ΠΑΓΚΥΠΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ 2020 - **Β΄ ΣΕΙΡΑ**

[ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ - 37]

15 Ιουνίου 2020

-ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΛΥΣΕΙΣ-[1]

[1] Επιμέλεια: Γιάννης Ιωακείμ/Διορίσιμος εκπαιδευτικός | Αρχείο: https://ioakimioannis.com/pagypries/
Σημείωση: Οι προσθήκες με κόκκινο στις εκφωνήσεις των ασκήσεων είναι δικές μου.

¨Τάς επιδόσεις όρώμεν γινομένας καὶ τῶν τεχνῶν,
καὶ τῶν ἄλλων ἀπάντων, οὐ διὰ τοὺς ἐμμένοντας
τοῖς καθεστῶσιν, ἀλλὰ διὰ τοὺς επανορθοῦντας
καὶ τολμῶντας ἀεί τι κινεῖν τῶν μὴ καλῶς ἐχόντων.¨

-Ισοκράτους *«Εὐαγόρας»*

Ευαγόρας (βασιλιάς της Σαλαμίνας της Κύπρου από το 391 ως το 374 π.Χ.)

Το πιο πάνω απόσπασμα συναντάται στο βιβλίο του
Bernard Bolzano, *Betrachtungen über einige Gegenstände der Elementargeometrie, Prag, 1804* (Σκέψεις πάνω σε στοιχειώδη Γεωμετρικά θέματα, Πράγα, 1804).

Μέρος Α

Α1.
Να βρείτε το ολοκλήρωμα:
$$\int \left(5 + 3x^2 - \text{συν}x\right)\, dx.$$

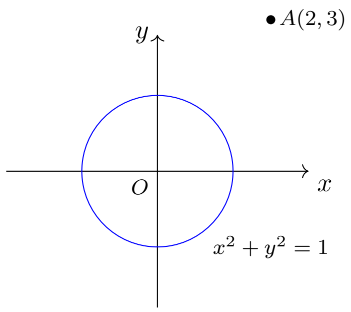
Απάντηση

$$\begin{aligned}\int \left(5 + 3x^2 - \text{συν}x\right)\, dx &= 5\int dx + \int 3x^2\, dx - \int \text{συν}x\, dx \\ &= 5x + x^3 - \text{ημ}x + c. \qquad \blacksquare\end{aligned}$$

Α2.
Να βρείτε τη θέση του σημείου $A(2,3)$ ως προς τον κύκλο $(C):\ x^2 + y^2 = 1$.

Απάντηση

$(C):\ x^2 + y^2 = 1 \Leftrightarrow (C):\ x^2 + y^2 - 1 = 0$. Για $x = 1,\ y = 3$ έχουμε $1^2 + 3^2 - 1 = 9 > 0$ και άρα το σημείο $A(2,3)$ βρίσκεται έξω από τον κύκλο (C).



$\blacksquare$

Α3.
Να υπολογίσετε το όριο $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\text{τοξημ}x}{e^{2x} - 1}$.

Απάντηση

Είναι $\displaystyle\lim_{x\to 0} \text{τοξημ}x = \text{τοξημ}0 = 0$ (αφού $\text{ημ}0 = 0$) και $\displaystyle\lim_{x\to 0}(e^{2x} - 1) = e^0 - 1 = 1 - 1 = 0$.
Συνεπώς, το όριο $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\text{τοξημ}x}{e^{2x} - 1}$ αποτελεί απροσδιοριστία τύπου $0/0$.
Έχουμε

$$\lim_{x\to 0} \frac{(\text{τοξημ}x)'}{(e^{2x} - 1)'} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}{2e^{2x}} = \frac{1}{2}\lim_{x\to 0} \frac{1}{e^{2x}\sqrt{1 - x^2}} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{e^0\sqrt{1 - 0^2}} = \frac{1}{2}.$$

Άρα, από κανόνα του L'Hopital,

$$\lim_{x\to 0} \frac{\text{τοξημ}x}{e^{2x} - 1} = \lim_{x\to 0} \frac{(\text{τοξημ}x)'}{(e^{2x} - 1)'} = \frac{1}{2}.$$

$\blacksquare$

A4.
Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου που διέρχεται από τα σημεία $(5, 0)$ και $(3, 4)$ και το κέντρο του είναι σημείο της ευθείας $x + y = 3$.

Απάντηση

Έστω $K(a, b)$ και $R > 0$ το κέντρο και η ακτίνα αντίστοιχα του ζητούμενου κύκλου.
Τότε, η εξίσωση του κύκλου που ψάχνουμε είναι η

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2.$$

Αφού το κέντρο του κύκλου είναι σημείο της ευθείας $x + y = 3$, οι συντεταγμένες του κέντρου θα επαληθεύουν την εξίσωση της ευθείας: $b = 3 - a$.
Αντικαθιστούμε τις συντεταγμένες του σημείου $(5, 0)$ στην εξίσωση του κύκλου και παίρνουμε $(5-a)^2+b^2 = R^2 \overset{b=3-a}{=} (5 - a)^2 + (3 - a)^2 = R^2$, δηλαδή

$$(3 - a)^2 = R^2 - (5 - a)^2. \quad (1)$$

Αντικαθιστούμε τις συντεταγμένες του σημείου $(3, 4)$ στην εξίσωση του κύκλου και παίρνουμε $(3-a)^2+(4-b)^2 = R^2 \overset{b=3-a}{=} (3 - a)^2 + (1 + a)^2 = R^2$, δηλαδή

