

6.4 ΟΡΙΟ ΑΚΟΛΟΥΘΙΑΣ

Δραστηριότητες σελ. 94 (Όριο ακολουθίας)

<p>1.</p>	<p>(α) ΣΩΣΤΟ Είναι ορισμός (κατ' ακρίβειαν δεν τίθεται θέμα σωστού ή λάθους σε ορισμό)</p> <p>(β) ΣΩΣΤΟ Έστω (a_n) μια σταθερή ακολουθία, δηλ. $a_n = c$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Τότε $\lim_n a_n = \lim_n c = c$ και άρα η ακολουθία συγκλίνει (στον αριθμό c).</p> <p>(γ) ΛΑΘΟΣ $\lim_n a_n = \lim_n (3n - 1) = 3(+\infty) - 1 = +\infty.$</p> <p>(δ) ΣΩΣΤΟ $\lim_n a_n = \lim_n \frac{2n^2 - 1}{n^3 + 2n + 1} = \lim_n \frac{2n^2}{n^3} = 2 \lim_n \frac{1}{n} = 2 \cdot 0 = 0.$</p>
<p>2.</p>	<p>(α) Έχουμε $\lim_n a_n = \lim_n (4n - 2) = +\infty$ και άρα η ακολουθία δε συγκλίνει.</p> <p>(β) Έχουμε $\lim_n a_n = \lim_n \frac{3n + 1}{2n + 1} = \lim_n \frac{3n}{2n} = \frac{3}{2}$ Δηλ. η ακολουθία είναι συγκλίνουσα με όριο τον αριθμό $\frac{3}{2}$.</p> <p>(γ) Έχουμε $\lim_n a_n = \lim_n \frac{n^3 - 2n}{n^2 - 2n + 2} = \lim_n \frac{n^3}{n^2} = \lim_n n = +\infty$ ή διαφορετικά $\lim_n a_n = \lim_n \frac{n^3 - 2n}{n^2 - 2n + 2} = \lim_n \frac{n^2 \left(n - \frac{2}{n} \right)}{n^2 \left(1 - \frac{2}{n} + \frac{2}{n^2} \right)} = \lim_n \frac{n - \frac{2}{n}}{1 - \frac{2}{n} + \frac{2}{n^2}} = +\infty$ και άρα η ακολουθία δε συγκλίνει.</p> <p>(δ) Για να άρουμε την απροσδιοριστία στον παρονομαστή $((+\infty) - (+\infty))$ πολλαπλασιάζουμε και διαιρούμε με τη συζυγή παράσταση: $\lim_n a_n = \lim_n \frac{1}{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}} = \lim_n \frac{1}{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}} \cdot \frac{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \lim_n \frac{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}{(\sqrt{n+1})^2 - (\sqrt{n})^2}$ $= \lim_n \frac{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}{n+1 - n} = \lim_n (\sqrt{n+1} + \sqrt{n}) = (+\infty) + (+\infty) = +\infty$ και άρα η ακολουθία δε συγκλίνει.</p> <p>(ε) $a_{n+1} = a_n + 2, (n \in \mathbb{N}, n \geq 2), a_1 = 1.$ Αν η ακολουθία συνέκλινε, έστω σε έναν πραγματικό αριθμό a, τότε $\lim_n a_{n+1} = \lim_n (a_n + 2) \text{ δηλ. } \lim_n a_n = \lim_n a_n + 2$ Δηλ. $a = a + 2$, δηλ. $0 = 2$, άτοπο. Παρατήρηση: Είναι $\lim_n a_{n+1} = \lim_n a_n$ διότι, παίζει ρόλο μόνο η ουρά της ακολουθίας στη σύγκλιση.</p>