6. ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΕΣ ΕΝΟΤΗΤΑΣ

Δραστηριότητες σελ. 114-117 (Ενότητας)

1.

(α) **ΣΩΣΤΟ** Δες αντίστοιχο ορισμό

(β) **ΛΑΘΟΣ** Είναι ο ορισμός της αύξουσας

(γ) **ΣΩΣΤΟ** Προφανές

(δ) **ΣΩΣΤΟ** Εξ ορισμού. Δες ορισμό μονοτονίας ακολουθίας

(ε) **ΛΑΘΟΣ** (γιατί να μην είναι φθίνουσα;) Δες ορισμό μονοτονίας ακολουθίας

(στ) **ΣΩΣΤΟ** Δες παρατήρηση μετά τον ορισμό

(ζ) **ΣΩΣΤΟ** Δες ορισμό σύγκλισης ακολουθίας

(η) **ΣΩΣΤΟ** Δες ορισμό Α.Π.

(θ) **ΣΩΣΤΟ** ΕίναιΑ.Π. με διαφορά 0

(ι) **ΣΩΣΤΟ** Ναι γιατί τότε $\forall\, \nu \in \mathbb{N}$ είναι

$$\alpha_{\nu+1} - \alpha_\nu = \delta > 0$$

(ια) **ΛΑΘΟΣ** Οι σταθερές ακολουθίες ή π.χ. η $4,8,16,\cdots$

(ιβ) **ΛΑΘΟΣ** Δεν είναι πραγματικός αριθμός αν για το λόγο λ της προόδου είναι $|\lambda| > 1$

2.

$\alpha_\nu = \dfrac{(-1)^\nu}{2\nu - 1}, \qquad \nu \in \mathbb{N}$

$$\nu = 1 \quad \rightsquigarrow \quad \alpha_1 = \frac{(-1)^1}{2\cdot 1 - 1} = -1$$

$$\nu = 2 \quad \rightsquigarrow \quad \alpha_2 = \frac{(-1)^2}{2\cdot 2 - 1} = \frac{1}{3}$$

$$\nu = 3 \quad \rightsquigarrow \quad \alpha_3 = \frac{(-1)^3}{2\cdot 3 - 1} = -\frac{1}{5}$$

$$\nu = 4 \quad \rightsquigarrow \quad \alpha_4 = \frac{(-1)^4}{2\cdot 4 - 1} = \frac{1}{7}$$

$$\nu = 5 \quad \rightsquigarrow \quad \alpha_5 = \frac{(-1)^5}{2\cdot 5 - 1} = -\frac{1}{9}$$

$$\nu = 6 \quad \rightsquigarrow \quad \alpha_6 = \frac{(-1)^6}{2\cdot 6 - 1} = \frac{1}{11}$$

3.

$\alpha_{\nu+1} = {\alpha_\nu}^2 - \alpha_\nu, \qquad \alpha_1 = 3$

$$\nu = 1 \Rightarrow \alpha_{1+1} = {\alpha_1}^2 - \alpha_1 \Rightarrow \alpha_2 = 9 - 3 = 6$$
$$\nu = 2 \Rightarrow \alpha_{2+1} = {\alpha_2}^2 - \alpha_2 \Rightarrow \alpha_3 = 36 - 6 = 30$$
$$\nu = 3 \Rightarrow \alpha_{3+1} = {\alpha_3}^2 - \alpha_3 \Rightarrow \alpha_4 = 900 - 30 = 870$$
$$\nu = 4 \Rightarrow \alpha_{4+1} = {\alpha_4}^2 - \alpha_4 \Rightarrow \alpha_5 = 756030$$

4. Έστω $\nu \in \mathbb{N}$ σταθεροποιημένο. Τότε

$$\alpha_{\nu+1} - \alpha_\nu = \frac{3}{(\nu+1)+2} - \frac{3}{\nu+1} = \frac{3}{\nu+2} - \frac{3}{\nu+1} = \frac{-3}{(\nu+1)(\nu+2)} < 0$$

αφού $\nu \in \mathbb{N} \Rightarrow (\nu+1)(\nu+2) > 0$ και αρα η ακολουθία είναι γνησίως φθίνουσα.

