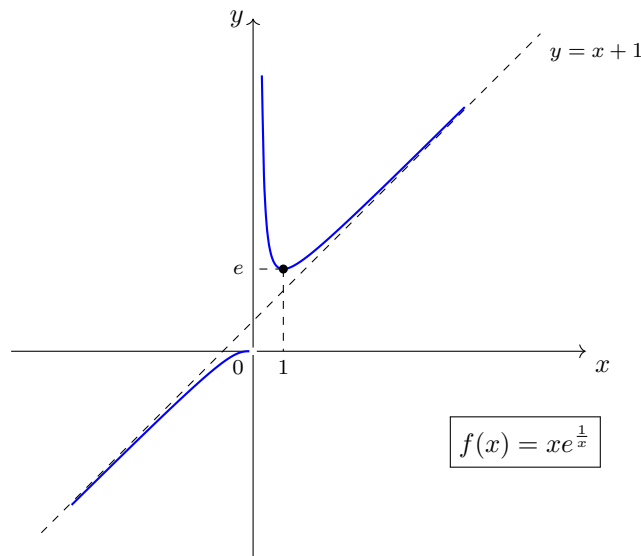
Εύκολα βρίσκουμε:

$$f''(x) = \frac{1}{x^3} \Rightarrow f''(x) \neq 0, \quad \forall x \in D(f).$$

Συνεπώς, η γραφική παράσταση της  $f$  δεν έχει σημεία καμπής.

Αφού  $\forall x \in (-\infty, 0)$ ,  $f''(x) < 0 \Rightarrow f$  κοίλη,

$\forall x \in (0, +\infty)$ ,  $f''(x) > 0 \Rightarrow f$  κυρτή.



$$(iii) f(x) = \frac{x-2}{x^2+x-2} = \frac{x-2}{(x+2)(x-1)}.$$

- Εύρεση πεδίου ορισμού  $D(f)$  της  $f$  :  
Η συνάρτηση  $f$  είναι **ρητή**. Συνεπώς,

$$D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid (x+2)(x-1) \neq 0\} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq -2, 1\} = \mathbb{R} - \{-2, 1\}.$$

- Εύρεση σημείων τομής με τους άξονες των συντεταγμένων:  
 $f(0) = \frac{0-2}{0+0-2} = 1$  και άρα το σημείο τομής με τον άξονα των  $y$  είναι το  $(0, 1)$ .  
 $f(x) = 0 \Leftrightarrow x-2 = 0 \Leftrightarrow x = 2$  και άρα το σημείο τομής με τον άξονα των  $x$  είναι το  $(2, 0)$ .

- Εύρεση διαστημάτων μονοτονίας και ακρότατων τιμών:  
Η συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη στο πεδίο ορισμού της: για  $x \neq -2, 1$ ,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(x-2)'(x^2+x-2) - (x^2+x-2)'(x-2)}{(x^2+x-2)^2} \\ &= \frac{x^2+x-2 - (2x+1)(x-2)}{(x^2+x-2)^2} \\ &= \frac{x^2+x-2 - 2x^2+4x-x+2}{(x^2+x-2)^2} \\ &= \frac{-x^2+4x}{(x^2+x-2)^2} = \frac{x(4-x)}{(x+2)^2(x-1)^2}. \end{aligned}$$

Συνεπώς,  $f'(x) = 0 \Leftrightarrow (x=0) \vee (x=4)$ . Τα **κρίσιμα σημεία** της  $f$  είναι τα  $x = 0, 4$ .

Κάνοντας τον πίνακα μεταβολών της  $f'$  βρίσκουμε:

$\forall x \in (-\infty, -2), f'(x) < 0 \Rightarrow f$  γνησίως φθίνουσα,

$\forall x \in (-2, 0), f'(x) < 0 \Rightarrow f$  γνησίως φθίνουσα,

$\forall x \in (0, 1), f'(x) > 0 \Rightarrow f$  γνησίως αύξουσα,

$\forall x \in (1, +\infty), f'(x) > 0 \Rightarrow f$  γνησίως αύξουσα.

Αφού  $f'(0) = 0$  και από το πιο πάνω, έπεται ότι στο σημείο  $(0, f(0)) = (0, 1)$  η γρ. παράσταση της  $f$  παρουσιάζει **τοπικό ελάχιστο** και αφού  $f'(4) = 0$  και από το πιο πάνω, έπεται ότι στο σημείο  $(4, f(4)) = (4, 1/9)$  η γρ. παράσταση της  $f$  παρουσιάζει **τοπικό μέγιστο**.

