ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ **Β′ ΤΕΤΡΑΜΗΝΟΥ**
[ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ - 37]
18 Μαΐου 2022
-ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΛΥΣΕΙΣ-[1]

[1]Επιμέλεια: Γιάννης Ιωακείμ/Διορίσιμος εκπαιδευτικός | Αρχείο: https://ioakimioannis.com/pagypries/

"As I’ve said before,
not every child has an equal talent
or an equal ability, or equal motivation.
But they should have the equal right
to develop their talent and their ability
and their motivation
to make something of themselves."

-John F. Kennedy’s 1963
Televised Address to the Nation on Civil Rights-

Μέρος Α΄ : Να λύσετε και τις έξι (6) ασκήσεις του Μέρους Α.
Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 5 μονάδες.

Α1.
Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα

$$\int_0^4 (x^3 + e^x - 8)\, dx.$$

Απάντηση

$$\begin{aligned}\int_0^4 (x^3 + e^x - 8)\, dx &= \left[\frac{x^4}{4} + e^x - 8x\right]_0^4 \\ &= \left(\frac{4^4}{4} + e^4 - 8 \cdot 4\right) - (0 + e^0 - 8 \cdot 0) \\ &= 4^3 + e^4 - 32 - 1 \;=\; e^4 + 31.\end{aligned}$$

■

Α2.
(α) Να δείξετε ότι $\forall \nu \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=1}^{\nu}(6k^2 - 2k) = 2\nu^2(\nu + 1).$$

(β) Να υπολογίσετε το άθροισμα

$$\sum_{k=1}^{24}(6k^2 - 2k).$$

Απάντηση

(α) Έχουμε $\forall \nu \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{\nu}(6k^2 - 2k) &= 6\sum_{k=1}^{\nu} k^2 - 2\sum_{k=1}^{\nu} k \\ &= 6 \cdot \frac{\nu(\nu+1)(2\nu+1)}{6} - 2 \cdot \frac{\nu(\nu+1)}{2} \\ &= \nu(\nu+1)(2\nu+1) - \nu(\nu+1) \\ &= \nu(\nu+1) \cdot [(2\nu+1) - 1] \\ &= \nu(\nu+1)2\nu \;=\; 2\nu^2(\nu+1).\end{aligned}$$

(β) Χρησιμοποιούμε το αποτέλεσμα του προηγούμενου ερωτήματος για $\nu = 24$:

$$\sum_{k=1}^{24}(6k^2 - 2k) \;=\; 2 \cdot 24^2(24+1) \;=\; 576 \cdot 50 \;=\; 28800.$$

■

Α3. Δίνεται η παραβολή με εξίσωση $y^2 = 8x$.

(α) Να βρείτε τις συντεταγμένες της εστίας της παραβολής και την εξίσωση της διευθετούσας της.

(β) Να βρείτε την τιμή του $c \in \mathbb{R}$ έτσι ώστε η ευθεία με εξίσωση $y = x + c$ να εφάπτεται της παραβολής.

Απάντηση

(α) $y^2 = 8x = 4ax \Leftrightarrow a = 2$ και ο άξονας της παραβολής είναι ο άξονας των τετμημένων.
Άρα, η εστία της παραβολής είναι το σημείο $E(2, 0)$ και η διευθετούσα της η $(\delta):\ x = -a$, δηλαδή η $(\delta):\ x = -2$.

(β) Έχουμε:

$$\begin{cases} y^2 = 8x \\ \\ y = x + c \end{cases} \Leftrightarrow 8x = (x+c)^2 \Leftrightarrow 8x = x^2 + 2cx + c^2$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 2(c-4)x + c^2 = 0.$$

Η πιο πάνω εξίσωση (τριώνυμο ως προς τη μεταβλητή x) έχει μοναδική λύση αν και μόνο αν η διακρίνουσά του Δ είναι ίση με 0:

$$\begin{aligned} \Delta = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad [2(c-4)]^2 - 4c^2 = 0 \Leftrightarrow 4(c^2 - 8c + 16) - 4c^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad -8c + 16 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{c = 2}\,. \end{aligned}$$

■

Α4.
(α) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f, g, όπου $f(x) = x^2,\ x \in \mathbb{R}$ και $g(x) = x + 2,\ x \in \mathbb{R}$.