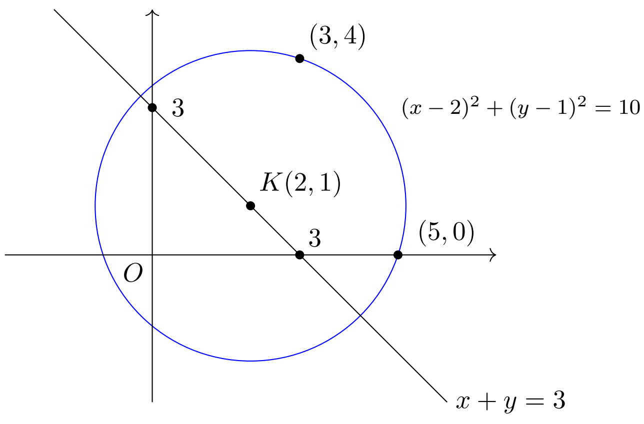
$$(3 - a)^2 = R^2 - (1 + a)^2. \quad (2)$$

Εξισώνοντας τις (1) και (2) παίρνουμε

$$R^2 - (5 - a)^2 = R^2 - (1 + a)^2 \Rightarrow (5 - a)^2 = (1 + a)^2 \Rightarrow 25 + 10a + a^2 = 1 + 2a + a^2 \Rightarrow \boxed{a = 2}.$$

Τότε $\boxed{b = 3 - a = 1}$ και τέλος, αντικαθιστώντας σε μία από τις (1) ή (2) παίρνουμε $R^2 = 10$.
Άρα, η εξίσωση του ζητούμενου κύκλου είναι η

$$(x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 10.$$



■

A5.
Να βρείτε την εξίσωση της καμπύλης πάνω στην οποία βρίσκεται ο γεωμετρικός τόπος των σημείων του επιπέδου, τα οποία απέχουν ίση απόσταση από σταθερό σημείο $E(2, 0)$ και σταθερή ευθεία $(\delta) : x = -2$.

Απάντηση

Έστω $T(x,y)$ τυχόν σημείο στο ζητούμενο γεωμετρικό τόπο και έστω Δ η προβολή του στην ευθεία $(\delta):\ x=-2$. Τότε

$$\begin{aligned}(TE)=(T\Delta) &\Leftrightarrow \sqrt{(x-2)^2+(y-0)^2}=|x-(-2)|\\ &\Leftrightarrow (x-2)^2+y^2=(x+2)^2\\ &\Leftrightarrow x^2-4x+4+y^2=x^2+4x+4\\ &\Leftrightarrow y^2=8x,\end{aligned}$$

δηλαδή **παραβολή** με εστία το σημείο $E(2,0)$ και διευθετούσα την $(\delta):\ x=-2$. ■

A6.
Χρησιμοποιώντας την αντικατάσταση $t=$ εφ$\left(\frac{x}{2}\right)$, να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\displaystyle\int \frac{1}{5+3\text{συν}x}\,dx,\ x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$.

Απάντηση

$t=$ εφ$\left(\frac{x}{2}\right)\Leftrightarrow \frac{x}{2}=$ τοξεφt και άρα

$$\frac{1}{2}dx=\frac{1}{1+t^2}dt.$$

Είναι (δες τυπολόγιο) συν$x=\dfrac{1-\text{εφ}^2(x/2)}{1+\text{εφ}^2(x/2)}=\dfrac{1-t^2}{1+t^2}$.

Συνεπώς,

$$\begin{aligned}\int\frac{1}{5+3\text{συν}x}\,dx &= 2\int\frac{1}{5+3\cdot\frac{1-t^2}{1+t^2}}\cdot\frac{1}{1+t^2}\,dt\\ &= 2\int\frac{dt}{5(1+t^2)+3(1+t^2)\cdot\frac{1-t^2}{1+t^2}}\\ &= 2\int\frac{dt}{5(1+t^2)+3(1-t^2)}\\ &= 2\int\frac{dt}{2t^2+8}=\int\frac{1}{t^2+4}\,dt\end{aligned}$$

Είναι $\displaystyle\int\frac{1}{t^2+4}\,dt=\frac{1}{4}\int\frac{1}{\left(\frac{t}{2}\right)^2+1}\,dt$ και χρησιμοποιώντας την αντικατάσταση $u=\frac{t}{2},\quad 2du=dt$, το πιο πάνω γίνεται

$$\frac{1}{2}\int\frac{1}{1+u^2}\,du=\frac{1}{2}\text{τοξεφ}u+c=\frac{1}{2}\text{τοξεφ}\left(\frac{t}{2}\right)+c.$$

Συνεπώς,

$$\int\frac{1}{5+3\text{συν}x}\,dx = \frac{1}{2}\text{τοξεφ}\left(\frac{1}{2}\text{εφ}\left(\frac{x}{2}\right)\right)+c.$$

■

A7.
Αν για τη συνάρτηση f ισχύει $f''(x)=4x^3+2x,\ \forall x\in\mathbb{R}$ και $f'(1)=4$, να δείξετε ότι η συνάρτηση δεν έχει ακρότατα.