**Σημείωση:** Εδώ η εύρεση σημείων καμπής παραλείπεται, αφού το σύνολο των λύσεων της εξίσωσης  $f''(x) = 0$  είναι το σύνολο λύσεων ενός κυβικού πολυωνύμου (δηλαδή ενός πολυωνύμου βαθμού 3) και η εύρεσή του δεν εμπίπτει στα πλαίσια της Γ Λυκείου.

- Έλεγχος ύπαρξης ασυμπτώτων

Ελέγχουμε τη συμπεριφορά της  $f$  στα άκρα του πεδίου ορισμού της  $(-\infty, -2) \cup (-2, 1) \cup (1, +\infty)$  :

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x-2}{x^2+x-2} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{x} = 0$$

και άρα η ευθεία με εξίσωση  $y = 0$ , δηλαδή ο άξονας των  $x$ , είναι οριζόντια ασύμπτωτη του γραφήματος της  $f$  στο  $+\infty$  και στο  $-\infty$ .

Τώρα,

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{x-2}{(x+2)(x-1)} \\ &= \left( \lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{x-2}{x-1} \right) \cdot \left( \lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{1}{x+2} \right) \\ &= \frac{4}{3} \cdot (-\infty) = -\infty, \end{aligned}$$

αφού  $x < -2 \Rightarrow x + 2 < 0$  και

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{x-2}{(x+2)(x-1)} \\ &= \left( \lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{x-2}{x-1} \right) \cdot \left( \lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{1}{x+2} \right) \\ &= \frac{4}{3} \cdot (+\infty) = +\infty, \end{aligned}$$

αφού  $x > -2 \Rightarrow x + 2 > 0$ .

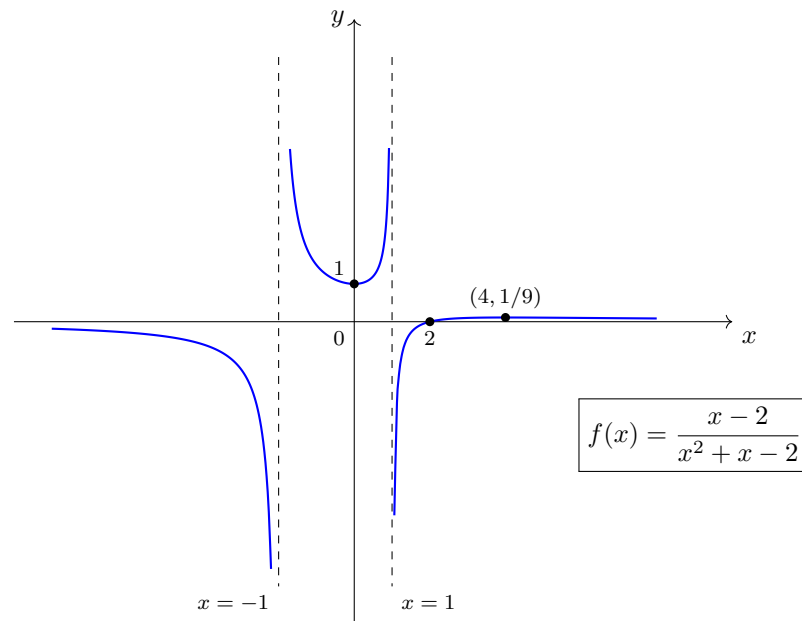
Άρα, η ευθεία με εξίσωση  $x = -2$  είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της  $f$  αριστερά και δεξιά του  $x = -2$ .

Εργαζόμενοι εντελώς όμοια βρίσκουμε

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = -\infty$$

και άρα η ευθεία με εξίσωση  $x = 1$  είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της  $f$  αριστερά και δεξιά του  $x = 1$ .

Δεν υπάρχουν πλάγιες ασύμπτωτες, αφού ο βαθμός του πολυωνύμου στον παρονομαστή είναι μεγαλύτερος του βαθμού του πολυωνύμου του αριθμητή.



$$(iv) f(x) = \frac{x^2 - 4x + 4}{x - 4} = \frac{(x - 2)^2}{x - 4}.$$

- Εύρεση πεδίου ορισμού  $D(f)$  της  $f$  :  
Η συνάρτηση  $f$  είναι **ρητή**. Συνεπώς,

$$D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x - 4 \neq 0\} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 4\} = \mathbb{R} - \{4\}.$$