(β) Να υπολογίσετε τον όγκο του στερεού που παράγεται από την πλήρη στροφή του πιο πάνω χωρίου γύρω από τον άξονα των τετμημένων.

Απάντηση

Βήμα 1: Βρίσκω τα σημεία τομής των γραφικών παραστάσεων των f και g.

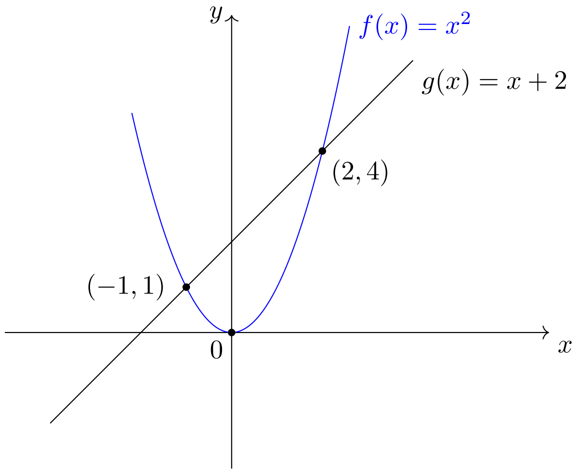
$$\begin{aligned} f(x) = g(x) \quad &\Leftrightarrow \quad x^2 = x + 2 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - x - 2 = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad (x-1)(x+2) = 0 \quad = \Leftrightarrow x = -2, \quad x = 1. \end{aligned}$$

Βήμα 2: Βρίσκω τη σχετική θέση των γραφικών παραστάσεων των f και g.

$$f(x) - g(x) = x^2 - x - 2 \leq 0, \quad \forall x \in [-2, 1]$$

και άρα η γραφική παράσταση της **παραβολής** $y = x^2$ βρίσκεται 'κάτω' από τη γραφική παράσταση της **ευθείας** $y = x + 2$.

Βήμα 3: Κάνω σχήμα με τις γραφικές παραστάσεις των f και g.



Μπορώ τώρα να απαντήσω στα δύο ερωτήματα:
(α)

$$\begin{aligned} E &= \int_{-1}^{2} (g(x) - f(x))\, dx = \int_{-1}^{2} (x + 2 - x^2)\, dx \\ &= \left[\frac{x^2}{2} + 2x - \frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{2} = \left(\frac{2^2}{2} + 2\cdot 2 - \frac{2^3}{3}\right) - \left(\frac{(-1)^2}{2} + 2\cdot(-1) - \frac{(-1)^3}{3}\right) \\ &= 6 - \frac{8}{3} - \frac{1}{2} + 2 - \frac{1}{3} = 8 - \frac{9}{3} - \frac{1}{2} = 5 - \frac{1}{2} \\ &= \frac{9}{2} \text{ τ.μ..} \end{aligned}$$

(β)

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_{-1}^{2} (g^2(x) - f^2(x))\, dx = \pi \int_{-1}^{2} [(x+2)^2 - x^4]\, dx \\ &= \pi \left[\frac{(x+2)^3}{3} - \frac{x^5}{5}\right]_{-1}^{2} = \pi\left(\frac{(2+2)^3}{3} - \frac{2^5}{5}\right) - \pi\left(\frac{(-1+2)^3}{3} - \frac{(-1)^5}{5}\right) \\ &= \pi\left(\frac{64}{3} - \frac{32}{5} - \frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) = \pi\left(\frac{63}{3} - \frac{33}{5}\right) = \frac{216\pi}{15} = \frac{72\pi}{5} \text{ κ.μ..} \end{aligned}$$

Σημείωση: Όταν περιστραφεί η γραφική παράσταση της g (γύρω από τον άξονα των τετμημένων) από $x = -1$ εως $x = 2$ σχηματίζεται ένας **κόλουρος κώνος.** ■

Α5.
Να υπολογίσετε το πλήθος των τρόπων με τους οποίους 4 διαφορετικά χρυσόψαρα μπορούν να τοποθετηθούν σε 5 αριθμημένες γυάλες $(\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3, \Gamma_4, \Gamma_5)$, αν:
(α) δεν υπάρχει κανένας περιορισμός
(β) τα 4 χρυσόψαρα θα τοποθετηθούν σε διαφορετικές γυάλες
(γ) τα 4 χρυσόψαρα θα τοποθετηθούν σε ακριβώς 3 γυάλες.

