ΛΥΚΕΙΟ ΑΡΧ. ΜΑΚΑΡΙΟΥ Γ΄ - ΔΑΣΟΥΠΟΛΗ **ΒΑΘΜΟΣ:**

ΣΧΟΛΙΚΗ ΧΡΟΝΙΑ 2022-2023

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ Β’ ΤΕΤΡΑΜΗΝΟΥ

ΔΙΑΡΚΕΙΑ: 20΄ **ΥΠΟΓΡ. ΚΑΘΗΓ.:** …………………………..

ΘΕΜΑ/ΕΝΟΤΗΤΑ: ΟΡΙΖΟΥΣΕΣ-ΕΥΘΕΙΑ **ΥΠΟΓΡ. ΚΗΔΕΜ.:** …………………………..

ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ: **22/02/2023**

ΤΜΗΜΑ: Α31 **ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ:** **Γ. Ιωακείμ**

ΟΝΟΜΑΤΕΠΩΝΥΜΟ:

Άσκηση 1

(α) Να λύσετε την πιο κάτω εξίσωση:

$$\begin{vmatrix} x-3 & 1 \\ -1 & x-1 \end{vmatrix} = 0.$$

(β) Να υπολογίσετε την πιο κάτω ορίζουσα:

$$\begin{vmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -2 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

[Μ:2.5, 2.5]

Λύση

(α)

$$\begin{vmatrix} x-3 & 1 \\ -1 & x-1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow (x-3)(x-1) - 1 \cdot (-1) = 0 \Leftrightarrow x^2 - x - 3x + 3 + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 = 0 \Leftrightarrow (x-2)^2 = 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{x = 2}.$$

(β) Χρησιμοποιούμε τον κανόνα του Sarrus:

$$\begin{vmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -2 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} 0 & 2 \\ -2 & -1 \\ 2 & 2 \end{matrix} = 0 \cdot (-1) \cdot 1 + 2 \cdot 1 \cdot 2 + 1 \cdot (-2) \cdot 2 - 2 \cdot (-1) \cdot 1 - 2 \cdot 1 \cdot 0 - 1 \cdot (-2) \cdot 2$$

$$= 4 - 4 + 2 + 4 = 6$$

Άσκηση 2

(α) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας η οποία περνά από το σημείο $A(1, -3)$ και σχηματίζει γωνία $120°$ με τον άξονα των τετμημένων.

(β) Να βρεθεί η **(οξεία)** γωνία που σχηματίζουν οι ευθείες (ε_1): $2x - y = 3$ και (ε_2): $3x - 4y = 7$.

[Μ:2.5, 2.5]

Λύση

(α) $\lambda = \varepsilon\varphi(120°) = \varepsilon\varphi(180° - 60°) = -\varepsilon\varphi 60° = -\sqrt{3}$.

Άρα, η εξίσωση της ευθείας είναι:

$$y - y_A = \lambda(x - x_A) \Leftrightarrow y - (-3) = -\sqrt{3}(x - 1) \Leftrightarrow y + 3 = -\sqrt{3}x + \sqrt{3}$$

$$\Leftrightarrow \boldsymbol{y + \sqrt{3}x + 3 - \sqrt{3} = 0}$$

(β) $\lambda_{\varepsilon_1} = -\frac{A}{B} = 2$ και $\lambda_{\varepsilon_2} = -\frac{A}{B} = \frac{3}{4}$

Υπολογίζουμε:

$$\varepsilon\varphi\widehat{\omega} = \frac{\lambda_{\varepsilon_2} - \lambda_{\varepsilon_1}}{1 + \lambda_{\varepsilon_1}\lambda_{\varepsilon_2}} = \frac{\frac{3}{4} - 2}{1 + 2 \cdot \frac{3}{4}} = \frac{\frac{3-8}{4}}{\frac{6+4}{4}} = -\frac{5}{10} = -\frac{1}{2}$$

και άρα η αμβλεία γωνία μεταξύ των δύο ευθειών είναι ίση με $153.43°$ και συνεπώς η οξεία γωνία μεταξύ τους είναι ίση με $\mathbf{26.57}°$.

