

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΜΕΣΗΣ

για τις εξετάσεις διορίσιμων εκπαιδευτικών

Γιάννης Ι. Ιωακείμ

Περιεχόμενα

1	Σχέσεις ισοδυναμίας και στοιχειώδης θεωρία αριθμών	7
1.1	Σχέσεις ισοδυναμίας	7
1.2	Στοιχειώδης θεωρία αριθμών	14
1.2.1	Ρητοί και άρρητοι αριθμοί	18
2	Ακολουθίες πραγματικών αριθμών	21
2.1	Η έννοια της ακολουθίας	21
2.2	Μονότονες ακολουθίες	21
2.3	Φραγμένες ακολουθίες	24
2.4	Σύγκλιση ακολουθίας	25
2.4.1	Όριο ακολουθίας στο $+\infty$ και $-\infty$	29
2.4.2	Θεωρήματα Σύγκλισης	30
2.5	Αναδρομικές ακολουθίες	43
2.6	Υπακολουθίες	44
2.7	Ασκήσεις	47
2.8	Λύσεις	49
3	Διάφορα αντιπαραδείγματα	55
3.1	Συναρτήσεις	55
3.2	Όριο συνάρτησης	57
3.3	Συνέχεια συνάρτησης	58
4	Ειδικά Θεωρήματα συνεχών συναρτήσεων	61
4.1	Θεώρημα Ενδιάμεσης Τιμής και Θεώρημα Μέγιστης/Ελάχιστης Τιμής	61
4.2	Θεώρημα του Bolzano	68
4.3	Ασκήσεις	69
4.4	Λύσεις	69
5	Βασικά Θεωρήματα στο Διαφορικό Λογισμό	71
5.1	Το Θεώρημα του Bolzano και το Θεώρημα Μέσης Τιμής του Διαφορικού Λογισμού	71
5.1.1	Κατασκευή ανισώσεων με χρήση του ΘΜΤΔΛ	78
5.1.2	Ερωτήσεις κατανόησης	79
5.2	Ασκήσεις	81
5.3	Λύσεις	84
6	Μονότονες συναρτήσεις	91
6.1	Μονοτονία και συνέχεια συνάρτησης	96
6.2	Ακρότατες τιμές	99
7	Ασύμπτωτη στο γράφημα συνάρτησης	103
7.1	Ορισμοί και παραδείγματα	103
7.2	Ασύμπτωτη ρητής συνάρτησης	110
7.3	Ασκήσεις	113

7.4	Λύσεις	115
8	Κυρτότητα	121
8.1	Κυρτά σύνολα στο \mathbb{R}	121
8.2	Παραγωγίσιμες κυρτές συναρτήσεις	127
8.3	Κυρτότητα και χάραξη γραφήματος συνάρτησης	136
8.3.1	Επισημάνσεις, παραδείγματα και αντιπαραδείγματα	140
9	Γεωμετρία του τριγώνου	143
9.1	Γενικά περί τριγώνων	147
9.2	Συμμετρία, συμμετρικά σχήματα	150
9.3	Ίσα τρίγωνα	152
9.3.1	Κριτήρια ισότητας τριγώνων	152
9.3.2	Κριτήρια ισότητας ορθογώνιων τριγώνων	156
9.4	Ανισοτικές σχέσεις στο τρίγωνο	158
9.5	Μερικές ακόμη συνέπειες του Αξιώματος της παραλληλίας	160
9.6	Τριγωνομετρικοί αριθμοί και βασικές ταυτότητες	164
9.7	Εμβαδόν τριγώνου	167
9.8	Μετρικές σχέσεις στο τρίγωνο	167
9.9	Κέντρο βάρους (βαρύκεντρο) τριγώνου	170
9.10	Ορθόκεντρο τριγώνου	173
9.11	Το έγκεντρο τριγώνου	175
9.12	Βασικά Θεωρήματα στο τρίγωνο	176
9.12.1	1ο και 2ο Θεώρημα Διαμέσων	177
9.12.2	Θεωρήματα εσωτερικής/εξωτερικής διχοτόμου	180
9.12.3	Θεώρημα του Μενελάου και Θεώρημα του Ceva	181
9.12.4	Προβλήματα και Εφαρμογές	186
9.13	Επίλυση προβλημάτων με χρήση του εμβαδού τριγώνου	190
9.14	Διάφορα προβλήματα και εφαρμογές	194
10	Στοιχεία συνδυαστικής και πιθανοτήτων	203
10.1	Στοιχεία Συνδυαστικής	203
10.2	Βασικές Αρχές Απαρίθμησης	203
10.2.1	Η πολλαπλασιαστική Αρχή	203
10.2.2	Διατάξεις και συνδυασμοί	206
10.2.3	Κατανομή σφαιριδίων σε διακεκριμένα κελιά	209
10.3	Στοιχεία πιθανοτήτων	211
10.3.1	Ανεξάρτητα ενδεχόμενα και στοχαστική ανεξαρτησία	211
10.3.2	Το Θεώρημα ολικής πιθανότητας	215
10.3.3	Η αρχή εγκλεισμού-αποκλεισμού	220
10.4	Ασκήσεις	225
10.5	Λύσεις	226

Πρόλογος

Κατά την προετοιμασία μου για τις εξετάσεις των διορισίμων εκπαιδευτικών του 2021 βρέθηκε μπροστά σε μια μεγάλη έκπληξη. Ενώ το εξεταστικό δοκίμιο των μαθηματικών μέσης της εναρκτήριας χρονιάς των εξετάσεων (του 2017) ήταν σχετικά απλό (δηλαδή έλεγχε πολύ βασικές μαθηματικές γνώσεις), το δοκίμιο της επόμενης εξεταστικής περιόδου (2019) ήταν ιδιαίτερα περίπλοκο, φορτωμένο με ασκήσεις γεωμετρίας, θεωρίας αριθμών, συνδυαστικής, άλγεβρας κτλ.