Απάντηση

$$f''(x) = 4x^3 + 2x,\ \forall x \in \mathbb{R} \quad \Rightarrow \quad \int f''(x)\,dx = \int (4x^3 + 2x)\,dx$$
$$\Rightarrow \quad f'(x) = x^4 + x^2 + c,\ \forall x \in \mathbb{R},$$

όπου c πραγματική σταθερά. Αλλά από την αρχική συνθήκη που μας δίνεται ($f'(1) = 4$) παίρνουμε $4 = 1 + 2 + c \Rightarrow c = 2$ και άρα

$$f'(x) = x^4 + x^2 + 2,\ \forall x \in \mathbb{R}$$

και άρα $f'(x) > 0,\ \forall x \in \mathbb{R}$ συνεπώς η f είναι **γνησίως αύξουσα** συνάρτηση, άρα δεν έχει ακρότατα. ■

Α8.
(α) Να δώσετε τον ορισμό της πλάγιας ασύμπτωτης της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης f στο $+\infty$.
(β) Αν η ευθεία $y = -x + 2$ είναι η πλάγια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο $+\infty$ και η ευθεία $y = 7$ είναι η οριζόντια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης g στο $+\infty$, να δείξετε ότι η γραφική παράσταση της $h(x) = \dfrac{f(x) + x \cdot g(x)}{x \cdot f(x) + x^2}$ έχει οριζόντια ασύμπτωτη την ευθεία $y = 3$ στο $+\infty$.

Απάντηση

(α) **Σημείωση:** Δεν είναι σωστό να ρωτάμε για 'ορισμό πλάγιας ασύμπτωτης' της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης f είτε στο $+\infty$, είτε στο $-\infty$. Νόημα έχει να ρωτάμε: πότε μια ευθεία λέγεται πλάγια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο $+\infty$.
Η ευθεία με εξίσωση $y = \lambda x + b$, όπου $\lambda \in \mathbb{R},\ \lambda \neq 0$ λέγεται πλάγια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης f στο $+\infty$ αν $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x) - (\lambda x + b)] = 0$.

(β) Η ευθεία $y = -x + 2$ είναι η πλάγια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο $+\infty \Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty}[f(x) - (-x + 2)] = 0 \Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty}(f(x) + x - 2) = 0 \Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty}(f(x) + x) = 2$
και
η ευθεία $y = -x + 2$ είναι η οριζόντια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης g στο $+\infty \Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 7$.
Έχουμε:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to+\infty} h(x) &= \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x) + x \cdot g(x)}{x \cdot f(x) + x^2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x) + x \cdot g(x)}{x(f(x) + x)} \\
&= \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x) {\color{red}+x-x} + x \cdot g(x)}{x(f(x) + x)} \\
&= \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{f(x) + x}{x(f(x) + x)} + \frac{x(g(x) - 1)}{x(f(x) + x)} \right) \\
&= \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{1}{x} + \frac{g(x) - 1}{f(x) + x} \right).
\end{aligned}$$

Αλλά,

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$$

και

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{g(x) - 1}{f(x) + x} = \frac{\lim\limits_{x\to+\infty}(g(x) - 1)}{\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x) + x)} = \frac{\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) - 1}{\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x) + x)} = \frac{7 - 1}{2} = 3.$$

Συνεπώς, $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = 3$ και άρα η ευθεία $y = 3$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης h στο $+\infty$. ■

Α9.
Δίνεται η παραβολή $y^2 = 8x$ με εστία E. Η εφαπτομένη της παραβολής στο σημείο της $A(2t^2, 4t),\ t \neq 0$ τέμνει τον άξονα των τεταγμένων στο σημείο B και τον άξονα των τετμημένων στο σημείο Γ. Η ευθεία που περνά από το σημείο A και είναι παράλληλη με τον άξονα της παραβολής συναντά την διευθετούσα της παραβολής στο σημείο T.
Να δείξετε ότι:

(α) το σημείο B είναι το μέσο του ευθυγράμμου τμήματος TE
(β) το τετράπλευρο $AE\Gamma T$ είναι ρόμβος.

Απάντηση

Εύρεση της εξίσωσης της εφαπτομένης της παραβολής στο A :
$y^2 = 8x \Rightarrow 2yy' = 8 \Rightarrow y' = \frac{2}{y}\ \ (y \neq 0)$
και άρα

$$\lambda_{\text{εφ.}}(A) = \frac{2}{y_A} = \frac{4}{4t} = \frac{1}{t}.$$

Συνεπώς,

$$(\text{εφ.}):\ y - 4t = \frac{1}{t}(x - 2t^2) \Leftrightarrow (\text{εφ.}):\ ty - x = 2t^2.$$

Για $x = 0$ στην πιο πάνω εξίσωση βρίσκουμε $y = 2t$ και άρα $\boxed{B\,(0, 2t)}$ και για $y = 0$ βρίσκουμε $x = -2t^2$ και άρα $\boxed{\Gamma\left(-2t^2, 0\right)}$.
Επίσης, αφού η ευθεία που περνά από το σημείο A είναι παράλληλη με τον άξονα των τετμημένων, έχουμε ότι $y_T = y_A = 4t$ και αφού το σημείο T ανήκει στη διεθυετούσα $(\delta):\ x = -2$ της παραβολής, έχουμε ότι $x_T = -2$. Άρα $\boxed{T\,(-2, 4t)}$.

(α) Έχουμε

$$\frac{x_T + x_E}{2} = \frac{-2+2}{2} = 0 = x_B$$

και

$$\frac{y_T + y_E}{2} = \frac{0+4t}{2} = 2t = y_B$$

και άρα το σημείο B είναι το μέσο του ευθυγράμμου τμήματος TE.

