Θερινή προετοιμασία
για τα
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

-Γ ΛΥΚΕΙΟΥ-

'Αυτός που καταλαβαίνει τον Αρχιμήδη και τον Απολλώνιο θαυμάζει λιγότερο τα επιτεύγματα των κορυφαίων ανδρών των μεταγενέστερων εποχών.'

- Gottfried Wilhelm Leibniz

Επιμέλεια: Γιάννης Ιωακείμ/Διορίσιμος εκπαιδευτικός
Αρχείο: https://ioakimioannis.com/pagypries/

0.1 Όριο συνάρτησης

Ένα από τα σημαντικότερα αντικείμενα της περσινής τάξης ήταν ο **υπολογισμός ορίου συνάρτησης**, ο οποίος αποτέλεσε τον πυρήνα του ορισμού του **παράγωγου αριθμού**.
Συγκεκριμένα, είχαμε δεί όρια καθώς το x τείνει σε πραγματικό αριθμό ή στο $\pm\infty$ με αποτέλεσμα στο εκτεταμένο σύνολο των πραγματικών αριθμών, το $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$.
Στη Γ Λυκείου θα συναντήσουμε όριο ρητής συνάρτησης και συνεπώς πρέπει να θυμηθούμε με ποιό τρόπο δικαιολογούμε τα διάφορα βήματα στους υπολογισμούς μας. Το ίδιο ισχύει και για κλαδικές συναρτήσεις.

Ας θυμηθούμε πρώτα μερικά βασικά αποτελέσματα που μας βοηθούν στον υπολογισμό ορίου.

(Αλγεβρικές ιδιότητες ορίων)
Έστω $c \in \mathbb{R}$. Έστω $f, g : I \to \mathbb{R}$ (I διάστημα) συναρτήσεις και έστω x_0 σημείο συσσώρευσης του I τέτοιο ώστε τα όρια $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ και $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$ **υπάρχουν**. Τότε,

(i) $\lim\limits_{x\to x_0} cf(x) = c \lim\limits_{x\to x_0} f(x)$.

(ii) $\lim\limits_{x\to x_0} [f(x) \pm g(x)] = \lim\limits_{x\to x_0} f(x) \pm \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$.

(iii) $\lim\limits_{x\to x_0} [f(x) \cdot g(x)] = \lim\limits_{x\to x_0} f(x) \cdot \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$.

(iv) $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)}$, δεδομένου ότι $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) \neq 0$.

(v) $\lim\limits_{x\to x_0} f^n(x) = \left(\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\right)^n$, για $n \in \mathbb{N}$.

(vi) $\lim\limits_{x\to x_0} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}$, για $n \in \mathbb{N}$.
Αν ο n είναι άρτιος, υποθέτουμε ότι είτε $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) > 0$, είτε $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 0$ και η $x \mapsto \sqrt[n]{f(x)}$ ορίζεται σε μια (ανοικτή τρύπια) περιοχή του $x = 0$.

(vii) $\lim\limits_{x\to x_0} |f(x)| = \left|\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\right|$.

Παραδείγματα

(i) $\lim\limits_{x\to 0} 2 = 2$.

(ii) $\lim\limits_{x\to 1}(x+2) = \lim\limits_{x\to 1} x + 2 = 1 + 2 = 3$.

(iii) $\lim\limits_{x\to -1}(x^2+4x) = \lim\limits_{x\to -1} x^2 + \lim\limits_{x\to -1}(4x) = \left(\lim\limits_{x\to -1} x\right)^2 + 4\lim\limits_{x\to -1} x = (-1)^2 + 4(-1) = -3$.

(iv) $\lim\limits_{x\to -3}(x+5)^4 = \left(\lim\limits_{x\to -3}(x+5)\right)^5 = (-3+5)^5 = 2^5 = 32$.

(v) $\lim\limits_{x\to 4}\sqrt{2x+1} = \sqrt{\lim\limits_{x\to 4}(2x+1)} = \sqrt{2\lim\limits_{x\to 4} x + 1} = \sqrt{9} = 3$.

(vi) $\lim\limits_{x\to -5}\sqrt[3]{x^2+2}=\sqrt[3]{\lim\limits_{x\to -5}(x^2+2)}=\sqrt[3]{\left(\lim\limits_{x\to -5}x\right)^2+2}=\sqrt[3]{27}=3.$

(vii) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x-1}{x+4}=\dfrac{\lim\limits_{x\to 2}(x-1)}{\lim\limits_{x\to 2}(x+4)}=\dfrac{2-1}{2-4}=\dfrac{1}{2}.$

(viii) $\lim\limits_{x\to 3}|x-5|=\left|\lim\limits_{x\to 3}(x-5)\right|=|3-5|=2.$ ◀

▶ **Παράδειγμα 0.1.1.** *Δίνονται συναρτήσεις f και g τέτοιες ώστε:*

$$\lim_{x\to -3}f(x)=2,\qquad \lim_{x\to -3}g(x)=-1.$$

Να υπολογίσετε τα πιο κάτω όρια:

(α') $\lim\limits_{x\to -3}(f(x)-g(x))$

(β') $\lim\limits_{x\to -3}\left(\dfrac{6f(x)}{g(x)}\right)$

(γ') $\lim\limits_{x\to -3}(f^{12}(x)\cdot|g(x)|)$

(δ') $\lim\limits_{x\to -3}\sqrt[5]{11f(x)-5g(x)}$

Απάντηση. Εφαρμόζουμε τις ιδιότητες (άλγεβρα) των ορίων.

(α') $\lim\limits_{x\to -3}(f(x)-g(x))=\lim\limits_{x\to -3}f(x)-\lim\limits_{x\to -3}g(x)=2-(-2)=3.$

(β') $\lim\limits_{x\to -3}\left(\dfrac{5f(x)}{g(x)}\right)=5\dfrac{\lim\limits_{x\to -3}f(x)}{\lim\limits_{x\to -3}g(x)}=5\cdot\dfrac{2}{-1}=-10.$

(γ') $\lim\limits_{x\to -3}(f^{12}(x)\cdot|g(x)|)=\left(\lim\limits_{x\to -3}f^{12}(x)\right)\cdot\left(\lim\limits_{x\to -3}|g(x)|\right)$

$=\left(\lim\limits_{x\to -3}f(x)\right)^{10}\cdot\left|\lim\limits_{x\to -3}g(x)\right|=2^{10}\cdot|-1|=2^{10}.$