Εύλογα λοιπόν κανείς ψάχνει για κατευθύνσεις ως προς το τι να διαβάσει. Τα Μαθηματικά είναι ένα απέραντο πεδίο και οπωσδήποτε πρέπει να υπάρχουν κατευθύνσεις (όπως π.χ. όλα τα προπτυχιακά μαθήματα έχουν σαφέστατη ύλη, κατευθυντήριες γραμμές και προτεινόμενη βιβλιογραφία). Ψάχνοντας στην αντίστοιχη ιστοσελίδα του Υπουργείου Παιδείας για ύλη, οι μόνες παραπομπές που υπήρχαν ήταν οι δείκτες επάρκειας και επιτυχίας. Στους εν λόγω δείκτες, βέβαια, δε θα συναντήσει κανείς ούτε κλάσεις ισοδυναμίας, ούτε όρια ακολουθιών με χρήση πανεπιστημιακών κριτηρίων σύγκλισης ούτε και το Θεώρημα πρωταρχικής ανάλυσης.

Έχοντας λοιπόν ως μόνο οδηγό το γραπτό του 2019, προσπάθησα να καταλάβω ποιες περιοχές των μαθηματικών και ποιες μαθηματικές ικανότητες ζητούνται από τους υποψηφίους. Αντιλήφθηκα ότι ζητούνται κατανόηση βασικών στοιχείων της συνδυαστικής (π.χ. πότε χρησιμοποιούμε διατάξεις, πότε συνδυασμούς και πως συνδέονται αυτά τα δύο), γεωμετρική εποπτεία (πως προσανατολιζομαι στο χώρο με εργαλεία της Ευκλείδειας Γεωμετρίας, γεωμετρικοί τόποι κτλ), βασικά κριτήρια σύγκλισης ακολουθιών (και βασικών στοιχείων ακολουθιών όπως μοναδικότητα του ορίου ή πότε μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε κανόνες του L' Hopital), στοιχειώδη θεωρία αριθμών (Θεώρημα πρωταρχικής ανάλυσης) και βασικά στοιχεία της Θεωρίας των Πιθανοτήτων. Αν εξαιρέσουμε την Ευκλείδεια Γεωμετρία, αρκετά από τα θέματα που παρουσιάστηκαν του 2019 και 2021 λύνονται (ας πούμε ουσιαστικότερα) με χρήση εργαλείων που μαθαίνουμε στα πρώτα εξάμηνα των σπουδών μας (Θεώρημα ολικής πιθανότητας, συνεχής επέκταση συνάρτησης, ομοιόμορφη κατανομή πιθανότητας) και τα οποία διδάσκονται στα πλαίσια **συγκεκριμένων** (πανεπιστημιακών) μαθημάτων. Θα μπορούσε κανείς να τα χαρακτηρίσει ως καμουφλαρισμένα πανεπιστημιακά θέματα από διάσπαρτες περιοχές των μαθηματικών.

Η πρόκληση λοιπόν που παρουσιάζεται είναι στις περιπτώσεις που ένας υποψήφιος, τελείωσε πριν αρκετό καιρό το πανεπιστήμιο γνωρίζοντας πως ο μόνος τρόπος διορισμού είναι ο κατάλογος των διοριστέων, διοχετεύτηκε σε διδασκαλία μαθηματικών μέσης εκπαίδευσης (ιδιαίτερα ή ιδιωτικά σχολεία) και κατά συνέπεια δεν έχει πλέον τριβή με πανεπιστημιακά μαθηματικά, σε αντίθεση με κάποιον που αποφοίτησε σχετικά πρόσφατα.

Οι σημειώσεις αυτές έχουν γραφτεί για να δώσουν κατευθύνσεις σε όσους δεν έχουν πλέον τριβή με τα πανεπιστημιακά μαθηματικά υπό την έννοια ότι θα τους δωθεί έναυσμα, κίνητρο και υλικό για να **αναστοχαστούν και να ψάξουν και σε άλλες πηγές. Ως εκ τούτου απαιτείται αφιέρωση αρκετού χρόνου και προσπάθειας από τους υποψηφίους για να φτάσει στην εξέταση με αυτοπεποίθηση.**

Σχετικά με τα υπόλοιπα δύο γνωστικά αντικείμενα, **τα Νέα Ελληνικά και τις δεξιότητες** έχω να δώσω τις εξής συμβουλές. Για τα Νέα Ελληνικά, να πάρετε τα προηγούμενα γραπτά και να δείτε τη

δομή τους, να κάνετε μερικές εκθέσεις και περιλήψεις και να ζητήσετε τη βοήθεια ενός επαγγελματία φιλόλογου για να σας τα διορθώσει. Για τις λεξιλογικές ασκήσεις οποιοδήποτε βιβλίο προετοιμασίας ή σημειώσεις για τις παγκύπριες εξετάσεις είναι κατάλληλο.

Για τις δεξιότητες, πρέπει κατ' αρχάς να ψάξετε στο διαδίκτυο για τα πρωτόκολλα λειτουργίας των σχολείων και προπαντός σημειώσεις από τις επιμορφωτικές διαλέξεις εκπαιδευτικών που διοργανώνει το Παιδαγωγικό Ινστιτούτο Κύπρου. Υλικό μπορείτε να βρείτε και στην προσωπική μου ιστοσελίδα : **<https://ioakimioannis.com/diorisimoi>**.

Γιάννης Ι. Ιωακείμ, Ιανουάριος 2023