5. **(α)** $\alpha_\nu = \nu^2 + 2\nu, \nu \in \mathbb{N}$. Έστω $\nu \in \mathbb{N}$ σταθεροποιημένο. Τότε

$$\begin{aligned}\alpha_{\nu+1} - \alpha_\nu &= (\nu+1)^2 + 2(\nu+1) - \nu^2 - 2\nu \\ &= \nu^2 + 2\nu + 1 + 2\nu + 2 - \nu^2 - 2\nu = 2\nu + 3\end{aligned}$$

Αλλά για $\nu \in \mathbb{N}$, είναι προφανώς $2\nu + 3 > 0$ και αρα $\alpha_{\nu+1} - \alpha_\nu > 0$. Αφού το ν ήταν τυχόν, έπεται ότι η ακολουθία είναι **γνησίως αύξουσα.**

(β) $\alpha_\nu = -4^\nu + 1, \nu \in \mathbb{N}$ Έστω $\nu \in \mathbb{N}$ σταθεροποιημένο. Τότε

$$\alpha_{\nu+1} - \alpha_\nu = -4^{\nu+1} + 1 + 4^\nu - 1 - 4 \cdot 4^\nu + 4^\nu = -3 \cdot 4^\nu < 0$$

Αφού το ν ήταν τυχόν, έπεται ότι η ακολουθία είναι **γνησίως φθίνουσα.**

(γ) $\alpha_\nu = (1-\nu)(-1)^\nu, \nu \in \mathbb{N}$. Παρατηρούμε ότι $\alpha_1 = 0, \alpha_2 = -1, \alpha_3 = 2$. Έτσι, $\alpha_1 > \alpha_2$ ενώ $\alpha_2 < \alpha_3$. Έτσι, η ακολουθία **δεν είναι μονότονη.** Διαφορετικά, με τη μέθοδο των διαφορών, παρατηρούμε ότι για $\nu \in \mathbb{N}$ σταθεροποιημένο, είναι

$$\alpha_{\nu+1} - \alpha_\nu = -\nu(-1)^{\nu+1} - (1-\nu)(-1)^\nu = 2 \cdot (-1)^{\nu+1} = \begin{cases} -2, \text{για } \nu \text{ άρτιο} \\ \\ 2, \text{για } \nu \text{ περιττό} \end{cases}$$

και αρα η διαφορά $\alpha_{\nu+1} - \alpha_\nu$ δε διατηρά σταθερό πρόσημο. Αφού το ν ήταν τυχόν, έπεται ότι η ακολουθία δεν είναι μονότονη.

6. **(α)** Έχουμε

$$\lim_\nu \alpha_\nu = \lim_\nu \frac{3\nu^2}{\nu+1} = 3\lim_\nu \frac{\nu^2}{\nu} = 3\lim_\nu \nu = +\infty$$

δηλ. η ακολουθία **δε συγκλίνει.**

(β) Έχουμε

$$\lim_\nu \alpha_\nu = \lim_\nu \sqrt{\frac{\nu-1}{\nu+1}} = \sqrt{\lim_\nu \frac{\nu-1}{\nu+1}} = \sqrt{\lim_\nu \frac{\nu}{\nu}} = \sqrt{1} = 1$$

δηλ. η ακολουθία **συγκλίνει** (στον αριθμό 1).

7. $\alpha_{\nu+1} = 2\alpha_\nu + 1, \nu \in \mathbb{N}$

$$\alpha_3 = 23 \Rightarrow 2\alpha_2 + 1 = 23 \Rightarrow 2(2\alpha_1 + 1) + 1 = 23 \Rightarrow 4\alpha_1 + 2 = 22 \Rightarrow \alpha_1 = 5$$

8. Πολύ εύκολα επαληθεύουμε ότι όντως η δοθείσα ακολουθία είναι Α.Π. με διαφορά $\delta = 8$. Τότε

$$\alpha_{1000} = \alpha_1 + 999\delta = -3 + 999 \cdot 8 = 7989.$$

9. $\alpha_1 = x - 2,\ \alpha_2 = x, \alpha_3 = 2x + 1$ διαδοχικοί όροι Α.Π. $\Leftrightarrow 2\alpha_2 = \alpha_1 + \alpha_3 \Leftrightarrow 2x = 3x - 1 \Leftrightarrow x = 1.$

10.