Απάντηση

Η άσκηση λύνεται με την παραδοχή ότι κάθε γυάλα χωρεί (τουλάχιστον) 4 χρυσόψαρα.
Τότε, το πρόβλημα ανάγεται στο γνωστό πρότυπο της κατανομής (διακεκριμένων) σφαιριδίων σε κελιά

απεριόριστης χωρητικότητας.
Συνεπώς:

(α) Κάθε τοποθέτηση των 4 χρυσόψαρων στις 5 γυάλες (χωρίς περιορισμό) είναι μια επαναληπτική διάταξη 5 αντικειμένων ανα 4:

$$\delta_5^4 = 5^4 = 625$$

(διαφορετικοί) τρόποι.

(β) Κάθε τοποθέτηση των 4 χρυσόψαρων σε 5 **διαφορετικές** γυάλες είναι μια απλή (:χωρίς επανάληψη) διάταξη 5 αντικειμένων ανα 4:

$$\Delta_4^5 = \frac{5!}{(5-4)!} = 5! = 120$$

(διαφορετικοί) τρόποι.

Σημείωση: Ξέρουμε ότι $\Delta_k^\nu = \binom{\nu}{k} \cdot k!$ $(\nu \geq k)$.
Στο συγκεκριμένο ερώτημα αυτό μεταφράζεται ως εξής:
Βήμα 1: Επιλογή 4 από τις 5 γυάλες: υπάρχουν $\binom{5}{4} = 5$ τρόποι.
Βήμα 2: Τοποθέτηση των 4 ψαριών στις επιλεγμένες γυάλες: είναι μεταθέσεις 4 (διαφορετικών) αντικειμένων, άρα $4! = 24$ τρόποι.
Άρα, από την **πολλαπλασιαστική αρχή**, υπάρχουν

$$\binom{5}{4} \cdot 4! = 120$$

(διαφορετικοί) τρόποι.

(γ) Κάθε τοποθέτηση των 4 χρυσόψαρων σε ακριβώς 3 γυάλες γίνεται σε 2 στάδια/βήματα:
Βήμα 1: Επιλογή 3 από τις 5 γυάλες: Υπάρχουν $\binom{5}{3}$ τρόποι.
Βήμα 2: Στη συνέχεια, τοποθετούμε τα ψάρια στις γυάλες. Αυτό γίνεται τοποθετώντας 2 ψάρια στη μια γυάλα και από ένα στις υπόλοιπες 2. Αυτό γινεται με

$$\binom{4}{2} \cdot 2 \cdot 1 + \binom{4}{1} \cdot \binom{3}{2} \cdot 1 + \binom{4}{1} \cdot 3 + \cdot 1 = 36$$

τρόπους.
Εναλλακτικά, η τοποθέτηση 2 χρυσόψαρων στη μία γυάλα και από 1 στις άλλες δύο μπορεί να γίνει και ως εξής: επιλογή 2 από τα 4 ψάρια με $\binom{4}{2}$ τρόπους και επαναληπτική μετάθεση των υπόλοιπων 3 γυαλών με $3!$ τρόπους, δηλαδή (πολλαπλασιαστική αρχή) με συνολικά $\binom{4}{2} \cdot 3! = 36$ τρόπους.

Σύμφωνα λοιπόν με την πολλαπλασιαστική αρχή, υπάρχουν συνολικά

$$\binom{5}{3} \cdot 36 = 10 \cdot 26 = 360$$

διαφορετικοί τρόποι τοποθέτησης. ■

Α6.
Δίνεται η έλλειψη με εξίσωση $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{\beta^2}=1$ με εστίες τα σημεία $E(3,0)$ και $E'(-3,0)$ και τυχαίο σημείο της $T(a\text{συν}\theta, \beta\text{ημ}\theta),\ 0<\theta<\frac{\pi}{4}$.
Η περίμετρος του τριγώνου ETE' είναι ίση με 16 μονάδες.

