0.2 Παράγωγος αριθμός και παράγωγος συνάρτηση

Υπενθυμίσεις

$f : A \to \mathbb{R}$ και $g : B \to \mathbb{R}$ δύο συναρτήσεις.[1] Ορίζουμε

• Ως **πρόσθεση** των f και g τη συνάρτηση $f + g : A \cap B \to \mathbb{R}$ με τύπο

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x), \quad \forall x \in A \cap B$$

• Ως **αφαίρεση** των f και g τη συνάρτηση $f - g : A \cap B \to \mathbb{R}$ με τύπο

$$(f - g)(x) = f(x) - g(x), \quad \forall x \in A \cap B$$

• Ως **γινόμενο** των f και g τη συνάρτηση $f \cdot g : A \cap B \to \mathbb{R}$ με τύπο

$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x), \quad \forall x \in A \cap B$$

• Ως **πηλίκο** των f και g τη συνάρτηση $\frac{f}{g} : A \cap B - \{x \in A \cap B \, : \, g(x) \neq 0\} \to \mathbb{R}$ με τύπο

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}, \quad \forall x \in A \cap B - \{x \in A \cap B \, : \, g(x) \neq 0\}$$

[1] υποθέτουμε ότι τα A και B δεν είναι το κενό σύνολο

Διδακτικοί στόχοι:

(i) Κατανόηση του ορισμού της παραγώγου (στιγμιαίος ρυθμός μεταβολής).

(ii) Να καθορίζεται πλήρως η παράγωγος συνάρτηση (πεδίο ορισμού και τύπος). Έμφαση στην παράγωγο ρητής συνάρτησης.

(iii) Εύρεση εξίσωσης εφαπτομένης σε σημείο στο γράφημα (παραγωγίσιμης) συνάρτησης.

(iv) Παραγώγιση σύνθετης συνάρτησης (ο κανόνας της αλυσίδας).

(v) Έννοια πεπλεγμένης συνάρτησης.

(vi) Κατανόηση του ορισμού της παραγώγου ως κλίση της εφαπτομένης σε σημείο στο γράφημα συνάρτησης).

(vii) Έλεγχος παραγωγισιμότητας σε κλαδική συνάρτηση.

Ορισμός 0.2.1. *Παράγωγος αριθμός*

Έστω $f : A \to B$ μια συνάρτηση και έστω $x_0 \in A$. Αν το όριο

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

υπάρχει, το ονομάζουμε **παράγωγο (αριθμό) της f στο** x_0 και το συμβολίζουμε με $f'(x_0)$ ή με $\dfrac{df(x_0)}{dx}$ ή με $\left.\dfrac{df}{dx}\right|_{x=x_0}$ ή (αν $y = f(x)$) με $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{x=x_0}$. Ιδιαίτερα, αν το πιο πάνω όριο είναι πραγματικός αριθμός, τότε λέμε ότι η f είναι **παραγωγίσιμη στο** x_0.

Παρατηρήσεις 0.2.1. ***(α)*** *Η έννοια της παραγώγου είναι σημειακή. Με άλλα λόγια, σε διαφορετικά σημεία της καμπύλης αντιστοιχούν διαφορετικοί παράγωγοι αριθμοί, δηλαδή διαφορετικοί ρυθμοί μεταβολής των τιμών $f(x)$ ως προς τις τιμές του x.*

(β) *Θεωρώντας την αντικατάσταση $h = x - x_0$, έχουμε ότι $x = x_0 + h$ και $x \to x_0 \Rightarrow h := x - x_0 \to 0$ Συνεπώς, η ύπαρξη του (αριθμού) $f'(x_0)$ είναι ισοδύναμη με την ύπαρξη του ορίου*

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}. \tag{1}$$

(γ) *Επειδή η παράγωγος είναι ένα όριο, η ύπαρξή του ισοδυναμεί με την ύπαρξη των πλευρικών ορίων, δηλ. για να υπάρχει η παράγωγος θα πρέπει τα όρια*

$$\lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \quad \text{και} \quad \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

ή αντίστοιχα τα όρια

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \quad \text{και} \quad \lim_{h \to 0^-} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

να υπάρχουν και να είναι ίσα.

▶Παραδείγματα 0.2.1.

1. Θα βρούμε (αν αυτός υπάρχει) τον παράγωγο αριθμό της συνάρτησης f με τύπο $f(x) = 3$, $x \in \mathbb{R}$ στο σημείο $x_0 = 1$. Έχουμε

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{3 - 3}{x - 1} = 0$$

Αυτό σημαίνει ότι το πιο πάνω όριο υπάρχει και είναι =0. Έτσι, ο παράγωγος αρθιμός τηε f στο $x_0 = 1$ είναι ο $f'(1) = 0$. Αυτό είναι αναμενόμενο, αφού η κλίση της ευθείας με εξίσωση $y = 3$ είναι (σταθερή και) ίση με 0.

