Άσκηση 3, σελ.70

(3) Έστω $f : [0,3] \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση.
(α) Να δειχθεί ότι υπάρχει $\xi_1 \in [0,3]$ τέτοιο ώστε

$$f(\xi_1) = \frac{2f(1)+3f(2)}{5}.$$

(β) Αν επιπλέον $f(x) > 0,\ \forall x \in [0,3]$ και $f(1) \neq f(2)$, να δειχθεί ότι υπάρχει $\xi_2 \in (0,3)$ τέτοιο ώστε

$$f(\xi_2) = \sqrt{f(1)f(2)}.$$

Απάντηση

(3) **(α)** Αφού η f είναι συνεχής στο κλειστό και φραγμένο σύνολο $[0,3]$, έχουμε ότι παίρνει μέγιστη και ελάχιστη τιμή, έστω M και m αντίστοιχα, δηλαδή $m \leq f(x) \leq M,\ \forall x \in [0,3]$.
Τότε, $m \leq f(1) \leq M \Rightarrow 2m \leq 2f(1) \leq 2M$ και $m \leq f(2) \leq M \Rightarrow 3m \leq 3f(2) \leq 3M$. Προσθέτουμε κατά μέλη τις πιο πάνω και παίρνουμε

$$m \leq \frac{2f(1)+3f(2)}{5} \leq M.$$

Άρα, ο αριθμός $\dfrac{2f(1)+3f(2)}{5}$ ανήκει στο σύνολο τιμών $[m,M]$ της f και συνεπώς, από το Θεώρημα ενδιάμεσης τιμής, υπάρχει $\xi_1 \in [0,3]$ τέτοιο ώστε

$$f(\xi_1) = \frac{2f(1)+3f(2)}{5}.$$

(β) Θεωρούμε τη συνάρτηση g με τύπο

$$g(x) = f^2(x) - f(1)f(2), \quad x \in [1,3].$$

Η g είναι συνεχής στο διάστημα $[1,2]$ και

$$g(1) = f^2(1) - f(1)f(2) = f(1)(f(1)-f(2)),$$

$$g(2) = f^2(2) - f(1)f(2) = f(2)(f(2)-f(1)) = -f(2)(f(1)-f(2)).$$

Τότε

$$g(1)g(2) = -f(1)f(2)(f(1)-f(2))^2.$$

Αλλά, $f(x) > 0,\ \forall x \in [1,2]$ και άρα $g(1)g(2) \leq 0$ με την ισότητα μόνο για $f(1) = f(2)$. Η τελευταία όμως, από υπόθεση, δεν αποτελεί πιθανή περίπτωση. Συνεπώς, $g(1)g(2) < 0$ και από το Θεώρημα του Bolzano, υπάρχει $\xi_2 \in (1,2)$ τέτοιο ώστε $g(\xi_2) = 0$, δηλαδή $f^2(\xi_2) = f(1)f(2)$ και αφού $f(x) > 0,\ \forall x \in [1,2]$,

$$f(\xi_2) = \sqrt{f(1)f(2)}.$$

10) Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης είναι το $\mathbb{R}\setminus\{0\}$. Ελέγχουμε τη συμπεριφορά της συνάρτησης στα άκρα του πεδίου ορισμού της:

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-}\left(e^{1/x} - \frac{e}{x}\right) = +\infty,$$

αφού

$$\lim_{x\to 0^-} e^{1/x} = \lim_{x\to -\infty} e^{x} = 0, \qquad \lim_{x\to 0^-} \frac{e}{x} = -\infty.$$

Τώρα, $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+}\left(\dfrac{xe^{1/x} - e}{x}\right) = \left(\lim\limits_{x\to 0^+}\left(xe^{1/x} - e\right)\right)\cdot\left(\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{x}\right)$ και αφού (εφαρμογή κανόνα του De L' Hopital), $\lim\limits_{x\to 0^+} xe^{1/x} = +\infty$ αλλά και $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{x} = +\infty$, έπεται ότι $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$. Συνεπώς, το γράφημα της f **έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη τον άξονα των τεταγμένων**.
Επίσης,

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty}\left(e^{1/x} - \frac{e}{x}\right) = \lim_{x\to\pm\infty} e^{1/x} - \lim_{x\to\pm\infty}\frac{e}{x} = 1 - 0 = 1,$$

η ευθεία με εξίσωση $y = 1$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο $\pm\infty$.

11) Αφού η ευθεία με εξίσωση $y = 3x + 2$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο $+\infty$, έχουμε ότι $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x} = 3$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x) - 3x] = 2$. Τότε

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to+\infty}\frac{xf(x) - 3x^2 + 2\lambda x - 5}{\lambda f(x) - 6x + 7} = 1 \quad &\Leftrightarrow \quad \lim_{x\to+\infty}\frac{(f(x) - 3x) + 2\lambda - \dfrac{5}{x}}{\lambda\dfrac{f(x)}{x} - 6 + \dfrac{7}{x}} = 1 \\
&\Leftrightarrow \quad \frac{\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x) - 3x) + 2\lambda - \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{5}{x}}{\lambda\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x} - 6 + \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{7}{x}} = 1 \\
&\Leftrightarrow \quad \frac{2 + 2\lambda}{3\lambda - 6} = 1 \;\Leftrightarrow\; \lambda = 8.
\end{aligned}$$