- Εύρεση σημείων τομής με τους άξονες των συντεταγμένων:

$$f(0) = \frac{(0-2)^2}{0-4} = -1 \text{ και άρα το σημείο τομής με τον άξονα των τεταγμένων είναι το } (0, -1).$$

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 2 \text{ και άρα το σημεία τομής με τον άξονα των τεταγμένων είναι το } (2, 0).$$

- Εύρεση διαστημάτων μονοτονίας και ακρότατων τιμών:

Η συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη στο πεδίο ορισμού της: για  $x \neq 4$ ,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(x^2 - 4x + 4)'(x - 4) - (x - 4)'(x^2 - 4x + 4)}{(x - 4)^2} \\ &= \frac{(2x - 4)(x - 4) - (x^2 - 4x + 4)}{(x - 4)^2} \\ &= \frac{2x^2 - 8x - 4x + 16 - x^2 + 4x - 4}{(x - 4)^2} \\ &= \frac{x^2 - 8x + 12}{(x - 4)^2} = \frac{(x - 2)(x - 6)}{(x - 4)^2}. \end{aligned}$$

Συνεπώς,  $f'(x) = 0 \Leftrightarrow (x = -2) \vee (x = 6)$ . Τα **κρίσιμα σημεία** της  $f$  είναι τα  $x = 4, 6$ .

Κάνοντας τον πίνακα μεταβολών της  $f'$  βρίσκουμε:

$\forall x \in (-\infty, 2), f'(x) > 0 \Rightarrow f$  γνησίως αύξουσα,

$\forall x \in (2, 4), f'(x) < 0 \Rightarrow f$  γνησίως φθίνουσα,

$\forall x \in (4, 6), f'(x) < 0 \Rightarrow f$  γνησίως φθίνουσα,

$\forall x \in (6, +\infty), f'(x) > 0 \Rightarrow f$  γνησίως αύξουσα.

Αφού  $f'(2) = 0$  και από το πιο πάνω, έπεται ότι στο σημείο  $(2, f(2)) = (2, 0)$  η γρ. παράσταση της  $f$  παρουσιάζει τοπικό μέγιστο και αφού  $f'(6) = 0$  και από το πιο πάνω, έπεται ότι στο σημείο  $(6, f(6)) = (6, 8)$  η γρ. παράσταση της  $f$  παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο.

- Έλεγχος ύπαρξης ασυμπτώτων

Ελέγχουμε τη συμπεριφορά της  $f$  στα άκρα του πεδίου ορισμού της  $(-\infty, 4) \cup (4, +\infty)$  :

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2 - 4x + 4}{x - 4} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} x = \pm\infty.$$

Τώρα,

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 4^-} \frac{x^2 - 4x + 4}{x - 4} \\ &= \left( \lim_{x \rightarrow 4^-} (x^2 - 4x + 4) \right) \cdot \left( \lim_{x \rightarrow 4^-} \frac{1}{x - 4} \right) \\ &= 4 \cdot (-\infty) = -\infty, \end{aligned}$$

αφού  $x < 4 \Rightarrow x - 4 < 0$  και

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 4^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 4^+} \frac{x^2 - 4x + 4}{x - 4} \\ &= \left( \lim_{x \rightarrow 4^+} (x^2 - 4x + 4) \right) \cdot \left( \lim_{x \rightarrow 4^+} \frac{1}{x - 4} \right) \\ &= 4 \cdot (+\infty) = +\infty, \end{aligned}$$

αφού  $x > 4 \Rightarrow x - 4 > 0$ .

Άρα, η ευθεία με εξίσωση  $x = 4$  είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της  $f$  αριστερά και δεξιά του  $x = 4$ .

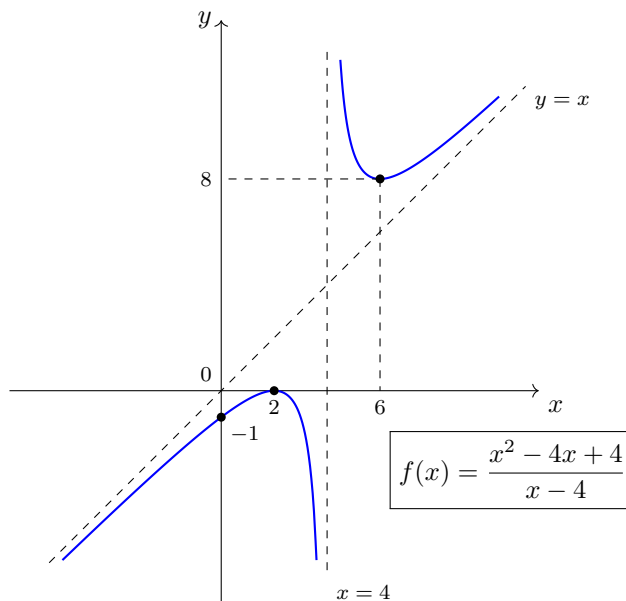
Ο βαθμός του αριθμητή είναι κατά ένα μικρότερος του βαθμού του παρονομαστή, άρα η γραφική παράσταση της  $f$  έχει πλάγια ασύμπτωτη, την εξίσωση της οποία θα προσδιορίσουμε:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 4x + 4}{x(x-4)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 4x + 4}{x^2 - 4x} = 1$$