$$\underbrace{4, x_1, x_2, \cdots, x_6, 39}_{8-\text{προσθετ έοι}}$$

Αφού ο όρος 39, θα είναι ο όρος $\alpha_{6+2} = \alpha_8$ της Α.Π., τότε, αν δ η διαφορά της Α.Π., έχουμε

$$\begin{aligned}\alpha_8 = \alpha_1 + [(6+2) - 1]\delta &\Leftrightarrow 39 = 4 + 7\delta \\ &\Leftrightarrow \boldsymbol{\delta} = \mathbf{\frac{35}{7}} = \mathbf{5}\end{aligned}$$

Άρα,

$$\begin{aligned} x_1 &= \alpha_1 + \delta = 4 + 5 = 9 \\ x_2 &= x_1 + \delta = 14 \\ x_3 &= x_2 + \delta = 19 \end{aligned}$$

	$$x_4 = x_3+\delta = 24$$ $$x_5 = x_4+\delta = 29$$ $$x_6 = x_5+\delta = 34$$
11.	Έχουμε $$\begin{cases}\alpha_3+\alpha_7=32 \Leftrightarrow 2\alpha_1+8\cdot\delta=32\\ \alpha_4+\alpha_5=29 \Leftrightarrow 2\alpha_1+7\cdot\delta=29\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\alpha_1=4\\ \delta=3\end{cases}$$ και αρα η Α.Π. είναι η $$4,\quad 7,\quad 10,\quad 13,\quad 16,\quad \cdots$$
12.	Είναι $\alpha_1=6,\ \alpha_2=10, \alpha_3=14$. Έχουμε $\delta=\alpha_3-\alpha_2=10-6=4$. Ψάχνουμε $\nu\in\mathbb{N}$ έτσι ώστε το αντίστοιχο άθροισμα $\sum_\nu$ να είναι ίσο με 160. Είναι $$\sum_\nu=160 \Leftrightarrow \frac{\nu[2\alpha_1+(\nu-1)\delta]}{2}=160$$ $$\Leftrightarrow \frac{\nu[12+(\nu-1)4]}{2}=160 \Leftrightarrow \nu[12+(\nu-1)4]=320$$ $$\Leftrightarrow \nu^2+2\nu-80=0 \Leftrightarrow (\nu+10)(\nu-8)$$ $$\Leftrightarrow (\nu=-10)\vee(\nu=8)$$ και αφού $\nu>0$, δεχόμαστε τη $\nu=8$. Δηλ. πρέπει να προσθέσουμε τους 8 πρώτους όρους της πιο πάνω Α.Π. για να πάρουμε αντίστοιχο άθροισμα $\sum_\nu$ ίσο με 160.
13.	Είναι $\alpha_1=16,\ \alpha_\nu=200, \alpha_{10}=32+\alpha_2$. Είναι $$\begin{cases}\alpha_1=16\\ \alpha_{10}=32+\alpha_2\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\alpha_1=16\\ 8\delta=32\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\alpha_1=16\\ \delta=4\end{cases}$$ και $\alpha_\nu=200 \Leftrightarrow \alpha_1+(\nu-1)\delta=200$ $$\Leftrightarrow 16+(\nu-1)4=200 \Leftrightarrow 4+\nu-1=50 \Leftrightarrow \nu=47 \text{ σειρές}$$ Επίσης, $$\sum_{47}=\frac{47[2\cdot16+(47-1)4]}{2}=5076 \text{ καθίσματα}$$
14.	$$(x+3)+(x+7)+(x+11)+\cdots+(x+79)=800$$ Θα πρέπει πρώτα να βρούμε πόσους προσθετέους έχουμε στο άθροισμα στο αριστερό μέλος της πιο πάνω εξίσωσης. Θεωρούμε λοιπόν την ακολουθία $$3,\quad 7,\quad 11,\cdots,\quad 79,\cdots$$ η οποία βλέπουμε πολύ εύκολα ότι είναι Α.Π. με $\delta=4$. Είναι $$\alpha_\nu=79 \Leftrightarrow \alpha_1+(\nu-1)\delta=79 \Leftrightarrow 3+(\nu-1)4=79 \Leftrightarrow \nu=20$$ Έτσι, $$3+7+11+\cdots+79=\sum_{20}=\frac{20[2\cdot3+(20-1)4]}{2}=820$$ Έτσι $$(x+3)+(x+7)+(x+11)\cdots+(x+79)=800$$ $$\Leftrightarrow \left(\underbrace{x+x+\cdots x}_{20-\text{προσθετ έοι}}\right)+(3+7+11+\cdots+79)=800$$ $$\Leftrightarrow 20x+820=800 \Leftrightarrow x=-1$$
15.	Έστω λ ο λόγος της Γ.Π.. Έχουμε $$\begin{cases}\alpha_3=5\\ \alpha_8=\frac{5}{32}\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\alpha_1\lambda^2=5\\ \alpha_1\lambda^7=\frac{5}{32}\end{cases} \Rightarrow \frac{\alpha_1\lambda^7}{\alpha_1\lambda^2}=\frac{\frac{5}{32}}{5} \Rightarrow \lambda^5=\frac{1}{32} \Rightarrow \lambda=\frac{1}{2}$$