(β) Έχουμε

$$\frac{x_A + x_\Gamma}{2} = \frac{2t^2 - 2t^2}{2} = 0 = x_B$$

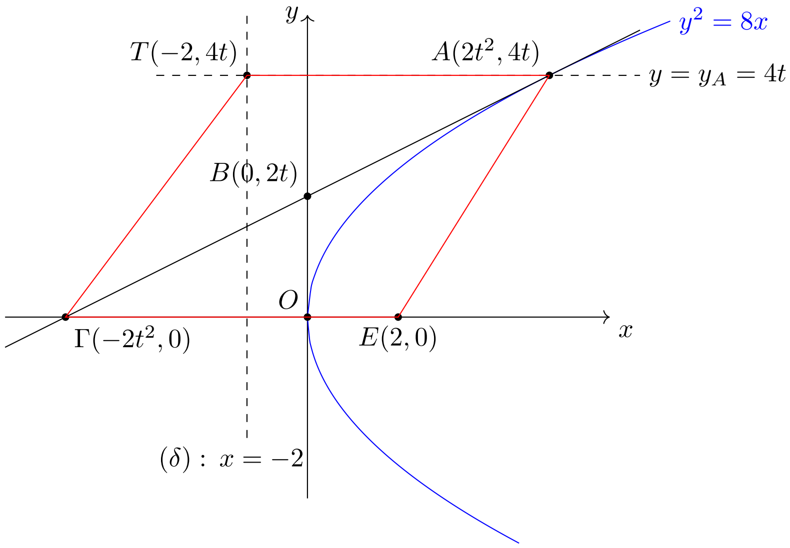
και

$$\frac{y_A + y_\Gamma}{2} = \frac{4t+0}{2} = 2t = y_B$$

και άρα το σημείο B είναι το μέσο του ευθυγράμμου τμήματος $A\Gamma$.
Συνεπώς, οι διαγώνιοι του τετραπλεύρου $AE\Gamma T$ διχοτομούνται, άρα αυτό είναι **παραλληλόγραμμο**.
Τώρα,

$$\lambda_{TE}\cdot\lambda_{A\Gamma} = \frac{0-4t}{2+2}\cdot\frac{0-4t}{-2t^2-2t^2} = \frac{-4t}{4}\cdot\frac{-4t}{-4t^2} = -1 \Rightarrow TE \perp A\Gamma,$$

άρα **οι διαγώνιοι του τετραπλεύρου** $AE\Gamma T$ **τέμνονται κάθετα**.
Συνεπώς, το τετράπλευρο $AE\Gamma T$ είναι ρόμβος.



■

A10.
Δίνεται η συνάρτηση $g(x)=xe^{-\frac{1}{x}},\ x>0.$

(α) Να μελετήσετε την g ως προς τη κυρτότητα και τα σημεία καμπής.
(β) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της g στο σημείο της $(1,g(1))$.
(Γ) Να αποδείξετε ότι $xe^{1-\frac{1}{x}}\geq 2x-1,\ \ \forall x>0.$

Απάντηση

Το πεδίο ορισμού της g είναι το διάστημα $(0,+\infty)$.

(α) Η g είναι δύο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση. Έχουμε για $x>0$:

$$\begin{aligned} g'(x) &= (xe^{-\frac{1}{x}})' = (x)'\cdot e^{-\frac{1}{x}}+x\cdot(e^{-\frac{1}{x}})' \\ &= e^{-\frac{1}{x}}+x\cdot\left(-\frac{1}{x}\right)'\cdot e^{-\frac{1}{x}} \\ &= e^{-\frac{1}{x}}+x\cdot\frac{1}{x^2}\cdot e^{-\frac{1}{x}} \\ &= e^{-\frac{1}{x}}\left(1+\frac{1}{x}\right) \end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned} g''(x) &= \left(e^{-\frac{1}{x}}\left(1+\frac{1}{x}\right)\right)' = \left(e^{-\frac{1}{x}}\right)'\cdot\left(1+\frac{1}{x}\right)+e^{-\frac{1}{x}}\cdot\left(1+\frac{1}{x}\right)' \\ &= \frac{1}{x^2}e^{-\frac{1}{x}}\cdot\left(1+\frac{1}{x}\right)+e^{-\frac{1}{x}}\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right) \\ &= \frac{1}{x^3}e^{-\frac{1}{x}}. \end{aligned}$$

Αλλά, $x>0\Rightarrow x^3>0$ και $e^{-\frac{1}{x}}>0$, συνεπώς, $g''(x)>0,\ \forall x>0$, άρα η g είναι **παντού κυρτή συνάρτηση**, άρα **δεν έχει σημεία καμπής**.

(β) Είναι $g(1) = \frac{1}{e}$. Η κλίση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της g στο σημείο της $(1, 1/e)$ είναι $g'(1) = e^{-1}(1+1) = \frac{2}{e}$. Συνεπώς, η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της g στο σημείο αυτό είναι η $y - \frac{1}{e} = \frac{2}{e}(x-1)$, δηλαδή η

$$y = \frac{1}{e}(2x-1).$$

(γ) Αφού η g είναι κυρτή, η εφαπτομένη της γραφική της παράστασης στο σημείο $(1, 1/e)$ είναι 'κάτω' από τη γραφική της παράσταση και την οποία αγγίζει σε ένα και μόνο σημείο, στο $(1, 1/e)$, υπο την εξής έννοια:

$$xe^{-\frac{1}{x}} \geq \frac{2}{e}(x-1),\ \forall x > 0,$$

δηλαδή

$$exe^{-\frac{1}{x}} \geq 2x-1,\ \forall x > 0,$$

δηλαδή

$$xe^{1-\frac{1}{x}} \geq 2x-1,\ \ \forall x > 0$$

με την ισότητα μόνο για $x = 1$.