και

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - 1 \cdot x] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{x^2 - 4x + 4}{x - 4} - x \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4}{x - 4} = 0.$$

Άρα, η ευθεία με εξίσωση  $y = x + 0 = x$  είναι πλάγια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της  $f$  στο  $+\infty$ . Εργαζόμενοι εντελώς όμοια βρίσκουμε ότι η ίδια ευθεία είναι πλάγια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της  $f$  στο  $-\infty$ .



- (17) Να βρείτε τις τιμές των σταθερών  $\alpha$  και  $\beta$  ώστε η γραφική παράσταση της συνάρτησης  $y = \alpha x^2 + \beta \ln x$  να έχει σημείο καμπής το  $(1, \frac{1}{2})$ .

**Απάντηση.**

Αν η γραφική παράσταση της παραγωγίσιμης συνάρτησης  $y = f(x) = \alpha x^2 + \beta \ln x$  έχει σημείο καμπής το  $(1, \frac{1}{2})$ , τότε  $f''(1) = 0$ .

Είναι για κάθε  $x > 0$ ,

$$\begin{aligned} f(x) = \alpha x^2 + \beta \ln x &\Rightarrow f'(x) = 2\alpha x + \frac{1}{x} \cdot \beta \\ &\Rightarrow f''(x) = 2\alpha - \frac{1}{x^2} \cdot \beta. \end{aligned}$$

Άρα,

$$f''(1) = 0 \Leftrightarrow 2\alpha = \beta.$$

Επίσης,

$$f(1) = \frac{1}{2} \Rightarrow \alpha \cdot 1^2 + \beta \ln 1 = \frac{1}{2} \Rightarrow \boxed{\alpha = \frac{1}{2}}.$$

Άρα,

$$\boxed{\beta = 2\alpha = 1}.$$

- (18) (i) Να δώσετε τον ορισμό της οριζόντιας ασύμπτωτης.  
 (ii) Να βρείτε την οριζόντια ασύμπτωτη, αν υπάρχει, της συνάρτησης

$$y = f(x) = (x - 3)e^{1-x}.$$

**Απάντηση.**

- (i) (δες: τεύχος Α-75)

**Ορισμός**

Δίνεται η συνάρτηση  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  όπου το  $A$  περιέχει ένα τουλάχιστον διάστημα της μορφής  $(a, +\infty)$  ή διάστημα της μορφής  $(-\infty, a)$ ,  $a \in \mathbb{R}$ .

Τότε αν  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = b \in \mathbb{R}$  (αντιστοίχως  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = b \in \mathbb{R}$ ), η ευθεία  $y = b$  λέγεται **οριζόντια ασύμπτωτη** της γραφικής παράστασης της  $f$  στο  $+\infty$  (αντιστοίχως στο  $-\infty$ ).

- (ii) Έχουμε:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x - 3)e^{1-x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x - 3}{e^{x-1}}$$

το οποίο αποτελεί απροσδιόριστη μορφή τύπου  $+\infty/\infty$ , αφού:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x - 3) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{x-1} = e^{x \rightarrow +\infty} (x - 1) = +\infty.$$

Είναι

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x - 3)'}{(e^{x-1})'} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^{x-1}} = 0,$$

αφού

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{x-1} = +\infty.$$

Άρα, από κανόνα του De L Hopital,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{x-1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x - 3)'}{(e^{x-1})'} = 0$$

και έτσι, η ευθεία  $y = 0$ , δηλαδή ο άξονας των  $x$  είναι οριζόντια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της  $f$  στο  $+\infty$ .

Τώρα,

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x - 3)e^{1-x} = (-\infty) \cdot (+\infty) = -\infty$$

και άρα η γραφική παράσταση της  $f$  δεν έχει οριζόντια ασύμπτωτη στο  $-\infty$ . ◀