και $\alpha_1\lambda^2 = 5 \Rightarrow \alpha_1 = 20$. Έτσι

$$\alpha_{11} = \alpha_1\lambda^{10} = 20\cdot\frac{1}{2^{10}} = \frac{5}{2^8} = \frac{5}{256}$$

Αφού $|\lambda| = \frac{1}{2} < 1$ το $\sum_\infty$ έχει νόημα και

$$\sum\nolimits_\infty = \frac{\alpha_1}{1-\lambda} = \frac{20}{1-\frac{1}{2}} = 40$$

16.

$$1 + (-2) + 4 + (-8) + 16 + \cdots + 256$$

Η ακολουθία

$$1, \quad (-2), \quad 4, \quad (-8), \quad 16, \quad \cdots, \quad 256, \quad \cdots$$

είναι μια γεωμετρική πρόοδος με $\alpha_1 = 1$ και $\lambda = -2$.
Είναι

$$\alpha_\nu = 256 \Leftrightarrow \alpha_1\lambda^{\nu-1} = 256 \Leftrightarrow (-2)^{\nu-1} = 256 \Leftrightarrow (-2)^{\nu-1} = (-2)^8 \Leftrightarrow \nu - 1 = 8 \Leftrightarrow \nu = 9$$

Άρα,

$$1 + (-2) + 4 + (-8) + 16 + \cdots + 256 = \sum\nolimits_9 = \frac{1(1-(-2)^9)}{1-(-2)} = \frac{1+512}{3} = \frac{513}{3} = 171.$$

17.

α, β, γ είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου$\Rightarrow \beta^2 = \alpha\cdot\gamma$ και $\alpha\beta\gamma \neq 0$. Έχουμε λοιπόν

$$\frac{1}{\alpha^3} + \frac{1}{\beta^3} + \frac{1}{\gamma^3} = \frac{\beta^3\gamma^3 + \alpha^3\gamma^3 + \alpha^3\beta^3}{\alpha^3\beta^3\gamma^3}$$

$$= \frac{(\beta\cdot\beta^2)\gamma^3 + (\alpha\gamma)^3 + \alpha^3(\beta\cdot\beta^2)}{\alpha^3\beta^3\gamma^3}$$

$\beta^2 = \alpha\cdot\gamma$

$$= \frac{\beta\cdot(\alpha\cdot\gamma)\gamma^3 + \beta^4(\alpha\gamma) + \alpha^3(\alpha\cdot\gamma)\cdot\beta}{\alpha^3\beta^3\gamma^3}$$

$$= \frac{(\alpha\cdot\beta\cdot\gamma)\gamma^3 + \beta^3(\alpha\cdot\beta\cdot\gamma) + \alpha^3(\alpha\cdot\beta\cdot\gamma)}{\alpha^3\beta^3\gamma^3}$$

$$= \frac{(\alpha\cdot\beta\cdot\gamma)(\gamma^3 + \beta^3 + \alpha^3)}{\alpha^3\beta^3\gamma^3} = \frac{\gamma^3 + \beta^3 + \gamma^3}{\alpha^2\beta^2\gamma^2}$$

18.

Υποθέτουμε επιπλέον ότι η Γ.Π. δεν είναι σταθερή.

$\frac{1}{\alpha+\beta}, \frac{1}{\alpha-\gamma}, \frac{1}{\alpha-\beta}$ διαδοχικοί όροι Α.Π.

$\Leftrightarrow 2\frac{1}{\alpha-\gamma} = \frac{1}{\alpha+\beta} + \frac{1}{\alpha-\beta}$

$\Leftrightarrow \frac{2}{\alpha-\gamma} = \frac{\alpha-\beta+\alpha+\beta}{(\alpha+\beta)(\alpha-\beta)} \Leftrightarrow \frac{2}{\alpha-\gamma} = \frac{2\alpha}{\alpha^2-\beta^2}$

$\Leftrightarrow \alpha^2 - \beta^2 = \alpha^2 - \alpha\gamma$

$\Leftrightarrow \beta^2 = \alpha\gamma \Leftrightarrow$ οι α, β, γ είναι διαδοχικοί όροι Α.Π..