2. Θα βρούμε (αν αυτός υπάρχει) τον παράγωγο αριθμό της συνάρτησης f με τύπο $f(x) = 2x+1$ στο σημείο $x_0 = -1$ του πεδίου ορισμού της. Έχουμε:

$$\begin{aligned}\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} &= \lim_{x \to -1} \frac{2x + 1 - (2 \cdot (-1) + 1)}{x - (-1)} = \lim_{x \to -1} \frac{2x + 2}{x + 1} \\ &= \lim_{x \to -1} \frac{2(x + 1)}{x + 1} = 2 \lim_{x \to -1} \frac{x + 1}{x + 1} = 2\end{aligned}$$

Άρα, ο παράγωγος αριθμός της f στο $x_0 = -1$ είναι ο $f'(-1) = 2$. Αυτό είναι αναμενόμενο, αφού η κλίση της ευθείας με εξίσωση $y = 2x + 1$ είναι (σταθερή και) ίση με 2.

3. Θα βρούμε (αν αυτός υπάρχει) τον παράγωγο αριθμό της συνάρτησης f με τύπο $f(x) = 3x^2$, $x \in \mathbb{R}$ στο σημείο $x_0 = 2$ του πεδίου ορισμού της. Έχουμε

$$\begin{aligned}\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} &= \lim_{x \to 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} &&= \lim_{x \to 2} \frac{3x^2 - (3 \cdot 2^2)}{x - 2} \\ &= 3 \lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} &&= 3 \lim_{x \to 2} \frac{(x - 2)(x + 2)}{x - 2} \\ &= 3 \lim_{x \to 2} (x + 2) &&= 3 \cdot (2 + 2) = 12\end{aligned}$$

Αυτό σημαίνει ότι το πιο πάνω όριο υπάρχει και είναι ίσο με 12, δηλ. $f'(2) = 12$.

4. Θα βρούμε (αν αυτός υπάρχει) τον παράγωγο αριθμό της συνάρτησης f με τύπο $f(x) = 1/x$, $x \in \mathbb{R}_*$ στο σημείο $x_0 = 3$ του πεδίου ορισμού της. Έχουμε

$$\begin{aligned}\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} &= \lim_{x \to 3} \frac{f(x) - f(3)}{x - 3} &&= \lim_{x \to 3} \frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{3}}{x - 3} \\ &= \lim_{x \to 3} \frac{\frac{3-x}{3x}}{x - 3} &&= -\lim_{x \to 3} \frac{x - 3}{3x(x - 3)} \\ &= -\lim_{x \to 3} \frac{1}{3x} &&= -\frac{1}{9}\end{aligned}$$

Αυτό σημαίνει ότι το πιο πάνω όριο υπάρχει και είναι ίσο με $-\frac{1}{9}$, δηλ. $f'(3) = -\frac{1}{9}$.

ΥΠΕΝΘΥΜΙΣΗ

Στο επίπεδο αυτό, ασχολούμαστε μόνο με συναρτήσεις των οποίων οι συνθέσεις τους έχουν πεδίο ορισμού διάστημα ή ένωση διαστημάτων.

Ορισμός 0.2.2. *Παραγωγίσιμη συνάρτηση*

Μια συνάρτηση $f : I \to \mathbb{R}$ λέγεται **παραγωγίσιμη** όταν είναι παραγωγίσιμη σε *κάθε* σημείο του I.

Όπως έχουμε ήδη αναφερθεί, θα μελετήσουμε συναρτήσεις των οποίων τα πεδία ορισμού είναι διάστημα ή ένωση διαστημάτων για να αποφύγουμε ϊδιάζουσες¨ περιπτώσεις συναρτήσεων. Έτσι, θα πρέπει να *ορίσουμε* την έννοια της παραγώγου όταν το π.ο. της συνάρτησης είναι κλειστό διάστημα[2]

Ορισμός 0.2.4. *Παραγωγίσιμη συνάρτηση σε κλειστό διάστημα*

Μια συνάρτηση $f : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ λέγεται **παραγωγίσιμη** όταν είναι παραγωγίσιμη σε *κάθε* σημείο του (α, β) και επιπλέον τα όρια

$$f'_+(\alpha) := \lim_{x\to\alpha^+} \frac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha} \qquad \text{και} \qquad f'_-(\beta) := \lim_{x\to\beta^-} \frac{f(x) - f(\beta)}{x - \beta}$$

υπάρχουν και είναι πραγματικοί αριθμοί.