Εναλλακτικά, θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = g(x) - \frac{2}{e}(x-1),\ x > 0$ και δείχνουμε ότι έχει ολικό ελάχιστο στο $x = 1$, άρα $f(x) \geq f(1) = 0,\ \forall x > 0$ και το συμπέρασμα έπεται. ■

-ΤΕΛΟΣ Α ΜΕΡΟΥΣ-

Μέρος Β

Β1.
Δίνεται η εξίσωση $C:\ x^2+y^2-2\lambda x-2(\lambda-1)y+2-\lambda=0,\ \ \lambda\in\mathbb{R}$.
(α) Να βρείτε για ποιές τιμές του λ η εξίσωση C παριστάνει κύκλο.
(β) Να βρείτε την εξίσωση της καμπύλης στην οποία ανήκει ο γεωμετρικός τόπος των κέντρων των κύκλων C.

Απάντηση

Είναι $-2\lambda=2g\Rightarrow g=-\lambda,\ \ -2(\lambda-1)=2f\Rightarrow f=1-\lambda$ και $c=2\lambda$.

(α) Η εξίσωση C παριστάνει κύκλο $\Leftrightarrow g^2+f^2-c>0\Leftrightarrow \lambda^2+(1-\lambda)^2+\lambda-2>0\Leftrightarrow 2\lambda^2-\lambda-1>0\Leftrightarrow(2\lambda+1)(\lambda-1)>0$.
Από τον πίνακα προσήμου του τριωνύμου $(2\lambda+1)(\lambda-1)$ βρίσκουμε ότι

$$(2\lambda+1)(\lambda-1)>0\Leftrightarrow\lambda\in(-\infty,-1/2)\cup(1,+\infty).$$

(β) Για τις τιμές του λ που βρήκαμε στο προηγούμενο ερώτημα, η εξίσωση C παριστάνει κύκλο με κέντρο το σημείο $K(-g,-f)=K(\lambda,\lambda-1)$.
Για τα σημεία αυτά, έχουμε $x_K=\lambda,\ \ y_K=\lambda-1$ και άρα $y_k=x_K-1$.
΄Αρα, τα κέντρα των κύκλων βρίσκονται πάνω στην ευθεία με εξίσωση $y=x-1,\ x\in(-\infty,-1/2)\cup(1,+\infty)$.
Αλλά και αντίστροφα, αν το σημείο $A(a,b)$ βρίσκεται πάνω στην ευθεία με εξίσωση $y=x-1,\ x\in\in(-\infty,-1/2)\cup(1,+\infty)$, δηλαδή $A(a,a-1),\ a$
$in(-\infty,-1/2)\cup(1,+\infty)$ τότε αυτό αποτελεί κέντρο του κύκλου C.
Συνεπώς, ο γεωμετρικός τόπος που ψάχνουμε είναι συνάρτηση $f(x)=x-1,\ x\in(-\infty,-1/2)\cup(1,+\infty)$.
■

Β2.
(α) Να διατυπώσετε το Θεώρημα μέσης τιμής (του Διαφορικού Λογισμού) και να δώσετε τη γεωμετρική του ερμηνεία.
(β) Χρησιμοποιώντας το πιο πάνω Θεώρημα και με επιλογή της κατάλληλης συνάρτησης η οποία ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του πιο πάνω Θεωρήματος, να αποδείξετε την ανισότητα:

$$(\beta-a)\text{τεμ}^2 a<\text{εφ}\beta-\text{εφ}a<(\beta-a)\text{τεμ}^2\beta,$$

$\forall a,\beta\in\mathbb{R}$ με $0<a<\beta<\frac{\pi}{2}$.

Απάντηση

(α) Θεώρημα μέσης τιμής του Διαφορικού Λογισμού (Lagrange)-Διατύπωση:
Έστω f μια συνάρτηση συνεχής σε ένα (κλειστό) διάστημα $[a,\beta]$ και παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του, δηλαδή στο (a,β). Τότε, υπάρχει (αριθμός) $\xi\in(a,\beta)$ τέτοιος ώστε

$$f'(\xi)=\frac{f(\beta)-f(a)}{\beta-a}.$$

Γεωμετρική ερμηνεία:
Αν για τη συνάρτηση $f:[a,\beta]\to\mathbb{R}$ ικανοποιούνται οι υποθέσεις του Θεωρήματος Μέσης Τιμής του Διαφορικού Λογισμού, τότε υπάρχει τουλάχιστον ένας αριθμός $\xi\in(a,\beta)$ για τον οποίο η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $(\xi,f(\xi))$ είναι παράλληλη με την ευθεία που διέρχεται από τα σημεία $(a,f(a))$ και $(\beta,f(\beta))$.