19.

Είναι

$$2 - \frac{1}{2} + 1 - \frac{1}{6} + \frac{1}{2} - \frac{1}{18} + \cdots$$
$$= \left(2 + 1 + \frac{1}{2} + \cdots\right) - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{18} + \cdots\right)$$

Εύκολα βλέπουμε ότι η ακολουθία

$$2, 1, \frac{1}{2}, \cdots$$

είναι Γ.Π. με $\lambda = \frac{1}{2}$ και αφού $|\lambda| = \frac{1}{2} < 1$ το $\sum_\infty$ έχει νόημα και

$$2 + 1 + \frac{1}{2} + \cdots = \sum\nolimits_\infty = \frac{\alpha_1}{1-\lambda} = \frac{2}{1-\frac{1}{2}} = 4$$

Ομοίως, βλέπουμε ότι η ακολουθία

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{6}, \frac{1}{18}, \cdots$$

ίναι Γ.Π. με $\lambda = \frac{1}{3}$ και αφού $|\lambda| = \frac{1}{3} < 1$ το $\sum_\infty$ έχει νόημα και

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{18}+\cdots = \sum\nolimits_\infty = \frac{\alpha_1}{1-\lambda} = \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{3}} = \frac{3}{4}$$

και τελικά

$$2-\frac{1}{2}+1-\frac{1}{6}+\frac{1}{2}-\frac{1}{18}+\cdots = \left(2+1+\frac{1}{2}+\cdots\right)-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{18}+\cdots\right) = 4-\frac{3}{4} = \frac{13}{4}$$

20. Έστω

$$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \cdots$$

η εν λόγω Γ.Π. με λ ο λόγος αυτής. Από υπόθεση είναι $|\lambda| < 1$. Τότε το $\sum_\infty$ έχει νόημα. Επίσης, από υπόθεση, οι όροι

$$\alpha_1, \quad \alpha_1+\alpha_2, \quad \sum\nolimits_\infty$$

αποτελούν διαδοχικούς όρους Α.Π. και αρα

$$2(\alpha_1+\alpha_2) = \alpha_1 + \sum\nolimits_\infty \;,$$

$$\textbf{δηλ.}\ 2\alpha_1+2\alpha_2 = \alpha_1 + \frac{\alpha_1}{1-\lambda}\ \textbf{δηλ.}\ \alpha_1+2\alpha_2 = \frac{\alpha_1}{1-\lambda}$$

Αλλά, $\alpha_2 = \lambda\alpha_1$, έπεται ότι

$\alpha_1+2\alpha_2 = \frac{\alpha_1}{1-\lambda} \Leftrightarrow \alpha_1+2\lambda\alpha_1 = \frac{\alpha_1}{1-\lambda}$

$\Leftrightarrow \quad \alpha_1(1+2\lambda) = \frac{\alpha_1}{1-\lambda}$

και αφού $\alpha_1 \neq 0$, έπεται ότι η πιο πάνω είναι ισοδύναμη με την

$$\frac{1}{1-\lambda} = 1+2\lambda, \text{δηλ. με την } 2\lambda^2-\lambda = 0,$$

$$\text{δηλ. με την } \lambda\,(2\lambda-1) = 0$$

Η πιο πάνω ικανοποιείται μόνο για $\lambda = \frac{1}{2}$ αφού έχουμε Γ.Π..

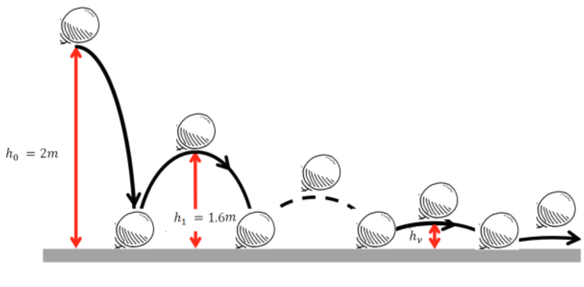
21. Έστω α_ν το ύψος της μπάλας μετά τη ν αναπήδηση. Είναι ουσιαστικά μια Γ.Π. με $\alpha_1 = 2$ και $\lambda = 0.8$. (Ο λόγος των υψών παραμένει σταθερός)