(δ') $\lim\limits_{x\to -3}\sqrt[5]{11f(x)-5g(x)}=\sqrt[5]{\lim\limits_{x\to -3}(11f(x)-5g(x))}=\sqrt[5]{11\lim\limits_{x\to -3}f(x)-5\lim\limits_{x\to -3}g(x)}$
$=\sqrt[5]{11\cdot 2-5\cdot(-1)}=\sqrt[5]{32}=\sqrt[5]{2^5}=2.$

□

Προκύπτει από τις ιδιότητες (i) και (ii) ότι το όριο ενός **πολυωνύμου** $P(x)$ καθώς το $x\to x_0$ είναι η αριθμητική τιμή του πολυωνύμου στο σημείο αυτό, δηλαδή

$$\lim_{x\to x_0}P(x)=P(x_0).$$

▶ **Παράδειγμα 0.1.2.**

$$\lim_{x\to -1}(x^3+2x+5)=(-1)^3+2(-1)+5=2.$$

□

Το ίδιο ισχύει και για τα όρια των τριγωνομετρικών συναρτήσεων $f(x)=\text{ημ}x$ και $f(x)=\text{συν}x$ καθώς $x\to x_0$:

$$\lim_{x\to x_0}\text{ημ}x=\text{ημ}(x_0),\qquad \lim_{x\to x_0}\text{συν}x=\text{συν}(x_0).$$

Αυτό αντανακλά το ότι τα πολυώνυμα και οι συναρτήσεις ημίτονο και συνημίτονο είναι **συνεχείς συναρτήσεις.**

▶ **Παράδειγμα 0.1.3.**

$$\lim_{x\to\pi/2} \eta\mu x = \eta\mu(\pi/2) = 1, \qquad \lim_{x\to\pi} \sigma\upsilon\nu x = \sigma\upsilon\nu(\pi) = -1.$$

□

Βασικά όρια:

$\lim\limits_{x\to+\infty} x^n = +\infty,\ n\in\mathbb{N}$

$\lim\limits_{x\to-\infty} x^n = \begin{cases} +\infty, & n \text{ άρτιος} \\ -\infty, & n \text{ περιττός} \end{cases}$

$\lim\limits_{x\to+\infty} x^n = +\infty,\ n\in\mathbb{N}$

$\lim\limits_{x\to-\infty} x^n = \begin{cases} +\infty, & n \text{ άρτιος} \\ -\infty, & n \text{ περιττός} \end{cases}$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x^n} = 0,\ n\in\mathbb{N}$

$\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{x^n} = 0,\ n\in\mathbb{N}$

$\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$

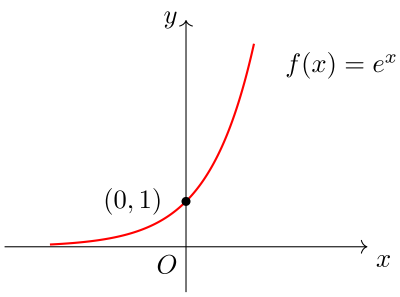
$\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0.$

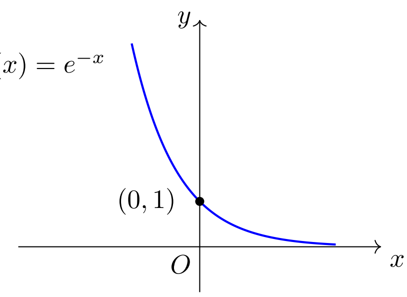
$\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{e^x} = 0$

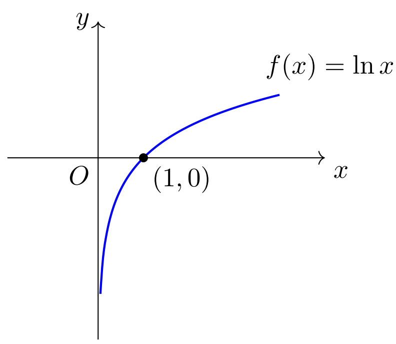
$\lim\limits_{x\to-\infty} e^{-x} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{e^x} = +\infty.$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$

$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\text{ημ}x}{x} = 1.$







Μάθετε τα πιο πάνω όρια, διότι θα τα συναντήσετε στη Γ Λυκείου και θα λέτε μετά ότι τα μαθηματικά είναι δύσκολα!

▶ **Παράδειγμα 0.1.4.**

(i) $\lim_{x\to+\infty} x^{500} = +\infty.$

(ii) $\lim_{x\to-\infty} x^{500} = +\infty.$

(iii) $\lim_{x\to-\infty} x^{501} = +\infty.$

(iv) $\lim_{x\to-\infty} x^{501} = -\infty.$

(v) $\lim_{x\to+\infty} x^{-500} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^{500}} = 0.$

(vi) $\lim_{x\to-\infty} x^{-500} = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x^{500}} = 0.$

(vii) $\lim_{x\to+\infty} x^{-501} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^{501}} = 0.$

(viii) $\lim_{x\to-\infty} x^{-501} = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x^{501}} = 0.$

□

▶ **Παράδειγμα 0.1.5.**

(i) $\lim_{x\to0} \frac{\text{ημ}(2x)}{x} = 2\lim_{x\to0}\frac{\text{ημ}(2x)}{2x} = 2\cdot1 = 2.$

(ii) $\lim_{x\to0} e^{2x} = e^{\lim_{x\to0}(2x)} = e^{2\cdot0} = 1.$

Στο τελευταίο παράδειγμα, χρησιμοποιήσαμε τη **συνέχεια** της συνάρτησης $f(x) = e^{2x}$ για να περάσουμε το όριο στον εκθέτη. □

▶ **Παράδειγμα 0.1.6.**

(i) $\lim_{x\to-\infty} \frac{e^x}{x^2} \;=\; \lim_{x\to-\infty} e^x \cdot \lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x^2} \;=\; 0\cdot0 \;=\; 0.$

(ii)

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to0}\frac{\text{εφ}(3x)}{\text{ημ}(2x)} &= \lim_{x\to0}\frac{\frac{\text{ημ}(3x)}{\text{συν}(3x)}}{\text{ημ}(2x)} = \lim_{x\to0}\text{ημ}(3x)\cdot\frac{1}{\text{συν}(3x)}\cdot\frac{1}{\text{ημ}(2x)}\\
&= \frac{3}{2}\lim_{x\to0}\frac{\text{ημ}(3x)}{3x}\cdot\frac{1}{\text{συν}(3x)}\cdot\frac{1}{\frac{\text{ημ}(2x)}{2x}}\\
&= \frac{3}{2}\lim_{x\to0}\frac{\text{ημ}(3x)}{3x}\cdot\lim_{x\to0}\frac{1}{\text{συν}(3x)}\cdot\frac{1}{\lim_{x\to0}\frac{\text{ημ}(2x)}{2x}}\\
&= \frac{3}{2}\cdot1\cdot\frac{1}{\text{συν}0}\cdot\frac{1}{1} = \frac{3}{2}.
\end{aligned}$$

□

Για χάρη ευκολίας, υπάρχουν ορισμένες πράξεις που μπορούμε να δεχτούμε ως 'σωστές' για να εξάγουμε απευθείας την τιμή ορίου. Οι πράξεις αυτές, οι οποίες μας δίνουν αποτέλεσμα στο $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R}\cup\{\pm\infty\}$, φαίνονται στον **πίνακα 1**.