(β) Θεωρούμε τη συνάρτηση $f:[0,\pi/2]\to\mathbb{R}$ με τύπο $f(x)=\text{εφ}x$.
Ξέρουμε ότι η f είναι συνεχής συνάρτηση και παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του πεδίου ορισμού της, δηλαδή

στο διάστημα $(0, \pi/2)$ με $f'(x) = \text{τεμ}^2 x$.
Έστω τώρα $a, \beta \in (0, \pi/2)$ με $a < \beta$, δηλαδή $0 < a < \beta < \frac{\pi}{2}$.
Ικανοποιούνται οι υποθέσεις του Θεωρήματος της μέσης τιμής του Διαφορικού Λογισμού για την f στο διάστημα (a, β) :

$$\exists\, \xi \in (a, \beta) \ : \ f'(\xi) = \frac{f(\beta) - f(a)}{\beta - a},$$

$$\exists\, \xi \in (a, \beta) \ : \ \text{τεμ}^2(\xi) = \frac{\text{εφ}(\beta) - \text{εφ}(a)}{\beta - a}.$$

Τώρα, αφού $a < \xi < \beta$ και η συνάρτηση $g(x) = \text{συν}x$ είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(a, \beta) \subset (0, \pi/2)$, έχουμε ότι $0 < \text{συν}\beta < \text{συν}\xi < \text{συν}a \Rightarrow \frac{1}{\text{συν}a} < \frac{1}{\text{συν}\xi} < \frac{1}{\text{συν}\beta}$, δηλαδή $\text{τεμ}a < \text{τεμ}\xi < \text{τεμ}\beta$, άρα $\text{τεμ}^2 a < \text{τεμ}^2\xi < \text{τεμ}^2\beta$.
Από τα πιο πάνω, έχουμε

$$\text{τεμ}^2 a < \frac{\text{εφ}(\beta) - \text{εφ}(a)}{\beta - a} < \text{τεμ}^2\beta$$

και αφού $\beta - a > 0$,

$$(\beta - a)\text{τεμ}^2 a < \text{εφ}\beta - \text{εφ}a < (\beta - a)\text{τεμ}^2\beta.$$

■

B3.
(α) Να αποδείξετε ότι $(\text{τοξημ}x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}, \ \forall x \in (-1, 1)$.

(β) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \text{τοξημ}x - x$.

(i) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της.

(ii) Να μελετήσετε τη συνάρτηση ως προς τη μονοτονία.

(iii) Να αποδείξετε ότι $\quad \text{τοξημ}\left(\dfrac{1}{\pi}\right) - \text{τοξημ}\left(\dfrac{1}{e}\right) < \dfrac{1}{\pi} - \dfrac{1}{e}$.

Απάντηση

(α)

$$y = \text{τοξημ}x, \ x \in [-1, 1] \iff x = \text{ημ}y, \ y \in [-\pi/2, \pi/2].$$

Αποδεικνύεται ότι

$$f'_-(1) = f'_+(-1) = +\infty$$

και άρα η f δεν είναι παραγωγίσιμη στα άκρα του πεδίου ορισμού της (παρουσιάζει κατακόρυφη εφαπτομένη στα σημεία αυτά). Στο εσωτερικό του πεδίου ορισμού της όμως είναι παραγωγίσιμη. Θα προσδιορίσουμε την παράγωγό της.

1ος τρόπος

$$y = \text{τοξημ}x, \ x \in (-1, 1) \iff x = \text{ημ}y, \ y \in (-\pi/2, \pi/2).$$

Παραγωγίζουμε πεπλεγμένα (ως προς τη μεταβλητή x):

$$\begin{aligned} x = \text{ημ}y \quad &\Rightarrow \quad \frac{dx}{dx} = \frac{d(\text{ημ}y)}{dx} \\ &\Rightarrow \quad 1 = y' \cdot \text{συν}y \\ &\Rightarrow \quad y' = \frac{1}{\text{συν}y} \quad \text{αφού } y \in (-\pi/2, \pi/2) \Rightarrow \text{συν}y > 0. \end{aligned}$$

Τώρα,

$$\text{ημ}^2 y + \text{συν}^2 y = 1 \Rightarrow \text{συν}^2 y = 1 - \text{ημ}^2 y$$

και αφού $y \in (-\pi/2, \pi/2) \Rightarrow$ συν$y > 0,$ λαμβάνουμε τη θετική ρίζα:

$$\text{συν}y = \sqrt{1 - \text{ημ}^2 y} = \sqrt{1 - x^2}.$$

Συνεπώς,

$$\boxed{y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \;\; x \in (-1, 1)}.$$

2ος τρόπος - Με χρήση του Θεωρήματος παραγώγισης αντίστροφης συνάρτησης, το οποίο διδάσκεται στη Β Λυκείου (κατεύθυνσης)

$$y = f(x) = \text{ημ}x, \;\; x \in (-\pi/2, \pi/2).$$

Η f είναι 1-1 (γνωστό), άρα αντιστρέψιμη συνάρτηση. Είναι $f'(x) = (\text{ημ}x)' = \text{συν}x,$ αφού για $x \in (-\pi/2, \pi/2) \Rightarrow$ συν$x > 0.$ και άρα

$$f'(f^{-1}(y)) = \text{συν}(f^{-1}(y)) = \sqrt{1 - \text{ημ}^2(f^{-1}(y))} = \sqrt{1 - \text{ημ}^2 x} = \sqrt{1 - y^2}$$

και άρα, από το Θεώρημα παραγώγισης αντίστροφης συνάρτησης,

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))} = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$$

δηλαδή

$$(\text{τοξημ}x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \;\; x \in (-1, 1).$$

(β) $f(x) = \text{τοξημ}x - x.$

(i) Η f είναι διαφορά δύο συναρτήσεων, των $g(x) = \text{τοξημ}x$ και $h(x) = x$. Η πρώτη έχει πεδίο ορισμού το διάστημα $[-1, 1]$ και η δεύτερη το $\mathbb{R}$. Άρα, το πεδίο ορισμού της f είναι το διάστημα $[-1, 1]$.