(α) Να βρείτε τις τιμές των a και β.

(β) Αν $a=5$ και $\beta=4$, να αποδείξετε ότι η εξίσωση της εφαπτομένης της έλλειψης στο σημείο T είναι η

$$(\epsilon):\ 4x\text{συν}\theta+5y\text{ημ}\theta=20.$$

(γ) Η εφαπτομένη (ϵ) τέμνει τον άξονα των τετμημένων στο σημείο Γ και τον άξονα των τεταγμένων στο σημείο Δ. Αν O η αρχή των αξόνων, να δείξετε ότι το εμβαδόν του τριγώνου $O\Gamma\Delta$ δίνεται από τον τύπο $E=\dfrac{20}{\text{ημ}2\theta}$.

(δ) Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου T έτσι ώστε το πιο πάνω εμβαδόν να είναι ίσο με $\frac{40}{\sqrt{3}}$ τ.μ..

Απάντηση

Αφού $0<\theta<\frac{\pi}{4}$, το σημείο T βρίσκεται στο πρώτο τεταρτημόριο.
Είναι $\gamma=3$ και αφού οι εστίες βρίσκονται στον άξονα των τετμημένων$\Rightarrow$ $a>\beta$.

(α) Τώρα,

$$\begin{aligned}\Pi_{ETE'}=16 \quad &\Rightarrow \quad \underbrace{(TE)+(TE')}_{=2a}+(EE')=16\\ &\Rightarrow \quad 2a+6=16\\ &\Rightarrow \quad \boxed{a=5}\,.\end{aligned}$$

Επίσης,

$$\gamma^2=a^2-\beta^2\Rightarrow\beta^2=a^2-\gamma^2=25-9=16.$$

Επομένως, η εξίσωση της έλλειψης είναι η

$$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1.$$

(β) Είναι $T(5\text{συν}\theta, 4\text{ημ}\theta)$.
Παραγωγίζεται πεπλεγμένα την εξίσωση της έλλειψης (ως προς τη μεταβλητή x) για να βρω την κλίση της εφαπτομένης στο σημείο της T :

$$\begin{aligned}\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1 \quad &\Rightarrow \quad \frac{2x}{25}+\frac{2yy'}{16}=0\\ &\Rightarrow \quad y'=\frac{dy}{dx}=-\frac{16x}{25y} \quad (\text{για } y\neq 0).\end{aligned}$$

Είναι $y_T=4\text{ημ}\theta\neq 0$ και άρα

$$\lambda_{\text{εφ.}}(T)=\left.\frac{dy}{dx}\right|_{\substack{x=5\text{συν}\theta\\ y=4\text{ημ}\theta}}=-\frac{16\cdot 5\text{συν}\theta}{25\cdot 4\text{ημ}\theta}=-\frac{4\text{συν}\theta}{5\text{ημ}\theta}.$$

Η εξίσωση της εφαπτομένης της έλλειψης στο σημείο T είναι η

$$\begin{aligned} y - y_T = \lambda_{\text{εφ.}}(T)\cdot(x - x_T) \quad &\Leftrightarrow \quad y - 4\text{ημ}\theta = -\frac{4\text{συν}\theta}{5\text{ημ}\theta}(x - 5\text{συν}\theta) \\ &\Leftrightarrow \quad 5\text{ημ}\theta(y - 4\text{ημ}\theta) = -4\text{συν}\theta(x - 5\text{συν}\theta) \\ &\Leftrightarrow \quad 5\text{ημ}\theta y + 4\text{συν}\theta x = 20\underbrace{\left(\text{ημ}^2\theta + \text{συν}^2\theta\right)}_{=1} \\ &\Leftrightarrow \quad \boxed{5\text{ημ}\theta y + 4\text{συν}\theta x = 20}\,. \end{aligned}$$

(γ) Θέτουμε $y = 0$ στην εξίσωση της εφαπτομένης για να βρούμε την τετμημένη του σημείου Γ :

$$4\text{συν}\theta x = 20 \Rightarrow x_\Gamma = \frac{5}{\text{συν}\theta} \Rightarrow \Gamma\left(\frac{5}{\text{συν}\theta}, 0\right)$$