▶ **Παράδειγμα 0.1.7.** *Η απ' ευθείας αντικατάσταση* $+\infty$ *στο όριο* $\lim_{x\to+\infty}(x^3+x^2+2)$ *δίνει:*

$$(+\infty)^3 + (+\infty)^2 + 2 = (+\infty) + (+\infty) + 2 = +\infty$$

και αρα

$$\lim_{x\to+\infty}(x^3+x^2+2) = +\infty.$$

□

Πίνακας 1: Επιτρεπτές πράξεις στο $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$

$(+\infty) + (+\infty) = +\infty$	$(-\infty) + (-\infty) = -\infty$
$(+\infty) + a = +\infty, \ \forall a \in \mathbb{R}$	$(-\infty) + a = -\infty, \ \forall a \in \mathbb{R}$
$(+\infty) \cdot (+\infty) = +\infty$	$(-\infty) \cdot (-\infty) = +\infty$
$a \cdot (+\infty) = \begin{cases} +\infty, & a > 0 \\ -\infty, & a < 0 \end{cases}$	$a \cdot (-\infty) = \begin{cases} -\infty, & a > 0 \\ +\infty, & a < 0 \end{cases}$
$\dfrac{a}{\pm\infty} = 0, \ \forall a \in \mathbb{R}$	$a^{+\infty} = \begin{cases} +\infty, & a > 1 \\ 0, & 0 \leq a < 1 \end{cases}$
$(+\infty)^a = +\infty, \ \forall a > 0$	$(+\infty) \cdot (-\infty) = -\infty$

Πίνακας 2: Μη-επιτρεπτές πράξεις (απροσδιόριστες μορφές) στο $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$

$(+\infty) + (-\infty)$	$(-\infty) - (-\infty)$
$(-\infty) + (+\infty)$	$0 \cdot (\pm\infty)$
0^0	$1^{\pm\infty}$
$(\pm\infty)^0$	$\dfrac{0}{0}$
$\dfrac{\pm\infty}{\pm\infty}$	$\dfrac{a}{0}$

▶ **Παράδειγμα 0.1.8.** *Η απ' ευθείας αντικατάσταση* $+\infty$ *στο όριο* $\lim\limits_{x \to -\infty} (3x^3 + x^2 - 1)$ *δίνει:*

$$3(-\infty)^3 + (-\infty)^2 - 1 = 3(-\infty) + (+\infty) - 1 = (-\infty) + (+\infty),$$

η οποία είναι μια απροσδιόριστη μορφή και άρα δεν μπορούμε να υπολογίσουμε το όριο με τον τρόπο αυτό (δηλαδή μπορεί να υπάρχει αλλά και να μην υπάρχει). □

▶ **Παράδειγμα 0.1.9.** *Η απ' ευθείας αντικατάσταση* $+\infty$ *στο όριο* $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2x^3 + 3x - 3}{3x^2 + 2x + 1}$ *δίνει:*

$$\frac{2(+\infty)^3 + 3(+\infty) - 3}{3(+\infty)^2 + 2(+\infty) + 1} = \frac{2(+\infty) + (+\infty) - 3}{3(+\infty) + (+\infty) + 1} = \frac{(+\infty) + (+\infty) - 3}{(+\infty) + (+\infty) + 1} = \frac{+\infty}{+\infty},$$

η οποία είναι μια απροσδιόριστη μορφή και άρα δεν μπορούμε να υπολογίσουμε το όριο με τον τρόπο αυτό (δηλαδή μπορεί να υπάρχει αλλά και να μην υπάρχει). □

Είδαμε επίσης τεχνικές υπολογισμού ορίων σε ειδικές περιπτώσεις, όπως είναι για παράδειγμα

(i) όριο στο $\pm\infty$ ρητής συνάρτησης. Για παράδειγμα

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^{2030} + x^{15} + 2x + 1}{x^{2032} + 7x^2 + 10} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^{2030}}{x^{2032}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x^2} = 0.$$

Στην περίπτωση των **πλευρικών ορίων**, είδαμε τις **συντομογραφίες** $a^{\pm}$, $(a \in \mathbb{R})$:
Με a^{+} συμβολίζουμε έναν αριθμό 'δεξιότερα' από τον a και με a^{-} συμβολίζουμε έναν αριθμό 'αριστερότερα' από τον a. Έτσι, αν $a > 0$, τότε $a^{+} - a = 0^{+}$ και $a - a^{+} = 0^{-}$.
Επίσης, $a^{-} + a = 0^{+}$ και $a - a- = 0^{-}$.
Αν $a < 0$, τότε $a^{+} - a = 0^{+}$ και $a - a^{+} = 0^{-}$.
Επίσης, $a^{-} - a = 0^{-}$ και $a - a^{+} = 0^{-}$.