(α) Είναι $\alpha_6 = \alpha_1\lambda^5 = 0.5242\, m$

(β) Είναι

$$2\underbrace{\sum\nolimits_\infty}_{\text{ανε βοκατέβασμα}} + \underbrace{2}_{\text{αρχικ ό ύψος}} = 2\frac{2}{1-0.8}+2 = 22m$$

Δηλ. μέχρι να σταματήσει η μπάλα θα έχει καλυφει απόσταση $22m$ σε ύψος.



22. $\alpha_1 = x^2, \alpha_2 = x^2-1, \alpha_3 = x^2-2, \alpha_{10} = 40$

(α) Παρατηρούμε ότι $2\alpha_2 = 2(x^2-1) = \alpha_1+\alpha_3$ και αρα η πρόοδος είναι αριθμητική. Είναι δε η διαφορά της $\delta = \alpha_2-\alpha_1 = -1$.

(β) Τώρα,

$$\alpha_{10} = 40 \Leftrightarrow \alpha_1+9\delta = 40 \Leftrightarrow x^2-9 = 40 \Leftrightarrow x^2 = 49$$

$$\Leftrightarrow (x=7) \vee (x=-7)$$

(γ) Θα βρούμε το ν εκείνο για το οποίο μέχρι εκεί οι όροι είναι θετικοί και μετά από αυτό οι όροι είναι αρνητικοί. Προφανώς είναι ο 49. Έτσι,

	$$\sum_{49}=\frac{49[2\cdot 49-48]}{2}=1225$$
23.	$$\frac{x}{2}+\frac{x}{4}+\frac{x^2}{4}+\frac{x}{8}+\frac{x^3}{8}+\frac{x}{16}+\frac{x^4}{16}+\cdots=\frac{3}{2}$$ $$\Leftrightarrow\left(\frac{x}{2}+\frac{x^2}{4}+\frac{x^3}{8}+\cdots\right)+x\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\cdots\right)=\frac{3}{2}$$ κατα τα γνωστά, δείχνουμε ότι η ακολουθία $$\frac{x}{2},\frac{x^2}{4},\frac{x^3}{8},\cdots$$ είναι Γ.Π. με λόγο $\lambda=\frac{x}{2}$ και αφού $\lvert\lambda\rvert=\left\lvert\frac{x}{2}\right\rvert=\frac{\lvert x\rvert}{2}<\frac{1}{2}<1$ (αφού από υπόθεση είναι $\lvert x\rvert<1$), το $\sum_\infty$ έχει νόημα. Είναι $$\sum_\infty=\frac{\alpha_1}{1-\lambda}=\frac{\frac{x}{2}}{1-\frac{x}{2}}=\frac{x}{2-x}$$ Επίσης, δείχνουμε ότι η ακολουθία $$\frac{1}{4},\frac{1}{8},\frac{1}{16},\cdots$$ είναι Γ.Π. με λόγο $\lambda=\frac{1}{2}$ και αφού $\lvert\lambda\rvert=\frac{1}{2}<1$ το $\sum_\infty$ έχει νόημα. Είναι $$\sum_\infty=\frac{\alpha_1}{1-\lambda}=\frac{\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}$$ Άρα, τελικά, $$\left(\left(\frac{x}{2}\right)^2+\left(\frac{x}{2}\right)^4+\cdots\right)+x\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\cdots\right)=\frac{3}{2}$$ $$\Leftrightarrow\frac{x}{2-x}+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}\Leftrightarrow\boldsymbol{x=1}$$
24.	**1ος τρόπος** (με ευθεία απόδειξη) Αφού οι x,y,ω είναι διαδοχικοί όροι Α.Π., έπεται ότι $2y=x+\omega$ $$\alpha_1=x^2-\omega y,\qquad \alpha_2=y^2-\omega x,\qquad \alpha_3=\omega^2-xy$$ Είναι $2\alpha_2=2y^2-2x\omega$ και $\alpha_1+\alpha_3=x^2-\omega y+\omega^2-xy=x^2+\omega^2-y\underbrace{(x+\omega)}_{2y}$ $=x^2+\omega^2-2y^2=\underbrace{x^2+\omega^2+2x\omega}_{(x+\omega)^2}-2x\omega-2y^2$ $=\left(\underbrace{x+\omega}_{2y}\right)^2-2x\omega-2y^2=4y^2-2y^2-2x\omega$ $=2y^2-2x\omega$ Συνεπώς, $2\alpha_2=\alpha_1+\alpha_3$ και αρα οι όροι $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ αποτελούν διαδοχικούς όρους Α.Π.. **2ος τρόπος** Αφού οι x,y,ω είναι διαδοχικοί όροι Α.Π., έπεται ότι $2y=x+\omega$. Κατασκευάζουμε τις διαφορές $\alpha_2-\alpha_1$ και $\alpha_3-\alpha_1$: $$\begin{aligned}\alpha_2-\alpha_1&=y^2-\omega x-(x^2-\omega y)=y^2+\omega y-x^2-\omega x\\&=y^2-x^2+\omega(y-x)\\&=(y-x)(y+x)+\omega(y-x)=(y-x)\left(y+\underbrace{x+\omega}_{2y}\right)\\&=3y(y-x)\quad(\mathbf{1})\end{aligned}$$ και $$\begin{aligned}\alpha_3-\alpha_2&=\omega^2-xy-y^2+\omega x=\omega^2-y^2+x(\omega-y)\\&=(\omega-y)(\omega+y)+x(\omega-y)=(\omega-y)\left(\underbrace{\omega+x}_{2y}+y\right)\\&=3y(\omega-y)\quad(\mathbf{2})\end{aligned}$$ Αλλά, $2y=x+\omega\Rightarrow y+y=x+\omega\Rightarrow\omega-y=y-x\quad(\mathbf{3})$