και $y = 0$ στην εξίσωση της εφαπτομένης για να βρούμε την τετμημένη του σημείου Δ :

$$5\text{ημ}\theta y = 20 \Rightarrow y_\Gamma = \frac{4}{\text{ημ}\theta} \Rightarrow \Delta\left(0, \frac{4}{\text{ημ}\theta}\right).$$

Είναι $0 < \theta < \frac{\pi}{4} \Rightarrow \text{ημ}\theta > 0,\ \ \text{συν}\theta > 0$ και άρα $x_\Gamma > 0,\ y_\Delta > 0$.
Άρα, αφού το τρίγωνο ΟΔΓ είναι ορθογώνιο,

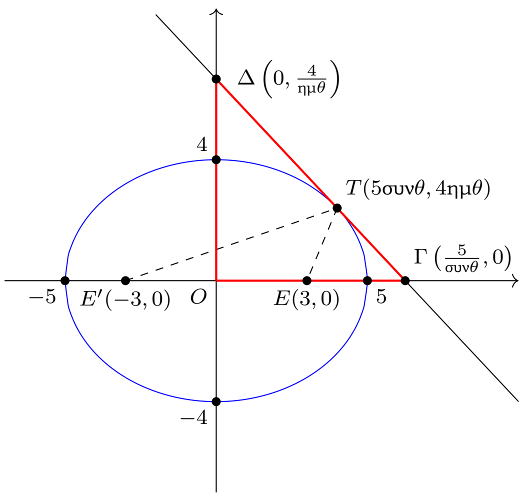
$$\begin{aligned} E_{O\Delta\Gamma} &= \frac{(\text{βάση})\cdot(\text{ύψος})}{2} = \frac{(O\Delta)\times(O\Gamma)}{2} \\ &= \frac{\frac{4}{\text{ημ}\theta}\cdot\frac{5}{\text{συν}\theta}}{2} = \frac{20}{2\text{ημ}\theta\text{συν}\theta} = \frac{20}{\text{ημ}(2\theta)} \ \text{τ.μ.}. \end{aligned}$$

(δ) Έχουμε

$$E = \frac{40}{\sqrt{3}} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{20}{\text{ημ}(2\theta)} = \frac{40}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow \text{ημ}(2\theta) = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \text{ημ}(2\theta) = \frac{\pi}{3}$$

και αφού $0 < \theta < \frac{\pi}{4} \Rightarrow 0 < 2\theta < \frac{\pi}{2}$, η πιο πάνω εξίσωση ικανοποιείται μόνο για $2\theta = \frac{\pi}{3}$, δηλαδή για $\theta = \frac{\pi}{6}$. Συνεπώς,

$$T\left(5\text{συν}(\pi/6), 4\text{ημ}(\pi/6)\right) = T\left(\frac{5\sqrt{3}}{2}, 2\right).$$



$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1.$$

■

-ΤΕΛΟΣ Α ΜΕΡΟΥΣ-

Μέρος Β΄ : Να λύσετε και τις τρείς (3) ασκήσεις του Μέρους Β.
Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 10 μονάδες.

Β1.
Δίνονται τα ολοκληρώματα

$$A = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{e^x \text{συν}x}{1+e^x}\,dx \qquad \text{και} \qquad B = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\text{συν}x}{1+e^x}\,dx.$$

(α) Χρησιμοποιώντας την αντικατάσταση $x = -u$, ή με οποιοδήποτε άλλο τρόπο, να δείξετε ότι $A = B$.
(β) Να δείξετε ότι $A + B = 2$.
(γ) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα A.