(ii) Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα $(-1, 1)$ με

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - 1 = \frac{1 - \sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Αφού $x \in (-1, 1) \Rightarrow 1 \geq \sqrt{1-x^2}$, με την ισότητα μόνο για $x = 0,$ έπεται ότι $f'(x) \geq 0$ με την ισότητα μόνο για $x = 0$ και άρα η f είναι γνησίως αύξουσα συνάρτηση.

(iii) Είναι $\pi > e \Rightarrow 0 < \frac{1}{\pi} < \frac{1}{e} < 1$ και αφού (προηγούμενο ερώτημα) η f είναι γνησίως αύξουσα, έπεται ότι $f\left(\frac{1}{\pi}\right) < f\left(\frac{1}{e}\right),$ δηλαδή τοξημ$\left(\frac{1}{\pi}\right) - \frac{1}{\pi} <$ τοξημ$\left(\frac{1}{e}\right) - \frac{1}{e},$ δηλαδή

$$\text{τοξημ}\left(\frac{1}{\pi}\right) - \text{τοξημ}\left(\frac{1}{e}\right) < \frac{1}{\pi} - \frac{1}{e}.$$

■

B4.

(α) Αν $I_\nu = \displaystyle\int (\ln x)^\nu \, dx$, όπου $\nu \in \mathbb{N}$, να αποδειχτεί ο αναγωγικός τύπος:

$$I_\nu = x(\ln x)^\nu - \nu I_{\nu-1}, \;\; \nu \in \mathbb{N}.$$

(β) Χρησιμοποιώντας το πιο πάνω αποτέλεσμα, να υπολογίσετε το αόριστο ολοκλήρωμα $\displaystyle\int (\ln x)^3 \, dx.$

Απάντηση

(α) Έχουμε (ολοκλήρωση κατά παράγοντες):

$$\begin{aligned} I_1 &= \int \ln x\,dx \;=\; \int x' \cdot \ln x\,dx \\ &= x\ln x - \int x(\ln x)'\,dx \\ &= x\ln x - \int x\cdot\frac{1}{x}\,dx \\ &= x\ln x - \int dx \;=\; x\ln x - x + c. \end{aligned}$$

Για $\nu \geq 1$ (ολοκλήρωση κατά παράγοντες):

$$\begin{aligned} I_\nu &= \int (\ln x)^\nu\,dx \;=\; \int x'\cdot(\ln x)^\nu\,dx \\ &= x(\ln x)^\nu - \int x[(\ln x)^\nu]'\,dx \\ &= x(\ln x)^\nu - \int x\cdot\nu\cdot(\ln x)^{\nu-1}\cdot(\ln x)'\,dx \\ &= x(\ln x)^\nu - \nu\int(\ln x)^{\nu-1}\cdot x\cdot\frac{1}{x}\,dx \\ &= x(\ln x)^\nu - \nu\underbrace{\int(\ln x)^{\nu-1}\,dx}_{=I_{\nu-1}} \\ &= x(\ln x)^\nu - \nu\cdot I_{\nu-1}. \end{aligned}$$

(β)

$$\begin{aligned} \int(\ln x)^3\,dx &= I_3 \;=\; x(\ln x)^3 - 3\cdot I_2 \\ &= x(\ln x)^3 - 3\cdot\left(x(\ln x)^2 - 2\cdot I_1\right) \\ &= x(\ln x)^3 - 3\cdot\left[x(\ln x)^2 - 2\cdot(x\ln x - x)\right] + c \\ &= x(\ln x)^3 - 3x(\ln x)^2 + 6x\ln x - 6x + c. \end{aligned}$$

■

B5.
Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = x(\ln x)^2$. Αφού βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης, τα σημεία τομής με τους άξονες των συντεταγμένων, τα διαστήματα μονοτονίας, τα τοπικά ακρότατα, τα διαστήματα στα οποία είναι κυρτή ή κοίλη, τα σημεία καμπής και τις ασύμπτωτές της, να κατασκευάσετε τη γραφική της παράσταση.

Απάντηση

Πεδίο ορισμού
Η συνάρτηση f είναι το γινόμενο των συναρτήσεων $g(x) = x$ και $h(x) = (\ln x)^2$. Η πρώτη έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ και η δεύτερη το διάστημα $(0, +\infty)$. Συνεπώς, το πεδίο ορισμού της f είναι το διάστημα $(0, +\infty)$.

Σημεία τομής με τους άξονες των συντεταγμένων
$f(x) = 0 \Leftrightarrow x(\ln x)^2 = 0 \Leftrightarrow \ln x = 0 \Leftrightarrow x = 1.$
Άρα, το μοναδικό σημείο τομής με τους άξονες των συντεταγμένων είναι το $(1, 0)$.

Διαστήματα μονοτονίας και τοπικά ακρότατα
Η f είναι παραγωγίσιμη με

$$\begin{aligned} f'(x) &= (x(\ln x)^2)' = x'(\ln x)^2 + x((\ln x)^2)' \\ &= (\ln x)^2 + 2x\ln x(\ln x)' = (\ln x)^2 + 2x\ln x \cdot \frac{1}{x} \\ &= (\ln x)^2 + 2\ln x = \ln x(\ln x + 2). \end{aligned}$$