Από τις(1), (2)και (3) έπεται ότι $\alpha_2 - \alpha_1 = \alpha_3 - \alpha_2$ και αρα οι όροι $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ αποτελούν διαδοχικούς όρους Α.Π..

3ος τρόπος (με ισοδυναμίες)

Αφού οι x, y, ω είναι διαδοχικοί όροι Α.Π., έπεται ότι $2y = x + \omega$. Έχουμε

$$2\alpha_2 = \alpha_1 + \alpha_3 \Leftrightarrow 2y^2 - 2x\omega = x^2 - \omega y + \omega^2 - xy$$

$$\Leftrightarrow 2y^2 - 2x\omega = x^2 + \omega^2 - y\left(\underbrace{x + \omega}_{2y}\right)$$

$$\Leftrightarrow 2y^2 - 2x\omega = x^2 + \omega^2 - 2y^2$$

$$\Leftrightarrow 4y^2 = x^2 + 2x\omega + \omega^2 \Leftrightarrow 4y^2 = \left(\underbrace{x + \omega}_{2y}\right)^2 \Leftrightarrow 4y^2 = 4y^2$$

η οποία είναι αληθής.

25.

$(\alpha_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ = η Α.Π. με διαφορά δ,

$(\beta_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ = η Γ.Π. με λόγο λ, $|\lambda| < 1$

Δεδομένα του προβλήματος: $\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = \alpha_8 \\ \delta = 3\lambda \\ \alpha_5 = 2\sum_\infty \end{cases}$

και $\alpha_1 = \beta_1$

Αφού η $(\alpha_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ είναι Α.Π., έχουμε ότι $\alpha_1 + \alpha_3 = 2\alpha_2$ και αρα

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = \alpha_8 \\ \alpha_1 + \alpha_3 = 2\alpha_2 \end{cases} \Rightarrow 3\alpha_2 = \alpha_8 \Rightarrow 3\alpha_1 + 3\delta = \alpha_1 + 7\delta \Rightarrow \boldsymbol{\alpha_1 = 2\delta}$$

Τώρα,

$$\alpha_5 = 2\sum_\infty \Rightarrow \underbrace{\alpha_1}_{2\delta} + 4\delta = 2\frac{\overbrace{\beta_1}^{\alpha_1 = 2\delta}}{1 - \underbrace{\lambda}_{\frac{\delta}{3}}} \Rightarrow 6\delta = 2\frac{2\delta}{1 - \frac{\delta}{3}}$$

$$\Rightarrow \delta = \frac{2\delta^2}{3 - \delta} \Rightarrow \delta(\delta - 1) = 0$$

Αλλά $\delta = 3\lambda$ και $|\lambda| < 1$ άρα η δεκτή λύση είναι η $\boldsymbol{\delta = 1}$. Έτσι, $\boldsymbol{\alpha_1 = 2}$ και η Α.Π. είναι η

$$\mathbf{2, 3, 4, 5, \cdots}$$

Ακολούθως, $\lambda = \frac{\delta}{3} = \frac{1}{3}$ και $\beta_1 = \alpha_1 = 2$. Έτσι, η Γ.Π. είναι η

$$\mathbf{\frac{2}{3}, \frac{2}{9}, \frac{2}{27}, \frac{2}{81}, \cdots}$$

26.

