10΄ ΔΙΑΓΝΩΣΤΙΚΗ ΑΣΚΗΣΗ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Β΄ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

ΕΝΟΤΗΤΑ: **Ειδικές ακολουθίες (αριθμητική και γεωμετρική πρόοδος)**

ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ: **20/02/2023**

ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ: Γιάννης Ιωακείμ

ΟΝΟΜΑ ΜΑΘΗΤΗ/ΤΡΙΑΣ: ....**ΤΜΗΜΑ**: Β32

ΑΣΚΗΣΗ 1

Σε αριθμητική πρόοδο (α_ν) το άθροισμα του δεύτερου και του έκτου της όρου είναι 18 και ο έννατός της όρος είναι το -1.

(α) Να σχηματίσετε την πρόοδο.

(β) Να βρείτε το άθροισμα των πρώτων 20 όρων της προόδου.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

(α) $\alpha_2 + \alpha_6 = 18 \Rightarrow \alpha_1 + \delta + \alpha_1 + 5\delta = 18 \Rightarrow 2\alpha_1 + 6\delta = 18 \Rightarrow \alpha_1 + 3\delta = 9 \Rightarrow \boxed{\alpha_1 = 9 - 3\delta}$

και

$$\alpha_9 = -1 \Rightarrow \alpha_1 + 8\delta = -1 \Rightarrow 9 - 3\delta + 8\delta = -1 \Rightarrow 5\delta = -10 \Rightarrow \delta = -2$$

Αντικαθιστούμε:

$$\alpha_1 = 9 - 3\delta = 9 - 3 \cdot (-2) = 15.$$

Άρα, η αριθμητική πρόοδος είναι η

$$15, \quad 13, \quad 11, \quad 9, \quad \cdots$$

(β)

$$\sum\nolimits_{20} = \frac{20\big(2 \cdot 15 + 19 \cdot (-2)\big)}{2} = 10 \cdot (30 - 38) = 10 \cdot (-8) = -80.$$

ΑΣΚΗΣΗ 2

Δίνεται ότι το άθροισμα των ν -πρώτων όρων μιας ακολουθίας (α_ν) είναι

$$\sum\nolimits_\nu = \frac{1}{3^\nu} - 1, \qquad \nu \in \mathbb{N}$$

(α) Να βρείτε το γενικό όρο α_ν της ακολουθίας.

(β) Να δείξετε ότι η ακολουθία είναι μια γεωμετρική πρόοδος και να υπολογίσετε τον 9ο όρο της.

(γ) Υπάρχει το $\sum_\infty$; Δικαιολογήστε την απάντησή σας. Στην περίπτωση που αυτό υπάρχει, να το υπολογίσετε.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

(α) Για κάθε $\nu \in \mathbb{N}$,

$$\alpha_\nu = \sum\nolimits_\nu - \sum\nolimits_{\nu-1} = \frac{1}{3^\nu} - 1 - \left(\frac{1}{3^{\nu-1}} - 1\right) = \frac{1}{3^\nu} - 1 - \left(\frac{1}{3^\nu \cdot 3^{-1}} - 1\right)$$

$$= \frac{1}{3^\nu} - 1 - \left(\frac{3}{3^\nu} - 1\right) = \frac{1}{3^\nu} - 1 - \frac{3}{3^\nu} + 1 = \frac{1}{3^\nu} - \frac{3}{3^\nu} = -\frac{2}{3^\nu}$$

(β) Για κάθε $\nu \in \mathbb{N}$,

$$\frac{\alpha_\nu}{\alpha_{\nu-1}} = \frac{-\frac{2}{3^\nu}}{-\frac{2}{3^{\nu-1}}} = \frac{3^{\nu-1}}{3^\nu} = \frac{1}{3} = \textit{σταθερός αριθμός},$$

άρα η ακολουθία είναι μια γεωμετρική πρόοδος (με λόγο $\lambda = \frac{1}{3}$).

$$\alpha_9 = \alpha_1 \lambda^8 = -\frac{2}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^8 = -\frac{2}{3^9}.$$

(γ) Υπάρχει το $\sum_\infty$ διότι $|\lambda| = \left|\frac{1}{3}\right| = \frac{1}{3} < 1$ και

$$\sum\nolimits_\infty = \frac{\alpha_1}{1-\lambda} = \frac{-\frac{2}{3}}{1-\frac{1}{3}} = -1.$$

ΑΣΚΗΣΗ 3

Να βρείτε τρείς διαδοχικούς όρους γεωμετρικής προόδου ώστε να έχουν άθροισμα 42 και γινόμενο 512.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Έστω α, β, γ οι διαδοχικοί όροι. Τότε $\beta^2 = \alpha\gamma$. Είναι

$$\alpha + \beta + \gamma = 42 \qquad \text{και} \qquad \alpha\beta\gamma = 512.$$

Έχουμε

$$\begin{cases} \alpha\beta\gamma = 512 \\ \beta^2 = \alpha\gamma \end{cases} \Rightarrow \beta^3 = 512 \Rightarrow \boldsymbol{\beta = 8}.$$

Άρα,

$$\alpha + \beta + \gamma = 42 \Rightarrow \alpha + 8 + \gamma = 42 \Rightarrow \boldsymbol{\alpha = 34 - \gamma}.$$

Τότε,

$$\begin{cases} \alpha\beta\gamma = 512 \\ \beta = 8 \\ \alpha = 34 - \gamma \end{cases} \Rightarrow \gamma(34-\gamma)8 = 512 \Rightarrow -\gamma^2 + 34\gamma = 64 \Rightarrow \gamma^2 - 34\gamma + 64 = 0$$

$$\Rightarrow (\gamma - 32)(\gamma - 2) = 0 \Rightarrow \gamma = 32 \text{ ή } \gamma = 2$$

Αν $\gamma = 32$, τότε $\beta = 8$ και $\alpha = 34 - \gamma = 2$ ενώ αν $\gamma = 2$, τότε $\beta = 8$ και $\alpha = 34 - \gamma = 32$.