Απάντηση

(α) Θα γίνει χρήση της αντικατάστασης $x = -u \Leftrightarrow -x = u$.
Είναι $dx = -du$ και $x = -\frac{\pi}{2} \Leftrightarrow u = \frac{\pi}{2}$, $\;x = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow u = -\frac{\pi}{2}$.
Τότε

$$\begin{aligned}
A &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{e^x \text{συν}x}{1+e^x}\,dx \;=\; -\int_{\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2}} \frac{e^{-u}\text{συν}(-u)}{1+e^{-u}}\,du \\
&= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{e^{-u}\text{συν}(-u)}{1+e^{-u}}\,du \\
&\quad (x \in [-\pi/2, \pi/2] \Rightarrow \text{συν}(-u) = \text{συν}u) \\
&= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\frac{1}{e^u}\text{συν}u}{1+\frac{1}{e^u}}\,du \;=\; \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\frac{1}{e^u}\text{συν}u}{\frac{1+e^u}{e^u}}\,du \\
&= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\text{συν}u}{1+e^u}\,du \;\equiv\; \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\text{συν}x}{1+e^x}\,dx \\
&= B.
\end{aligned}$$

(β)

$$\begin{aligned}
A + B &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{e^x \text{συν}x}{1+e^x}\,dx + \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\text{συν}x}{1+e^x}\,dx \\
&= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{e^x \text{συν}x}{1+e^x} + \frac{\text{συν}x}{1+e^x}\right) dx \\
&= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{e^x \text{συν}x + \text{συν}x}{1+e^x}\,dx \\
&= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\text{συν}x \cdot (e^x + 1)}{1+e^x}\,dx \\
&= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \text{συν}x\,dx \;=\; [\text{ημ}x]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \\
&= \text{ημ}\left(\frac{\pi}{2}\right) - \text{ημ}\left(-\frac{\pi}{2}\right) \;=\; 1 - (-1) \;=\; 2.
\end{aligned}$$

(γ) Αυτό είναι πολύ εύκολο:

$$\begin{cases} A+B=2 \\ \\ A=B \end{cases} \quad \Rightarrow \quad A=B=1.$$

■

Β2.
Δίνεται το σύνολο $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$. Να υπολογίσετε το πλήθος των τριψήφιων αριθμών που μπορούν να σχηματιστούν από τα ψηφία του συνόλου Ω, χωρίς επανάληψη ψηφίου, αν αυτοί:
(α) είναι περιττοί
(β) αρχίζουν με το ψηφίο 4
(γ) είναι περιττοί και αρχίζουν με το ψηφίο 4
(δ) είναι περιττοί ή αρχίζουν με το ψηφίο 4.

Απάντηση

(α) Ένας τέτοιος τριψήφιος κατασκευάζεται σε τρία στάδια:
Στάδιο 1: Επιλογή ψηφίου μονάδων: υπάρχουν 3 επιλογές (ψηφία $1,3,5$)
Στάδιο 2: Επιλογή ψηφίου δεκάδων: υπάρχουν 5 επιλογές (αφού δεν επιτρέπονται οι επαναλήψεις)
Στάδιο 3: Επιλογή ψηφίου εκατοντάδων: υπάρχουν 4 επιλογές (αφού δεν επιτρέπονται οι επαναλήψεις)
Σύμφωνα με την **πολλαπλασιαστική αρχή**, υπάρχουν $5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$ τέτοιοι διαφορετικοί τριψήφιοι.

(β) Ένας τέτοιος τριψήφιος κατασκευάζεται σε τρία στάδια:
Στάδιο 1: Επιλογή ψηφίου εκατοντάδων: υπάρχει μόνο ένας τρόπος (το 4)
Στάδιο 2: Επιλογή ψηφίου δεκάδων: υπάρχουν 5 επιλογές (εκτός το 4)
Στάδιο 3: Επιλογή ψηφίου μονάδων: υπάρχουν 4 επιλογές (αφού δεν επιτρέπονται οι επαναλήψεις)
Σύμφωνα με την **πολλαπλασιαστική αρχή**, υπάρχουν $5 \cdot 4 \cdot 1 = 20$ τέτοιοι διαφορετικοί τριψήφιοι.

(γ) Ένας τέτοιος τριψήφιος κατασκευάζεται σε τρία στάδια:
Στάδιο 1: Επιλογή ψηφίου εκατοντάδων: υπάρχει μόνο ένας τρόπος (το 4)
Στάδιο 2: Επιλογή ψηφίου μονάδων: υπάρχουν 3 επιλογές (ψηφία $1,3,5$)
Στάδιο 3: Επιλογή ψηφίου δεκάδων: υπάρχουν 4 επιλογές (αφού δεν επιτρέπονται οι επαναλήψεις)
Σύμφωνα με την **πολλαπλασιαστική αρχή**, υπάρχουν $1 \cdot 3 \cdot 4 = 12$ τέτοιοι διαφορετικοί τριψήφιοι.