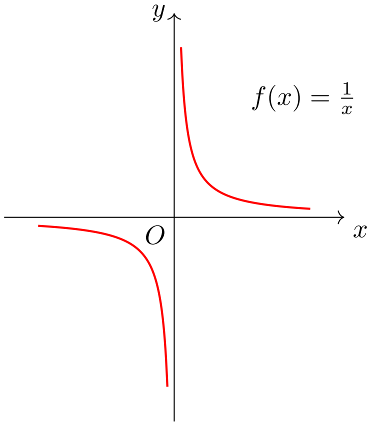
Βασικά όρια 2:

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^{2n}} = +\infty,\ n \in \mathbb{N} \qquad \lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x^{2n+1}} = -\infty,\ n \in \mathbb{N} \qquad \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x^{2n+1}} = +\infty,\ n \in \mathbb{N}$$

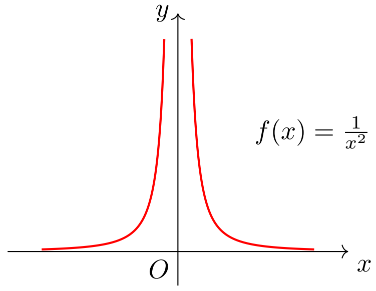
$$\lim_{x\to 0^+} \ln x = -\infty$$

Παραδείγματα

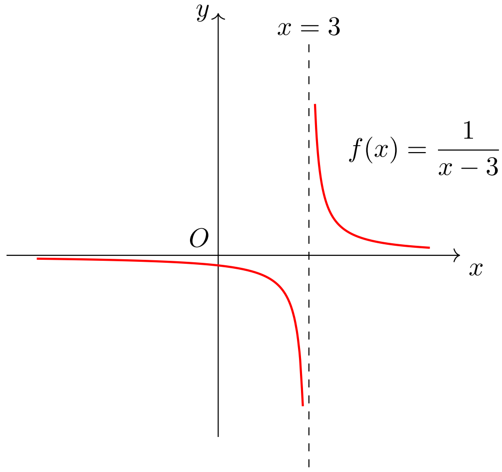
(i) $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1}{x} = +\infty$ και $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{1}{x} = -\infty$.



(ii) $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1}{x^2} = +\infty = \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{1}{x^2}$.



(i) $\lim\limits_{x\to 3^+} \dfrac{1}{x-3} = \dfrac{1}{3^+ - 3} = \dfrac{1}{0^+} = +\infty$ και $\lim\limits_{x\to 3^-} \dfrac{1}{x-3} = \dfrac{1}{3^- - 3} = \dfrac{1}{0^-} = -\infty$.



0.1.1 Τεχνικές άρσης απροσδιοριστίας

Είχαμε μελετήσει συγκεκριμένες περιπτώσεις όπου μπορούμε να άρουμε την απροσδιοριστία που προκύπτει:

►►**Περίπτωση απροσδιόριστης μορφής** $(+\infty)-(+\infty)$ **καθώς** $x \to \pm\infty$
Στην περίπτωση πολυωνύμων, βγάζουμε κοινό παράγοντα το x στη μεγαλύτερη δύναμη (που εμφανίζεται στον αριθμητή και παρονομαστή) ή κρατάμε μόνο τον όρο με τη μεγαλύτερη δύναμη του x:

$$\lim_{x\to\pm\infty}(a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1) = \lim_{x\to\pm\infty} x^n\left(\frac{a_0}{x^n} + \frac{a_1}{x^{n-1}} + \ldots + \frac{a_{n-1}}{x} + a_n\right).$$

Αλλά, αφού

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{1}{x^n} = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{1}{x^{n-1}} = \ldots = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{1}{x} = 0,$$

έχουμε

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{a_0}{x^n} + \frac{a_1}{x^{n-1}} + \ldots + \frac{a_{n-1}}{x} + a_n\right) = a_n.$$

Άρα,

$$\lim_{x\to\pm\infty}(a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1) = a_n \lim_{x\to\pm\infty} x^n.$$

► **Παράδειγμα 0.1.10.**

$$\lim_{x\to+\infty}(3x^{200} + x^{15} - 5x^2 + 1) = 3\lim_{x\to+\infty} x^{200} = 3(+\infty)^{200} = 3(+\infty) = +\infty.$$

□

Στην περίπτωση που η συνάρτηση στο όριο είναι **διαφορά δύο ριζών ώστε η (συνολική) δύναμη του** x **των δύο ξεχωριστά είναι ίδια**, πολλαπλασιάζουμε με τη συζυγή παράσταση.

► **Παράδειγμα 0.1.11.**

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+1}-x) &= \lim_{x\to+\infty}\frac{(\sqrt{x^2+1}-x)\cdot\overbrace{(\sqrt{x^2+1}+x)}^{\text{συζυγής}}}{\underbrace{\sqrt{x^2+1}+x}_{\text{συζυγής}}} \\
&= \lim_{x\to+\infty}\frac{(\sqrt{x^2+1})^2-x^2}{\sqrt{x^2+1}+x} \\
&= \lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+1-x^2}{\sqrt{x^2+1}+x} \\
&= \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x} = 0.
\end{aligned}$$

Σημείωση: *Για τον υπολογισμό του τελευταίου ορίου, μπορούμε να ακολουθήσουμε 2 τρόπους: είτε απ' ευθείας αντικατάσταση του* $+\infty$ *(επιτρεπτή πράξη),*

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x} &= \frac{1}{\sqrt{(+\infty)^2+1}+(+\infty)} \\
&= \frac{1}{\sqrt{(+\infty)^2}+(+\infty)} = \frac{1}{(+\infty)+(+\infty)} \\
&= \frac{1}{+\infty} = 0
\end{aligned}$$

είτε να βγάλουμε κοινό παράγοντα το x στη ρίζα του παρονομαστή:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+x}$$

και αφού το $x\to+\infty$, μπορούμε με ασφάλεια να θεωρήσουμε (κάτω από το όριο) ότι το x είναι γνήσια θετικό, άρα $|x|=x$:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+x} &= \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+1)}\\ &= \frac{1}{(+\infty)(\sqrt{1+0}+1)}=\frac{1}{(+\infty)\cdot 2}=0\end{aligned}$$

(επιτρεπτή πράξη). □

►►Περίπτωση ορίου ρητής συνάρτησης καθώς $x\to\pm\infty$
Για να υπολογίζουμε όρια ρητών συναρτήσεων καθώς $x\to\pm\infty$ λαμβάνουμε υπόψιν ότι καθώς το x αυξάνεται ή μειώνεται απεριόριστα, οι όροι που θα παίξουν ρόλο είναι αυτοί με τη μεγιστοβάθμια δύναμη στον αριθμητή και παρονομαστή. Δηλαδή (για $a_n, b_m\neq 0$) έχουμε

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0}{b_mx^m+b_{m-1}x^{m-1}+\ldots+b_1x+b_0}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{a_nx^n}{b_mx^m}=\frac{a_n}{b_m}\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^n}{x^m}$$

και προχωράμε ανάλογα με το πρόσημο της διαφοράς των δυνάμεων m και n.