• Συνεπώς, αν $f : I \to \mathbb{R}$ και A το σύνολο των σημείων του I στα οποία η f είναι παραγωγίσιμη, δηλ.

$$A = \{x \in I \,:\, \exists\, f'(x)\}$$

τότε κάθε $x \in A$ αντιστοιχίζεται κατα μοναδικό τρόπο (λόγω της μοναδικότητας του ορίου) στον (πραγματικό αριθμό) $f'(x)$. Συνεπώς, ορίζεται καλώς η συνάρτηση $f' : A \to \mathbb{R}$ με $x \mapsto f'(x)$, όπου

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

[2]αυτό οφείλεται στο ότι δεν έχουμε πεί την έννοια του *σημείου συσσώρευσης* συνόλου. Έχοντας ορίσει την έννοια αυτή, τότε μπορούμε να μιλάμε για πλευρικές παραγώγους σε οποιοδήποτε σημείο του π.ο. της συνάρτησης (όχι κατ ανάγκην διάστημα ή ένωση διαστημάτων):

Ορισμός 0.2.3.

Έστω $f : I \to \mathbb{R}$ και έστω $x_0 \in I$. Αν το x_0 είναι από δεξιά σημείο συσσώρευσης του I και επιπλέον υπάρχει το όριο $\lim\limits_{x\to x_0^+} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$, τότε αυτό λέγεται η δεξιά παράγωγος της f στο x_0 ή η πλευρική παράγωγος από τα δεξιά της f στο x_0 και συμβολίζεται με $f'_+(x_0)$.

Ομοίως, αν το x_0 είναι από αριστερά σημείο συσσώρευσης του I και επιπλέον υπάρχει το όριο $\lim\limits_{x\to x_0^-} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$, τότε αυτό λέγεται η αριστερή παράγωγος της f στο x_0 ή η πλευρική παράγωγος από τα αριστερά της f στο x_0 και συμβολίζεται με $f'_-(x_0)$.
Έπεται άμεσα ότι αν το x_0 είναι σημείο συσσώρευσης από δεξιά και από αριστερά του π.ο. μιας συνάρτησης, τότε η $f'(x_0)$ υπάρχει $\Leftrightarrow$ υπάρχουν οι $f'_-(x_0)$ και $f'_+(x_0)$ και ισούνται. Στην περίπτωση αυτή, η κοινή τιμή των πλευρικών παραγώγων είναι ίση με την τιμή του παραγώγου αριθμού στο σημείο αυτό. Επίσης, αν το x_0 είναι σημείο συσσώρευσης του I από δεξιά τότε η $f'(x_0)$ υπάρχει $\Leftrightarrow$ υπάρχει η $f'_+(x_0)$ και ομοίως αν το x_0 είναι σημείο συσσώρευσης του I από αριστερά.

▶ **Παράδειγμα 0.2.1.** *Να βρεθεί με τη χρήση του ορισμού, η παράγωγος συνάρτηση της συνάρτησης*

$$f(x)=\frac{1}{x+4}\quad (x\in\mathbb{R}-\{-4\}),$$

όπου αυτή ορίζεται.

Λύση
Έστω $x\in\mathbb{R}-\{-4\}$ σταθεροποιημένο. Έχουμε

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} &= \lim_{h\to 0}\frac{\frac{1}{(x+h)+4}\frac{1}{x+4}}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\frac{x+4-[(x+h)+4]}{(x+h+4)\cdot(x+4)}}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{x+4-x-h-4}{h\cdot(x+h+4)\cdot(x+4)} = \lim_{h\to 0}\frac{-h}{h\cdot(x+h+4)\cdot(x+4)}\\
&= -\lim_{h\to 0}\frac{h}{h\cdot(x+h+4)\cdot(x+4)} = -\lim_{h\to 0}\frac{1}{(x+h+4)\cdot(x+4)}\\
&= -\frac{1}{(x+4)\cdot(x+4)} = -\frac{1}{(x+4)^2}
\end{aligned}$$

και αφού το $x\neq -4$ ήταν τυχόν, έπεται ότι

$$f'(x)=-\frac{1}{(x+4)^2},\quad \forall x\in\mathbb{R}-\{-4\}.$$

▶ **Παράδειγμα 0.2.2.** *(*)*
Έστω f μια συνάρτηση η οποία ικανοποιεί τη σχέση $f(x+y)=f(x)\cdot f(y)$, $\forall x,y\in\mathbb{R}$ και $f(0)\neq 0$. Αν επιπλέον υπάρχει η $f'(0)$, να δείξετε ότι για κάθε $\xi\in\mathbb{R}-\{0\}$ υπάρχει η $f'(\xi)$ και ισχύει $f'(\xi)=f(\xi)\cdot f'(0)$.