Έστω $(\alpha_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ μια Γ.Π.. Τότε είναι $\alpha_\nu = \alpha_1\lambda^{\nu-1}, \forall \nu \in \mathbb{N}$. Τότε

$$\alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdot \alpha_3 \cdot \cdots \cdot \alpha_\nu = \alpha_1 \cdot (\alpha_1\lambda) \cdot (\alpha_1\lambda^2) \cdot \cdots \cdot (\alpha_1\lambda^{\nu-1})$$

$$= \underbrace{\alpha_1 \cdot \alpha_1 \cdot \alpha_1 \cdot \cdots \cdot \alpha_1}_{\nu-\acute{o}\rho o\iota} \cdot \underbrace{\lambda \cdot \lambda^2 \cdot \lambda^3 \cdot \cdots \cdot \lambda^{\nu-1}}_{(\nu-1)-\acute{o}\rho o\iota} = {\alpha_1}^\nu \cdot \lambda^{1+2+\cdots+(\nu-1)}$$

Αλλά

$$\lambda^{1+2+\cdots+(\nu-1)} = \lambda^{\sum_{\kappa=1}^{\nu-1}\kappa} = \lambda^{\sum_{\kappa=1}^{\nu}\kappa - \nu} = \lambda^{\frac{\nu(\nu+1)}{2} - \nu} = \lambda^{\frac{\nu(\nu+1)}{2} - \nu} = \lambda^{\frac{\nu^2 - \nu}{2}}$$

και αρα

$$\boldsymbol{\alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdot \alpha_3 \cdot \cdots \cdot \alpha_\nu = {\alpha_1}^\nu \cdot \lambda^{\frac{\nu^2-\nu}{2}}}$$

27.

(α) Αφού $\alpha_1, \lambda \neq 0$, έπεται ότι $\alpha_\nu \neq 0, \forall \nu \in \mathbb{N}$. Έτσι, το πηλίκο

$$\beta_\nu = \frac{1}{\alpha_\nu}$$

έχει νόημα $\forall \nu \in \mathbb{N}$. Είναι $\forall \nu \in \mathbb{N}$

$$\frac{\beta_{\nu+1}}{\beta_\nu} = \frac{\frac{1}{\alpha_{\nu+1}}}{\frac{1}{\alpha_\nu}} = \frac{\alpha_\nu}{\alpha_{\nu+1}} = \frac{1}{\lambda}$$

και αρα η $(\beta_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ είναι Γ.Π. με λόγο $\frac{1}{\lambda}$.

(β) Έχουμε $\forall \nu \in \mathbb{N}$

$$\frac{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\cdots+\alpha_\nu}{\beta_1+\beta_2+\beta_3+\cdots+\beta_\nu}=\frac{\alpha_1+\alpha_1\lambda+\alpha_1\lambda^2+\cdots+\alpha_1\lambda^{\nu-1}}{\frac{1}{\alpha_1}+\frac{1}{\alpha_1\lambda}+\frac{1}{\alpha_1\lambda^2}+\cdots+\frac{1}{\alpha_1\lambda^{\nu-1}}}$$

$$=\alpha_1{}^2\frac{1+\lambda+\lambda^2+\cdots+\lambda^{\nu-1}}{1+\frac{1}{\lambda}+\frac{1}{\lambda^2}+\cdots+\frac{1}{\lambda^{\nu-1}}}$$

$$=\alpha_1{}^2\frac{1+\lambda+\lambda^2+\cdots+\lambda^{\nu-1}}{\frac{\lambda^{\nu-1}+\lambda^{\nu-2}+\cdots+1}{\lambda^{\nu-1}}}$$

$$=\alpha_1{}^2\lambda^{\nu-1}=\alpha_1\underbrace{\alpha_1\lambda^{\nu-1}}_{\alpha_\nu}=\alpha_1\alpha_\nu$$