► Παράδειγμα 0.1.12.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^3+3x-8}{3x^2+2x+4}=\frac{2}{3}\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3}{x^2}=\frac{2}{3}\lim_{x\to+\infty}x=+\infty.$$

Διαφορετικά, βγάζουμε κοινό παράγοντα στον αριθμητή και παρονομαστή τη ***μικρότερη*** *δύναμη από τις μεγαλύτερες δυνάμεις και των δύο:*

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^3+3x-8}{3x^2+2x+4} &= \lim_{x\to+\infty}\frac{x^2\left(2x+\frac{3}{x}-\frac{8}{x^2}\right)}{x^2\left(3+\frac{2}{x}+\frac{4}{x^2}\right)}\\ &= \lim_{x\to+\infty}\frac{2x+\frac{3}{x}-\frac{8}{x^2}}{3+\frac{2}{x}+\frac{4}{x^2}}\\ &= \frac{\lim_{x\to+\infty}\left(2x+\dfrac{3}{x}-\dfrac{8}{x^2}\right)}{\lim_{x\to+\infty}\left(3+\dfrac{2}{x}+\dfrac{4}{x^2}\right)}\\ &= +\infty.\end{aligned}$$

□

►►Περίπτωση ορίου ρητής συνάρτησης καθώς το x τείνει σε (πεπερασμένο) αριθμό
Στην περίπτωση αυτή, δηλαδή όταν έχουμε όριο της μορφής

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{P(x)}{Q(x)},$$

όπου P και Q πολυώνυμα, διακρίνουμε διάφορες περιπτώσεις, ανάλογα με το αν τα πολυώνυμα έχουν ή όχι κοινή ρίζα. Η μεθοδολογία που ακολουθούμε θα φανεί μέσα από τα πιο κάτω παραδείγματα:

▶ **Παράδειγμα 0.1.13.**

$$\lim_{x\to -1}\frac{x^{100}+2x-3}{x^{201}-x^{10}+4}=\frac{\lim\limits_{x\to -1}(x^{100}+2x-3)}{\lim\limits_{x\to -1}(x^{201}-x^{10}+4)}=\frac{(-1)^{100}+2(-1)-3}{(-1)^{201}-(-1)^{10}+4}=-2.$$

□

▶ **Παράδειγμα 0.1.14.** *Το όριο*

$$\lim_{x\to 2}\frac{x-2}{x^2-4}$$

δίνει μη επιτρεπτή πράξη (απροσδιόριστη μορφή) $\frac{0}{0}$ *και ο λόγος είναι ότι τα πολυώνυμα στον αριθμητή και παρονομαστή έχουν κοινή ρίζα. Συνεπώς, τα αναλύουμε σε γινόμενο πρώτων παραγόντων:*

$$\lim_{x\to 2}\frac{x-2}{(x-2)(x+2)}=\lim_{x\to 2}\frac{1}{x+2}=\frac{1}{4}.$$

□

▶ **Παράδειγμα 0.1.15.** *Το όριο*

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2+1}{x^2+x-2}$$

δίνει μη επιτρεπτή πράξη (απροσδιόριστη μορφή) $\frac{2}{0}$ *και ο λόγος είναι ότι το* $x=1$ *είναι ρίζα του παρονομαστή (ενώ του αριθμητή όχι):*

$$\frac{x^2+1}{x^2+x-2}=\frac{x^2+1}{(x-1)(x+2)}.$$

Το όριο αυτό δεν υπάρχει διότι τα πλευρικά όρια (υπάρχουν στο εκτεταμένο σύνολο των πραγματικών αριθμών) είναι διαφορετικά μεταξύ τους:

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{x^2+1}{(x-1)(x+2)}=\frac{1^++1}{(1^+-1)(1^++2)}=\frac{2^+}{0^+}=+\infty$$

και ομοίως,

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{x^2+1}{(x-1)(x+2)}=-\infty.$$

□

▶ **Παράδειγμα 0.1.16.** *Το όριο*

$$\lim_{x\to -2^{\frac{1}{3}}}\frac{3x-1}{2x^3+1}$$

δεν υπάρχει. Πράγματι,

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\left(-2^{\frac{1}{3}}\right)^+}\frac{3x-1}{2x^3+1} &= \lim_{x\to\left(-2^{\frac{1}{3}}\right)^+}(3x-1)\cdot\lim_{x\to\left(-2^{\frac{1}{3}}\right)^+}\frac{1}{2x^3+1}\\ &= (3\cdot(-2^{\frac{1}{3}})-1)\cdot\frac{1}{0^+}=(3\cdot(-2^{\frac{1}{3}})-1)\cdot(+\infty)\\ &= +\infty\end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\left(-2^{\frac{1}{3}}\right)^-}\frac{3x-1}{2x^3+1} &= \lim_{x\to\left(-2^{\frac{1}{3}}\right)^-}(3x-1)\cdot\lim_{x\to\left(-2^{\frac{1}{3}}\right)^-}\frac{1}{2x^3+1}\\ &= (3\cdot(-2^{\frac{1}{3}})-1)\cdot\frac{1}{0^-}=(3\cdot(-2^{\frac{1}{3}})-1)\cdot(-\infty)\\ &= -\infty,\end{aligned}$$

δηλαδή τα δύο αυτά όρια υπάρχουν (στο εκτεταμένο σύνολο των πραγματικών αριθμών) αλλά είναι διαφορετικά μεταξύ τους. □

0.1.2 Διάφορα ΣΗΜΑΝΤΙΚΑ παραδείγματα υπολογισμού ορίου

▶ **Παράδειγμα 0.1.17.** *Άσκηση 5 της παραγράφου 5.4.1 του κεφ. 10/B κατ.*

Να υπολογίσετε (αν υπάρχει) το όριο της f στο a στις πιο κάτω περιπτώσεις:

(α') $f(x) = \begin{cases} x^2 - x, & x < 2 \\ 3x - 4, & x \geq 2 \end{cases}, \quad a = 2$ **(β')** $f(x) = \begin{cases} |x-2|, & x \leq 3 \\ \dfrac{3}{x} + 1, & x > 3 \end{cases}, \quad a = 3$

Απάντηση.