Άρα, $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \ln x = 0$ ή $\ln x + 2 = 0$. Είναι $\ln x \Leftrightarrow x = 1$ και $\ln x + 2 = 0 \Leftrightarrow \ln x = -2 \Leftrightarrow x = e^{-2} = \frac{1}{e^2}$.
Αυτά είναι και τα κρίσιμα σημεία της f (πιθανά ακρότατα).
Είναι $f(1/e^2) = \frac{1}{e^2}(\ln(e^{-2}))^2 = \frac{1}{e^2}(-2\ln(e))^2 = \frac{4}{e^2}$ και $f(1) = 1(\ln 1)^2 = 0$.
Κάνουμε των πίνακα μεταβολών του προσήμου της f' :

x	0		$\frac{1}{e^2}$		1		$+\infty$
f'		$+$	0	$-$	0	$+$	
f		$\nearrow$	$\frac{4}{e^2}$	$\searrow$	0	$\nearrow$	

Έχουμε:
$\forall x \in (0, 1/e^2),\ f'(x) > 0 \Rightarrow f$ γνησίως αύξουσα,
$\forall x \in (1/e^2, 1),\ f'(x) < 0 \Rightarrow f$ γνησίως φθίνουσα,
$\forall x \in (1, +\infty),\ f'(x) > 0 \Rightarrow f$ γνησίως αύξουσα.

Άρα, στο σημείο $(1/e^2, f(1/e^2)) = (1/e^2, 4/e^2)$ η γραφική παράσταση της f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο και στο σημείο $(1, f(1)) = (1, 0)$ η γραφική παράσταση της f παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο.

Μελέτη κυρτότητας και εύρεση σημείων καμπής
Η f είναι δυο φορές παραγωγίσιμη με

$$\begin{aligned} f''(x) &= (\ln x(\ln x + 2))' = (\ln x)'(\ln x + 2) + \ln x(\ln x + 2)' \\ &= \frac{1}{x} \cdot (\ln x + 2) + \ln x \cdot \frac{1}{x} \\ &= \frac{2}{x}(\ln x + 1). \end{aligned}$$

Άρα, $f''(x) = 0 \Leftrightarrow \ln x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1/e$.
Έχουμε:
$\forall x \in (0, 1/e),\ f''(x) < 0 \Rightarrow f$ κοίλη (στρέφει τα κοίλα προς τα κάτω),
$\forall x \in (1/e, +\infty),\ f''(x) > 0 \Rightarrow f$ κυρτή (στρέφει τα κοίλα προς τα πάνω)
και το σημείο $(1/e, f(1/e)) = (1/e, 1/e)$ είναι **σημείο καμπής** για την f.

Εύρεση ασύμπτωτων
Η συνάρτηση f είναι συνεχής.
Ελέγχω τη συμπεριφορά της συνάρτησης στα άκρα του πεδίου ορισμού της:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} x(\ln x)^2 = +\infty,$$

αφού $\lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$ και $\lim\limits_{x\to+\infty} (\ln x)^2 = \left(\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x\right)^2 = (+\infty)^2 = +\infty$.
Επίσης,

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} x(\ln x)^2 = \lim_{x\to 0^+} \frac{(\ln x)^2}{\frac{1}{x}}$$

το οποίο είναι απροσδιόριστη μορφή τύπου $(+\infty)/(+\infty)$, αφού $\lim\limits_{x\to 0^+}(\ln x)^2 = \left(\lim\limits_{x\to 0^+}\ln x\right)^2 = (-\infty)^2 = +\infty$ και $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{x} = +\infty$.

Είναι

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{((\ln x)^2)'}{\left(\frac{1}{x}\right)'} = \lim_{x\to 0^+}\frac{2\ln x\cdot\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = 2\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{-\frac{1}{x}}$$

το οποίο είναι και πάλι απροσδιόριστη μορφή τύπου $(+\infty)/(+\infty)$.

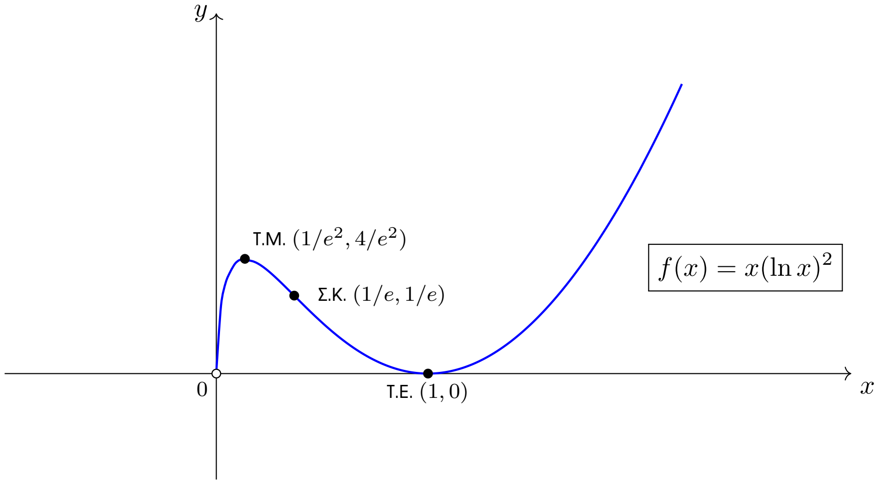
Έχουμε

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{(\ln x)'}{\left(-\frac{1}{x}\right)'} = \lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0^+} x = 0.$$

Άρα, από κανόνα του L' Hopital,

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{(\ln x)^2}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0^+}\frac{((\ln x)^2)'}{\left(\frac{1}{x}\right)'} = \lim_{x\to 0^+}\frac{((\ln x)^2)''}{\left(\frac{1}{x}\right)''} = 0.$$

Μπορούμε τώρα να χαράξουμε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f :



■

-ΤΕΛΟΣ Β ΜΕΡΟΥΣ-