Άσκηση 3

Δίνονται τα σημεία $A(-2,3)$, $B(4,5)$ και $\Gamma(3,8)$.

(α) Αποδείξτε ότι τα σημεία A, B και Γ δεν είναι συνευθειακά.

(β) Αποδείξτε ότι το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ορθογώνιο.

(γ) Βρείτε την εξίσωση της πλευράς $A\Gamma$.

(δ) Βρείτε την εξίσωση του ύψους $B\Delta$.

[M:1,1,2,1]

Λύση

(α) Έχουμε (ανάπτυγμα ως προς την 1η γραμμή):

$$\begin{vmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 4 & 5 & 1 \\ 3 & 8 & 1 \end{vmatrix} = -2\begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 8 & 1 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 3 & 8 \end{vmatrix}$$
$$= -2(5-8) - 3(4-3) + (32-15) = 20 \neq 0$$

και αρα τα σημεία δεν είναι συνευθειακά.

(β) Βρίσκουμε τις κλίσεις των πλευρών του τριγώνου:

$$\lambda_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{5-3}{4+2} = \frac{1}{3},$$

$$\lambda_{B\Gamma} = \frac{y_\Gamma - y_B}{x_\Gamma - x_B} = \frac{8-5}{3-4} = -3$$

$$\lambda_{A\Gamma} = \frac{y_\Gamma - y_A}{x_\Gamma - x_A} = \frac{8-3}{3+2} = 1$$

Παρατηρούμε ότι $\lambda_{AB} \cdot \lambda_{B\Gamma} = -1 \Rightarrow (AB) \perp (B\Gamma) \Rightarrow \boldsymbol{\widehat{B} = 90^o} \Rightarrow \boldsymbol{AB\Gamma}$ **ορθογώνιο.**

(γ) Η εξίσωση της πλευράς (ΑΓ) είναι

$$(A\Gamma): y - y_\Gamma = \lambda_{A\Gamma}(x - x_\Gamma) \Leftrightarrow (A\Gamma): y - 8 = x - 3 \Leftrightarrow \boldsymbol{(A\Gamma): y - x - 5 = 0}$$

(δ) Η εξίσωση του ύψους ΒΔ είναι

$$(B\Delta): y - y_B = \lambda_{B\Delta}(x - x_B)$$

Αλλά, $B\Delta$ ύψος ⇒ (ΒΔ) ⊥ (ΑΓ) ⇒ $\lambda_{B\Delta} \cdot \lambda_{A\Gamma} = -1 \Rightarrow \lambda_{B\Delta} = -1$ και άρα

$$(B\Delta): y - 5 = -(x - 4) \Leftrightarrow \boldsymbol{(B\Delta): y + x - 9 = 0}$$

Άσκηση 4

(α) Να βρεθεί η απόσταση του σημείου $A(2,1)$ από την ευθεία $(\varepsilon): 4x - 3y + 1 = 0$.

(β) Να βρεθεί το εμβαδόν $E(AB\Gamma)$ του τριγώνου $AB\Gamma$ όπου $A(5,0)$, $B(-1,3)$ και $\Gamma(-3,2)$.

[Μ:2.5, 2.5]

Λύση

(α) Έχουμε

$$d(A,\varepsilon) = \frac{|4\cdot 2 - 3\cdot 1 + 1|}{\sqrt{4^2 + (-3)^2}} = \frac{|6|}{\sqrt{25}} = \frac{6}{5}.$$

(β) Έχουμε (ανάπτυγμα ως προς την πρώτη γραμμή)

$$\begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_\Gamma & y_\Gamma & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \\ -3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 5\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} - 0\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} = 5(3-2) + 1(-2+9) = 12$$

και άρα

$$E(AB\Gamma) = \frac{1}{2}\left\| \begin{matrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_\Gamma & y_\Gamma & 1 \end{matrix} \right\| = \frac{12}{2} = 6 \ \ \tau.\mu. \ .$$