(α') Υπολογίζουμε τα πλευρικά όρια στο $x = 2$:

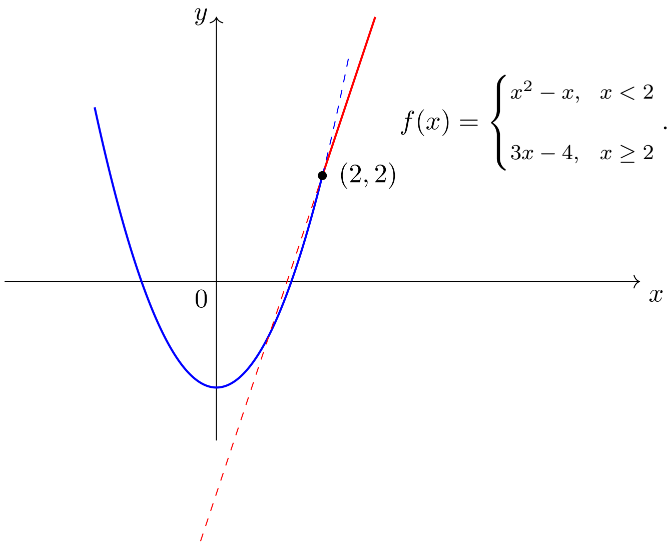
$$\lim_{x \to 2-} f(x) = \lim_{x \to 2-} (x^2 - x) = 2^2 - 2 = 2$$

και

$$\lim_{x \to 2+} f(x) = \lim_{x \to 2+} (3x - 4) = 3 \cdot 2 - 4 = 2$$

και αρα, αφού τα δύο αυτά πλευρικά όρια είναι ίσα μεταξύ τους (και ίσα με 2), έχουμε ότι

$$\lim_{x \to 2} f(x) = 2.$$



(β') Παρατηρούμε πρώτα ότι αν $x \leq 2 \Rightarrow x - 2 \leq 0 \Rightarrow |x - 2| = 2 - x$ και αν $x > 2 \Rightarrow x - 2 > 0 \Rightarrow |x - 2| = x - 2$. Συνεπώς, αν $2 \leq x < 3 \Rightarrow f(x) = |x - 2| = x - 2$ και αν $x < 2 \Rightarrow f(x) = 2 - x$ και φυσικά για $x > 4 \Rightarrow f(x) = \frac{3}{x} + 1$, δηλαδή

$$f(x) = \begin{cases} 2 - x, & x < 2 \\ x - 2, & 2 \leq x < 3 \\ \dfrac{3}{x} + 1, & x > 3 \end{cases}.$$

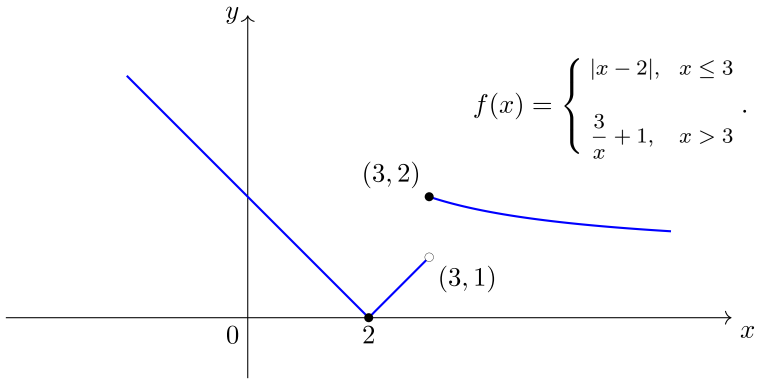
Υπολογίζουμε τα πλευρικά όρια στο $x = 2$:

$$\lim_{x \to 3-} f(x) = \lim_{x \to 3-} (x - 2) = 3 - 2 = 1$$

και

$$\lim_{x\to 3+} f(x) = \lim_{x\to 3+}\left(\frac{3}{x}+\right) = \frac{3}{3}+1=2$$

και αρα, αφού τα δύο αυτά πλευρικά όρια (υπάρχουν στο $\overline{\mathbb{R}}$) είναι διαφορετικά μεταξύ τους, το όριο $\lim_{x\to 3} f(x)$ **δεν υπάρχει**.



□

▶ Παράδειγμα 0.1.18. *Άσκηση 5 της παραγράφου 5.4.2 του κεφ. 10/Β κατ.*

Να υπολογίσετε (αν υπάρχει) το όριο της f στο $x = 0$:

(α') $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2}, & x < 0 \\ \frac{1}{x}, & x > 0 \end{cases}.$

(β') $f(x) = \begin{cases} x, & x \le 0 \\ \frac{1}{x^3}, & x > 0 \end{cases}.$

Απάντηση

(α') Εδώ είναι $D(f) = \mathbb{R} - \{0\}$.
Υπολογίζουμε τα πλευρικά όρια της f στο $x = 0$:

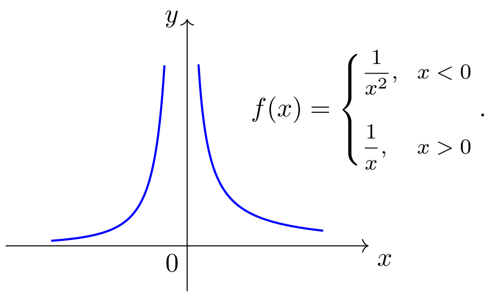
$$\lim_{x\to 0-} f(x) = \lim_{x\to 0-}\frac{1}{x^2} = +\infty,$$

(αφού $x < 0 \Rightarrow x^2 > 0$) και

$$\lim_{x\to 0+} f(x) = \lim_{x\to 0+}\frac{1}{x} = +\infty,$$

(αφού $x > 0$) και αρα

$$\lim_{x\to 0} f(x) = +\infty \in \overline{\mathbb{R}}.$$



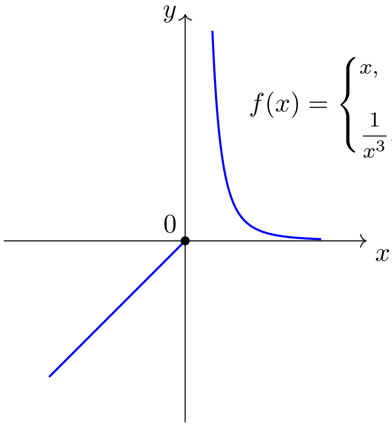
(β') Εδώ είναι $D(f) = \mathbb{R}$.
Υπολογίζουμε τα πλευρικά όρια της f στο $x = 0$:

$$\lim_{x\to 0-} f(x) = \lim_{x\to 0-} x = 0$$

και

$$\lim_{x\to 0+} f(x) = \lim_{x\to 0+} \frac{1}{x^3} = +\infty,$$

(αφού $x > 0 \Rightarrow x^3 > 0$) και αρα αφού τα πλευρικά όρια (ενώ υπάρχουν αμφότερα στο εκτεταμένο σύνολο των πραγματικών αριθμών) είναι διαφορετικά μεταξύ τους, το όριο $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ δεν υπάρχει.