(δ) Έστω A=το σύνολο που αποτελείται από όλους τους περιττούς τριψήφιους αριθμούς που μπορούν να σχηματιστούν από τα ψηφία του συνόλου Ω και B=το σύνολο που αποτελείται από όλους τους τριψήφιους αριθμούς που μπορούν να σχηματιστούν από τα ψηφία του συνόλου Ω και αρχίζουν με το ψηφίο 4.
Τότε, το σύνολο $A \cup B$ είναι το σύνολο που αποτελείται από όλους τους τριψήφιους αριθμούς που μπορούν να σχηματιστούν από τα ψηφία του συνόλου Ω οι οποίοι είναι είτε περιττοί είτε άρτιοι.

Θα βρούμε τον πληθάριθμο $\nu(A \cup B)$ του συνόλου $A \cup B$:
(χρήση της **Αρχής Εγκλεισμού-Αποκλεισμού**)
Από το προηγούμενα ερωτήματα έχουμε ότι $\nu(A) = 60, \;\; \nu(B) = 20$ και $\nu(A \cap B) = 12$. Άρα,

$$\nu(A \cup B) \;\; = \;\; \nu(A) + \nu(B) - \nu(A \cap B) \; = \; 60 + 20 - 12 \; = \; 68.$$

■

Β3.
Δίνεται η παραβολή με εξίσωση $y^2 = 4x$ και τυχαίο σημείο της $T(t^2, 2t),\ t \neq 0$.

(α) Η ευθεία (ϵ_1) που διέρχεται από την εστία E της παραβολής και είναι κάθετη στην OT (όπου O η αρχή των αξόνων). Να δείξετε ότι η εξίσωση της ευθείας (ϵ_1) είναι η

$$(\epsilon_1):\ y = -\frac{t}{2}(x-1).$$

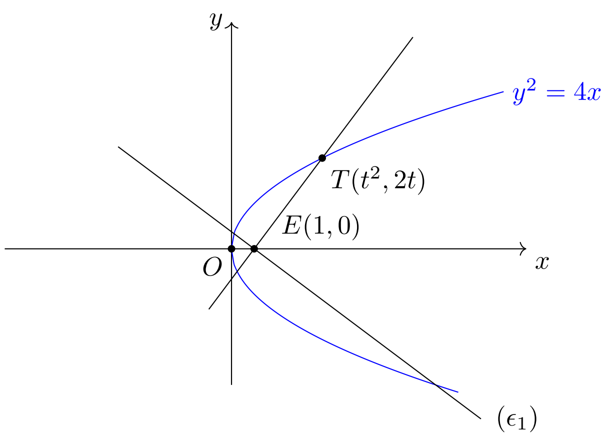
(β) Η ευθεία (ϵ_2) διέρχεται από το σημείο $A(-1, 0)$ και είναι παράλληλη με την εφαπτομένη της παραβολής στο σημείο T. Να δείξετε ότι η εξίσωση της ευθείας (ϵ_2) είναι η

$$(\epsilon_2):\ y = \frac{1}{t}(x+1).$$

(γ) Να δείξετε ότι η εξίσωση της καμπύλης πάνω στην οποία βρίσκεται ο γεωμετρικός τόπος του σημείου τομής Σ των ευθειών (ϵ_1) και (ϵ_2) είναι έλλειψη, της οποίας να βρείτε την εκκεντρότητα.

