



ΛΥΚΕΙΟ ΑΡΧ. ΜΑΚΑΡΙΟΥ Γ' - ΔΑΣΟΥΠΟΛΗ
ΣΧΟΛΙΚΗ ΧΡΟΝΙΑ 2022-2023

ΒΑΘΜΟΣ:

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ Β' ΤΕΤΡΑΜΗΝΟΥ

ΔΙΑΡΚΕΙΑ: 20'

ΘΕΜΑ/ΕΝΟΤΗΤΑ: ΟΡΙΖΟΥΣΕΣ-ΕΥΘΕΙΑ

ΥΠΟΓΡ. ΚΑΘΗΓ.:

ΥΠΟΓΡ. ΚΗΔΕΜ.:

ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ: 22/02/2023

ΤΜΗΜΑ: Α31

ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ: Γ. Ιωακείμ

ΟΝΟΜΑΤΕΠΩΝΥΜΟ:

Άσκηση 1

(α) Να λύσετε την πιο κάτω εξίσωση:

$$\begin{vmatrix} x-3 & 1 \\ -1 & x-1 \end{vmatrix} = 0.$$

(β) Να υπολογίσετε την πιο κάτω ορίζουσα:

$$\begin{vmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -2 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

[Μ:2.5, 2.5]

Λύση

(α)

$$\begin{vmatrix} x-3 & 1 \\ -1 & x-1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow (x-3)(x-1) - 1 \cdot (-1) = 0 \Leftrightarrow x^2 - x - 3x + 3 + 1 = 0 \\ \Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 = 0 \Leftrightarrow (x-2)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 2.$$

(β) Χρησιμοποιούμε τον κανόνα του Sarrus:

$$\begin{vmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -2 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -2 & -1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 0 \cdot (-1) \cdot 1 + 2 \cdot 1 \cdot 2 + 1 \cdot (-2) \cdot 2 - 2 \cdot (-1) \cdot 1 - 2 \cdot 1 \cdot 0 - 1 \cdot (-2) \cdot 2 \\ = 4 - 4 + 2 + 4 = 6$$

Άσκηση 2

(α) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας η οποία περνά από το σημείο $A(1, -3)$ και σχηματίζει γωνία 120° με τον άξονα των τετμημένων.

(β) Να βρεθεί η (οξεία) γωνία που σχηματίζουν οι ευθείες $(\epsilon_1): 2x - y = 3$ και $(\epsilon_2): 3x - 4y = 7$.

[Μ:2.5, 2.5]

Λύση

$$(α) \lambda = \varepsilon\varphi(120^\circ) = \varepsilon\varphi(180^\circ - 60^\circ) = -\varepsilon\varphi 60^\circ = -\sqrt{3}.$$

Άρα, η εξίσωση της ευθείας είναι:

$$\begin{aligned} y - y_A &= \lambda(x - x_A) \Leftrightarrow y - (-3) = -\sqrt{3}(x - 1) \Leftrightarrow y + 3 = -\sqrt{3}x + \sqrt{3} \\ &\Leftrightarrow y + \sqrt{3}x + 3 - \sqrt{3} = 0 \end{aligned}$$

$$(β) \lambda_{\varepsilon_1} = -\frac{A}{B} = 2 \text{ και } \lambda_{\varepsilon_2} = -\frac{A}{B} = \frac{3}{4}$$

Υπολογίζουμε:

$$\varepsilon\varphi\hat{\omega} = \left| \frac{\lambda_{\varepsilon_2} - \lambda_{\varepsilon_1}}{1 + \lambda_{\varepsilon_1}\lambda_{\varepsilon_2}} \right| = \left| \frac{\frac{3}{4} - 2}{1 + 2 \cdot \frac{3}{4}} \right| = \left| \frac{\frac{3-8}{4}}{\frac{6+4}{4}} \right| = \left| -\frac{5}{10} \right| = \left| -\frac{1}{2} \right| = \frac{1}{2} \Rightarrow \hat{\omega} \approx 26.57^\circ$$

Άσκηση 3

Δίνονται τα σημεία $A(-2,3)$, $B(4,5)$ και $\Gamma(3,8)$.