□

▶ Παράδειγμα 0.1.19. *Άσκηση 6 της παραγράφου 5.4.2 του κεφ. 10/Β κατ.*

Να υπολογίσετε (αν υπάρχουν) τα πιο κάτω όρια:

(α') $\lim\limits_{x\to 0-} \left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{|x|}\right)$

(β') $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{x^2 + x - 1}{4 - x}$

(γ') $\lim\limits_{x\to -3} \dfrac{2x^2 + 1}{|x + 3|}$

(δ') $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x + 3}{x^2 - 6x + 9}$

Απάντηση

(α') Η συνάρτηση $f(x) = \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{|x|}$ έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R} - \{0\}$. Επίσης, είναι τμηματικού τύπου: για $x > 0 \Rightarrow |x| = x$ και για $x < 0 \Rightarrow |x| = -x$ και αρα

$$f(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{|x|} = \begin{cases} \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{-x} = \dfrac{2}{x}, & x < 0 \\[2ex] \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x} = 0, & x > 0 \end{cases}.$$

Συνεπώς,

$$\lim_{x\to 0-} f(x) = \lim_{x\to 0-} \frac{2}{x} = 2 \lim_{x\to 0-} \frac{1}{x} = -\infty.$$

Σημείωση: αφού
$$\lim_{x\to 0+} f(x) = \lim_{x\to 0+} 0 = 0,$$
έπεται ότι το όριο $\lim_{x\to 0} f(x)$ δεν υπάρχει.

(β') Το πεδίο ορισμού της f είναι το $\mathbb{R}-\{4\}$.
Υπολογίζουμε τα όρια:
$$\lim_{x\to 4-}(x^2+x-1) = 19$$
και
$$\lim_{x\to 4-}\frac{1}{4-x} = +\infty,$$
(αφού $x<4 \Rightarrow 4-x>0$). Συνεπώς, αφού τα πιο πάνω όρια υπάρχουν (στο $\overline{\mathbb{R}}$), έπεται ότι
$$\lim_{x\to 4-} f(x) = \left(\lim_{x\to 4-}(x^2+x-1)\right)\cdot\left(\lim_{x\to 4-}\frac{1}{4-x}\right) = 19\cdot(+\infty) = +\infty.$$
Εκτελούμε την ίδια διαδικασία για $x\to 4+$:
$$\lim_{x\to 4+}(x^2+x-1) = 19$$
και
$$\lim_{x\to 4+}\frac{1}{4-x} = -\infty,$$
(αφού $x>4 \Rightarrow 4-x<0$). Συνεπώς,
$$\lim_{x\to 4+} f(x) = \left(\lim_{x\to 4+}(x^2+x-1)\right)\cdot\left(\lim_{x\to 4+}\frac{1}{4-x}\right) = 19\cdot(-\infty) = -\infty.$$
Άρα,
$$\lim_{x\to 4-} f(x) \neq \lim_{x\to 4+} f(x)$$
και αρα το όριο $\lim_{x\to 4} f(x)$ δεν υπάρχει.

(γ') Η συνάρτηση $f(x) = \dfrac{2x^2+1}{|x+3|}$ έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}-\{-3\}$. Επίσης, είναι τμηματικού τύπου: για $x>-3 \Rightarrow x+3>0 \Rightarrow |x+3| = x+3$ και για $x<-3 \Rightarrow x+3<0 \Rightarrow |x+3| = -(x+3)$. Συνεπώς,
$$f(x) = \frac{2x^2+1}{|x+3|} = \begin{cases} \dfrac{2x^2+1}{x+3}, & x>-3 \\ -\dfrac{2x^2+1}{x+3}, & x<-3 \end{cases}.$$
Υπολογίζουμε τα όρια:
$$\lim_{x\to -3-}(2x^2+1) = 19$$
και
$$\lim_{x\to -3-} f(x) = -\lim_{x\to -3-}\frac{1}{x+3} = -(-\infty) = +\infty,$$
(αφού $x<-3 \Rightarrow x+3<0$). Συνεπώς, αφού τα πιο πάνω όρια υπάρχουν (στο $\overline{\mathbb{R}}$),
$$\lim_{x\to -3-} f(x) = \left(\lim_{x\to -3-}(2x^2+1)\right)\cdot\left(\lim_{x\to -3-}\frac{1}{x+3}\right) = 19\cdot(+\infty) = +\infty.$$

Εκτελούμε την ίδια διαδικασία για $x \to -3+$:

$$\lim_{x\to -3+}(2x^2+1) = 19$$

και

$$\lim_{x\to -3+} f(x) = \lim_{x\to -3+} \frac{1}{x+3} = +\infty,$$

(αφού $x > -3 \Rightarrow x+3 > 0$). Συνεπώς, αφού τα πιο πάνω όρια υπάρχουν (στο $\overline{\mathbb{R}}$),

$$\lim_{x\to -3+} f(x) = \left(\lim_{x\to -3+}(2x^2+1)\right)\cdot\left(\lim_{x\to -3+}\frac{1}{x+3}\right) = 19\cdot(+\infty) = +\infty.$$

Άρα, αφού τα πλευρικά όρια εκτατέρωθεν του $x=-3$ υπάρχουν (στο $\overline{\mathbb{R}}$) και ισούνται μεταξύ τους (με $+\infty$), έχουμε ότι

$$\lim_{x\to -3} f(x) = +\infty.$$

(δ') $f(x) = \dfrac{x+3}{x^2-6x+9} = \dfrac{x+3}{(x-3)^2}$. Το πεδίο ορισμού της f είναι το $\mathbb{R}-\{3\}$.
Για $x<3$ όπως επίσης και για $x>3$ είναι $(x-3)^2>0$ και αρα

$$\lim_{x\to 3-}\frac{1}{(x-3)^2} = +\infty = \lim_{x\to 3+}\frac{1}{(x-3)^2}$$

και αφού

$$\lim_{x\to 3-}(x+3) = 6 = \lim_{x\to 3+}(x+3),$$

έχουμε ότι

$$\lim_{x\to 3-} f(x) = \left(\lim_{x\to 3-}(x+3)\right)\cdot\left(\lim_{x\to 3-}\frac{1}{(x-3)^2}\right) = 6\cdot(+\infty) = +\infty$$

και

$$\lim_{x\to 3+} f(x) = \left(\lim_{x\to 3+}(x+3)\right)\cdot\left(\lim_{x\to 3+}\frac{1}{(x-3)^2}\right) = 6\cdot(+\infty) = +\infty.$$

Συνεπώς,

$$\lim_{x\to 3} f(x) = +\infty.$$

□

► **Παράδειγμα 0.1.20.** *Έστω η (ρητή) συνάρτηση*

$$f(x) = \frac{x^3-5}{x^2}, \quad x\neq 0.$$

Να υπολογίσετε τα όρια

$$\lim_{x\to 0^-} f(x), \qquad \lim_{x\to 0^+} f(x) \qquad \textit{και} \qquad \lim_{x\to\pm\infty} f(x).$$

Απάντηση.