Απάντηση

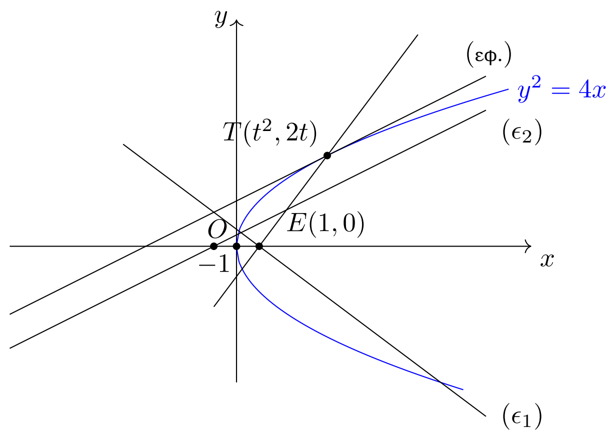
(α) $4a = 4 \Rightarrow\ a = 1 \Rightarrow\ E(1, 0)$.
Κατασκευάζω σχήμα με τα δεδομένα:



Τώρα,
$\lambda_{OT} = \dfrac{y_T}{x_T} = \dfrac{2t}{t^2} = \dfrac{2}{t}$ και άρα, αφού $(OT) \perp (\epsilon_1) \Rightarrow \lambda_{(\epsilon_1)} = -\dfrac{1}{\lambda_{OT}} = -\dfrac{t}{2}$.
Συνεπώς, η εξίσωση της ευθείας (ϵ_1) είναι η

$$y - y_E = \lambda_{(\epsilon_1)} \cdot (x - x_E) \quad \Leftrightarrow \quad y = -\frac{t}{2}(x-1)\ .$$

(β) Συμπληρώνω το σχήμα με τα νέα δεδομένα:



$(\epsilon_2) \parallel (\text{εφ.}) \Rightarrow \lambda_{(\epsilon_2)} = \lambda_{(\text{εφ.})}$.
Παραγωγίζω πεπλεγμένα την εξίσωση της παραβολής για να βρώ την κλίση της εφαπτομένης στο T :

$$y^2 = 4x \Rightarrow 2yy' = 4 \Rightarrow y' = \frac{2a}{y} \quad (y \neq 0).$$

Είναι $t \neq 0 \Rightarrow y_T \neq 0$ και άρα

$$\lambda_{\text{εφ.}}(T) \quad = \quad \left.\frac{dy}{dx}\right|_{\substack{x=t^2\\y=2t}} \quad = \quad \frac{2}{2t} = \frac{1}{t}.$$

Συνεπώς, η εξίσωση της ευθείας (ϵ_2) είναι η

$$y - y_A = \lambda_{(\epsilon_2)} \cdot (x - x_A) \quad \Leftrightarrow \quad y = \frac{1}{t}(x+1)\ .$$

(γ) Έστω $\Sigma(x_\Sigma, y_\Sigma)$ το σημείο τομής των ευθειών (ϵ_1) και (ϵ_2). Τότε

$$\begin{cases} y_\Sigma = -\dfrac{t}{2}(x_\Sigma - 1) \\ \\ y_\Sigma = \dfrac{1}{t}(x_\Sigma + 1) \end{cases} \iff \begin{cases} y_\Sigma = -\dfrac{t}{2}(x_\Sigma - 1) \\ \\ t = \dfrac{x_\Sigma + 1}{y_\Sigma} \end{cases} \iff y_\Sigma^2 = -\frac{1}{2}(x_\Sigma + 1)(x_\Sigma - 1)$$

$$\iff y_\Sigma^2 = -\frac{1}{2}(x_\Sigma^2 - 1) \iff y_\Sigma^2 + \frac{x_\Sigma^2}{2} = \frac{1}{2} \iff 2y_\Sigma^2 + x_\Sigma^2 = 1$$

$$\iff x_\Sigma^2 + \frac{y_\Sigma^2}{\frac{1}{2}} = 1.$$

Η πιο πάνω εξίσωση αναπαριστά έλλειψη με $a^2 = 1$ και $\beta^2 = \frac{1}{2}$, δηλαδή $a = 1 > \frac{\sqrt{2}}{2} = \beta$. Συνεπώς, ο μεγάλος άξονας της έλλειψης είναι ο άξονας των τετμημένων και $\gamma^2 = a^2 - \beta^2 = \frac{1}{2}$.
Τότε, η εκκεντρότητά της είναι

$$\epsilon = \frac{\gamma}{a} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

■

-ΤΕΛΟΣ Β ΜΕΡΟΥΣ-