1.1 ΕΝΝΟΙΑ ΟΡΙΟΥ-ΟΡΙΣΜΟΣ ΟΡΙΟΥ

Δραστηριότητες σελ. 16 (Έννοια ορίου-ορισμός ορίου)

(α) Θα αποδείξουμε με τον ορισμό (του ορίου) ότι

$$\lim_{x\to 1}(5) = 5.$$

Εδώ, η συνάρτηση είναι η $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = 5$ και $x_0 = 3,\ L = 5$.

Έστω $\varepsilon > 0$.	Ξεκινάμε με ένα τυχαίο $\varepsilon > 0$ αφού ο ορισμός του ορίου απαιτεί το επιχείρημά μας να ισχύει για *κάθ ε* $\varepsilon > 0$
Θα βρούμε ένα $\delta > 0$ τέτοιο ώστε για όλα τα $x \in D(f)$ τέτοια ώστε $0 < \|x - 1\| < \delta$ να ισχύει $\|f(x) - 5\| < \varepsilon$.	Παράθεση επιχειρήματος. Το δ που ψάχνουμε πρέπει να εξαρτάται από το (σταθεροποιημένο πλέον) ε
$\|f(x) - 5\| = \|5 - 5\| = 0$ Αρα ότι $\delta > 0$ και να πάρουμε (αφού η συνάρτηση δεν εξαρτάται από τη μεταβλητή x) έχουμε το ζητούμενο.	Ανάλυση επιχειρήματος. Ξεκινάμε 'ανάποδα', δηλ. από το αποτέλεσμα για να βρούμε το δ αυτό.
Άρα το $\lim_{x\to 1}(5)$ υπάρχει και είναι ίσο με 5	Συμπέρασμα

(β) Θα αποδείξουμε με τον ορισμό (του ορίου) ότι

$$\lim_{x\to -3}(x - 4) = -7$$

Εδώ, η συνάρτηση είναι η $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = x - 4$ και $x_0 = -3, L = -7$.

Έστω $\varepsilon > 0$.	Ξεκινάμε με ένα τυχαίο $\varepsilon > 0$ αφού ο ορισμός του ορίου απαιτεί το επιχείρημά μας να ισχύει για *κάθε* $\varepsilon > 0$
Θα βρούμε ένα $\delta > 0$ τέτοιο ώστε για όλα τα $x \in D(f)$ τέτοια ώστε $0 < \|x - (-3)\| < \delta$ να ισχύει $\|f(x) - (-7)\| < \varepsilon$.	Παράθεση επιχειρήματος. Το δ που ψάχνουμε πρέπει να εξαρτάται από το (σταθεροποιημένο πλέον) ε
$\|f(x) - (-7)\| = \|x - 4 + 7\| = \|x + 3\|$ Αλλά αυτό θα πρέπει να ισχύει για κάθε x τέτοιο ώστε $0 < \|x + 3\| < \delta$, συνεπώς, αρκεί $\|f(x) - (-7)\| < \delta$ Επίσης, θέλουμε $\|f(x) - (-7)\| < \varepsilon$ και άρα $\varepsilon = \delta$. Αφού $\varepsilon > 0$, από τον τρόπο που ορίσαμε το δ, αυτό θα είναι > 0.	Ανάλυση επιχειρήματος. Ξεκινάμε 'ανάποδα', δηλ. από το αποτέλεσμα για να βρούμε το δ αυτό.
Για $\delta = \varepsilon > 0$ και για κάθε x τέτοιο ώστε $0 < \|x + 3\| < \delta = \varepsilon$, έχουμε $\|f(x) - (-7)\| = \|x + 3\| < \varepsilon$	Αφού βρήκαμε το δ, επαληθεύουμε τον ορισμό
Άρα το $\lim_{x\to -3}(x - 4)$ υπάρχει και είναι ίσο με -7	Συμπέρασμα

(γ) Θα αποδείξουμε με τον ορισμό (του ορίου) ότι

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{x^2-1}{x-1}\right)=2.$$

Εδώ, η συνάρτηση είναι η $f\colon \mathbb{R}-\{1\}\to\mathbb{R}$ με τύπο $f(x)=\frac{x^2-1}{x-1}$ και $x_0=1,\ L=2$.

Έστω $\varepsilon>0$.	Ξεκινάμε με ένα τυχαίο $\varepsilon>0$ αφού ο ορισμός του ορίου απαιτεί το επιχείρημά μας να ισχύει για *κάθε* $\varepsilon>0$
Θα βρούμε ένα $\delta>0$ τέτοιο ώστε για όλα τα $x\in D(f)$ τέτοια ώστε $0<\lvert x-1\rvert<\delta$ να ισχύει $\lvert f(x)-2\rvert<\varepsilon$.	Παράθεση επιχειρήματος. Το δ που ψάχνουμε πρέπει να εξαρτάται από το (σταθεροποιημένο πλέον) ε
$$\lvert f(x)-2\rvert=\left\lvert\frac{x^2-1}{x-1}-2\right\rvert=\left\lvert\frac{x^2-1-2x+2}{x-1}\right\rvert$$ $$=\left\lvert\frac{x^2-2x+1}{x-1}\right\rvert=\left\lvert\frac{(x-1)^2}{x-1}\right\rvert=\lvert x-1\rvert$$ Αλλά αυτό θα πρέπει να ισχύει για κάθε $x\in D(f)$ τέτοιο ώστε $0<\lvert x-1\rvert<\delta$, συνεπώς, θα πρέπει $\lvert f(x)-2\rvert<\delta$ Επίσης, θέλουμε $\lvert f(x)-2\rvert<\varepsilon$ και άρα $\varepsilon=\delta$ ή, ισοδύναμα, $\delta=\varepsilon$. Αφού $\varepsilon>0$, από τον τρόπο που ορίσαμε το δ, αυτό θα είναι >0.	Ανάλυση επιχειρήματος. Ξεκινάμε 'ανάποδα', δηλ. από το αποτέλεσμα για να βρούμε το δ αυτό.
$\lvert f(x)-2\rvert=\lvert x-1\rvert$ Αρα ότι $\delta>0$ και να πάρουμε (αφού η συνάρτηση δεν εξαρτάται από τη μεταβλητή x) έχουμε το ζητούμενο.	Ανάλυση επιχειρήματος. Ξεκινάμε 'ανάποδα', δηλ. από το αποτέλεσμα για να βρούμε το δ αυτό.
Για $\delta=\varepsilon>0$ και για κάθε x τέτοιο ώστε $0<\lvert x+4\rvert<\delta=\frac{\varepsilon}{5}$, έχουμε $\lvert f(x)-L\rvert=\left\lvert\frac{x^2-1}{x-1}-2\right\rvert=\lvert x-1\rvert<\varepsilon$	Αφού βρήκαμε το δ, επαληθεύουμε τον ορισμό
Άρα το $\lim_{x\to 1}\left(\frac{x^2-1}{x-1}\right)$ υπάρχει και είναι ίσο με 2	Συμπέρασμα