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to \pm 0^-}(x^3-5)\cdot\frac{1}{x^2} = (-5)\cdot(+\infty) = -\infty,$$

αφού $x\to 0^- \Rightarrow x<0 \Rightarrow x^2>0 \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{1}{x^2} = +\infty.$
Ομοίως,

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = -\infty.$$

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^3-5}{x^2} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^3}{x^2} = \lim_{x\to\pm\infty} x = \pm\infty.$$

□

▶ **Παράδειγμα 0.1.21.** *Έστω η συνάρτηση*

$$f(x) = \frac{e^x}{(x-1)^2}, \quad x \neq 1.$$

Να υπολογίσετε τα όρια

$$\lim_{x\to 1^-} f(x), \qquad \textit{και} \qquad \lim_{x\to 1^+} f(x).$$

Απάντηση. Έχουμε

$$\lim_{x\to 2^-} e^x = e^2 \quad (\text{λόγω της συνέχειας της } x \mapsto e^x)$$

και

$$\lim_{x\to 1^-} (x-1)^2 = 0.$$

Συνεπώς, αφού $x-1<0, \forall x<1 \Rightarrow (x-1)^2>0, \forall x<1$ και έτσι

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} \frac{e^x}{(x-1)^2} = +\infty$$

Ομοίως,

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = +\infty.$$

□

▶ **Παράδειγμα 0.1.22.** *Έστω η συνάρτηση*

$$f(x) = x^3(\ln x)^2, \quad x>0.$$

Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.

Απάντηση. Έχουμε

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} x^3(\ln x)^2 = +\infty,$$

αφού $\lim_{x\to+\infty} x^3 = (+\infty)^3 = +\infty$ και $\lim_{x\to+\infty} (\ln x)^2 = \left(\lim_{x\to+\infty} \ln x\right)^2 = (+\infty)^2 = +\infty.$ □

0.1.3 Ασκήσεις

1. Να υπολογίσετε, αν υπάρχουν, τα πιο κάτω όρια:

(i) $\lim_{x\to -3} 8$

(ii) $\lim_{x\to 2}(x^2+x+35)$

(iii) $\lim_{x\to -1}(x+2)^{2200}$

(iv) $\lim_{x\to -2}\sqrt{3x^2+x+5}$

(v) $\lim_{x\to -4}\sqrt[5]{x^2+x+20}$

(vi) $\lim_{x\to 4}\dfrac{x+9}{2x+5}$

(vii) $\lim_{x\to 6}|x-1|$.

[Απάντηση: (i) 8, (ii) 41, (iii) 1, (iv) $\sqrt{15}$, (v) 2, (vi), 1 (vii) 5]

2. Να υπολογίσετε, αν υπάρχουν, τα πιο κάτω όρια:

(i) $\lim_{x\to \pi}\dfrac{x^6}{\text{συν}x}$

(ii) $\lim_{x\to \pi/4}\dfrac{\text{συν}(x/2)}{x+5}$

(iii) $\lim_{x\to \pi/2}\text{στεμ}x$

(iv) $\lim_{x\to 0}\dfrac{\text{ημ}(8x)}{\text{ημ}(16x)}$

(v) $\lim_{x\to 0}\dfrac{\text{εφ}(3x)}{7x}$

(vi) $\lim_{x\to 3}\dfrac{\text{ημ}(x-3)}{x^3-3x^2}$.

[Απάντηση: (i) $-\pi^6$, (ii) 0, (iii) 1, (iv) $1/2$, (v) $3/7$, (vi) $1/9$]

3. Να υπολογίσετε, αν υπάρχουν, τα πιο κάτω όρια:

(i) $\lim_{x\to -\infty}\sqrt{4x^2-7x+3}$

(ii) $\lim_{x\to +\infty}\dfrac{\sqrt{25x^2+1}}{x+3}$

[Απάντηση: (i) $+\infty$, (ii) 5]

4. Να υπολογίστε, αν υπάρχουν, τα πιο κάτω όρια:

(i) $\lim_{x\to +\infty}(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})$

(ii) $\lim_{x\to +\infty}(\sqrt{x^2+3}-\sqrt{x^2+4})$

(iii) $\lim_{x\to +\infty}\left(\sqrt{\sqrt{x-1}+2}-\sqrt{\sqrt{x+1}+2}\right)$.

[Απάντηση: (i) 0, (ii) 0, (iii) 0]

5. Να υπολογίσετε, αν υπάρχουν, τα πιο κάτω όρια:

(i) $\lim_{x\to 2}\dfrac{1}{x^2-1}$

(ii) $\lim_{x\to 1^+}\dfrac{1}{x^2-1}$

(iii) $\lim_{x\to 1}\dfrac{1}{x^2-1}$

(iv) $\lim_{x\to -1}\dfrac{1}{x^2-1}$

[Απάντηση: (i) $1/3$, (ii) $+\infty$, (iii) δεν υπάρχει, (iv) δεν υπάρχει]

6. Να υπολογίσετε, αν υπάρχουν, τα πιο κάτω όρια:

(i) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x^2-2x-3}{x-1}$

(ii) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x-1}{x^2-2x-3}$

(iii) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x-1}{x^2-2x-3}$

(iv) $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x-1}{x^2-2x-3}$

[Απάντηση: (i) 0, (ii) δεν υπάρχει, (iii) 0, (iv) δεν υπάρχει]

7. Να υπολογίσετε, αν υπάρχουν, τα πιο κάτω όρια:

(i) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x^{215}-x^{11}-3x+1}{x^{216}-3x^{10}+3x+1}$

(ii) $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{x^{25}+x^3-x+2}{x^6-2x^7+3x^2+5}$

(iii) $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{x-7}{x^2-16}$.

[Απάντηση: (i) 0, (ii) $-\infty$, (iii) δεν υπάρχει]

8. Υπολογίστε το πιο κάτω όριο:

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{x^3-x+2}{\sqrt{x^2-5}}.$$

Υπόδειξη: Βγάλτε κοινό παράγοντα το x^2 εντός της ρίζας στον παρονομαστή.
[Απάντηση: $+\infty$]