(α) Αποδείξτε ότι τα σημεία A, B και Γ δεν είναι συνευθειακά.

(β) Αποδείξτε ότι το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ορθογώνιο.

(γ) Βρείτε την εξίσωση της πλευράς AG .

(δ) Βρείτε την εξίσωση του ύψους BD .

[M:1,1,2,1]

Λύση

(α) Έχουμε (ανάπτυγμα ως προς την 1η γραμμή):

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 4 & 5 & 1 \\ 3 & 8 & 1 \end{vmatrix} &= -2 \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 8 & 1 \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 3 & 8 \end{vmatrix} \\ &= -2(5-8) - 3(4-3) + (32-15) = 20 \neq 0 \end{aligned}$$

και άρα τα σημεία δεν είναι συνευθειακά.

(β) Βρίσκουμε τις κλίσεις των πλευρών του τριγώνου:

$$\lambda_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{5 - 3}{4 + 2} = \frac{1}{3},$$

$$\lambda_{B\Gamma} = \frac{y_\Gamma - y_B}{x_\Gamma - x_B} = \frac{8 - 5}{3 - 4} = -3$$

$$\lambda_{A\Gamma} = \frac{y_\Gamma - y_A}{x_\Gamma - x_A} = \frac{8 - 3}{3 + 2} = 1$$

Παρατηρούμε ότι $\lambda_{AB} \cdot \lambda_{B\Gamma} = -1 \Rightarrow (AB) \perp (B\Gamma) \Rightarrow \hat{B} = 90^\circ \Rightarrow AB\Gamma$ ορθογώνιο.

(γ) Η εξίσωση της πλευράς (ΑΓ) είναι

$$(ΑΓ): y - y_{\Gamma} = \lambda_{ΑΓ}(x - x_{\Gamma}) \Leftrightarrow (ΑΓ): y - 8 = x - 3 \Leftrightarrow (ΑΓ): y - x - 5 = 0$$

(δ) Η εξίσωση του ύψους ΒΔ είναι

$$(ΒΔ): y - y_B = \lambda_{ΒΔ}(x - x_B)$$

Αλλά, ΒΔ ύψος $\Rightarrow (ΒΔ) \perp (ΑΓ) \Rightarrow \lambda_{ΒΔ} \cdot \lambda_{ΑΓ} = -1 \Rightarrow \lambda_{ΒΔ} = -1$ και άρα

$$(ΒΔ): y - 5 = -(x - 4) \Leftrightarrow (ΒΔ): y + x - 9 = 0$$

Άσκηση 4

(α) Να βρεθεί η απόσταση του σημείου $A(2,1)$ από την ευθεία (ε): $4x - 3y + 1 = 0$.

(β) Να βρεθεί το εμβαδόν $E(ΑΒΓ)$ του τριγώνου $ΑΒΓ$ όπου $A(5,0)$, $B(-1,3)$ και $\Gamma(-3,2)$.

[M:2.5, 2.5]

Λύση

(α) Έχουμε

$$d(A, \varepsilon) = \frac{|4 \cdot 2 - 3 \cdot 1 + 1|}{\sqrt{4^2 + (-3)^2}} = \frac{|6|}{\sqrt{25}} = \frac{6}{5}$$

(β) Έχουμε (ανάπτυγμα ως προς την πρώτη γραμμή)

$$\begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_{\Gamma} & y_{\Gamma} & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \\ -3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 5 \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} - 0 \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} = 5(3 - 2) + 1(-2 + 9) = 12$$

και άρα

$$E(ΑΒΓ) = \frac{1}{2} \left| \begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_{\Gamma} & y_{\Gamma} & 1 \end{vmatrix} \right| = \frac{12}{2} = 6 \text{ τ.μ. .}$$