Λύση
Καταρχάς παρατηρούμε ότι $f(0+0)=f(0)\cdot f(0)$, δηλ. $f(0)=f(0)\cdot f(0)$, και αφού $f(0)\neq 0$, έπεται ότι $f(0)=1$. Τώρα, για $\xi\in\mathbb{R}-\{0\}$ σταθεροποιημένο έχουμε

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0}\frac{f(\xi+h)-f(\xi)}{h} &= \lim_{h\to 0}\frac{f(\xi)\cdot f(h)-f(\xi)}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{f(\xi)\cdot(f(h)-1)}{h} = f(\xi)\cdot\lim_{h\to 0}\frac{f(h)-\overbrace{1}^{=f(0)}}{h}\\
&= f(\xi)\lim_{h\to 0}\frac{f(h)-f(0)}{h} = f(\xi)\cdot f'(0)
\end{aligned}$$

και άρα υπάρχει η $f'(\xi)$ και ισχύει

$$f'(\xi)=f(\xi)\cdot f'(0).$$

0.3 Παράγωγος ρητής συνάρτησης

Υπενθύμιση: Ρητή συνάρτηση

Ρητή λέγεται μια συνάρτηση της μορφής $f = \dfrac{P}{Q}$, όπου P και Q πολυώνυμα.
Συνεπώς, αφού τα πολυώνυμα έχουν πεδίο ορισμού όλο το σύνολο $\mathbb{R}$ των πραγματικών αριθμών, το πεδίο ορισμού μιας ρητής συνάρτησης συνάρτησης $f = \dfrac{P}{Q}$ είναι το σύνολο όλων εκείνων των τιμών του $x \in \mathbb{R}$ πλήν εκείνα στα οποία μηδενίζεται ο παρονομαστής, δηλαδή όλα τα $x \in \mathbb{R}$ πλήν τις ρίζες της εξίσωσης $Q(x) = 0$:

$$D(f) = \{x \in \mathbb{R} \ : \ Q(x) \neq 0\}.$$

Επιπλέον, μια ρητή συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη στο πεδίο ορισμού της.
Όπως αναφέραμε πιο πάνω, Είναι σημαντικό να βρίσκουμε τις ρίζες της εξίσωσης $f'(x) = 0$ όπως επίσης και της $f''(x) = 0$ αλλά και στα σημεία στα οποία δεν ορίζεται η f', καθ' όσον μας προσφέρουν χρήσιμες πληροφορίες για τη συμπεριφορά της συνάρτησης και για τη χάραξη της γραφικής της παράστασης. Προς τούτο, πρέπει λοιπόν να φέρνουμε την παράγωγο συνάρτηση **σε παραγοντοποιημένη μορφή**.
Ιδιαιτέρως, οι ρητές συναρτήσεις θα εμφανιστούν πολύ συχνά στη Γ Λυκείου και ως εκ τούτου αφιερώνουμε μια παράγραφο με τις τεχνικές που πρέπει να δεί κανείς για να αποκτήσει ευχέρεια με το χειρισμό τους.

► **Παράδειγμα 0.3.1.** *Δίνεται η (ρητή) συνάρτηση f με τύπο*

$$f(x) = \frac{x-2}{x^2+6x}.$$

(i) *Να βρείτε το πεδίο ορισμού της.*

(ii) *Να βρείτε τα σημεία τομής με τους άξονες των συντεταγμένων.*

(iii) *Να προσδιοριστεί η παράγωγος της f (πεδιο ορισμού και τύπος).*

(iv) *Να βρεθούν οι ρίζες της εξίσωσης $f'(x) = 0$.*

Απάντηση.

(i) Το πεδίο ορισμού $D(f)$ της f είναι όλα τα $x \in \mathbb{R}$ εκτός εκείνα τα οποία $x^2 + 6x = 0$. Έχουμε:

$$x^2 + 4x = 0 \Leftrightarrow x(x+6) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \ \text{ ή } \ x = -6.$$

Άρα,

$$D(f) = \{x \in \mathbb{R} \ : \ x \neq 0, 6\} = \mathbb{R} - \{0, 6\}.$$

(ii) Σημεία τομής με τον άξονα των τετμημένων (άξονα των x):

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{x-2}{x^2+6x} = 0 \Leftrightarrow x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 2$$

και άρα το σημείο είναι το $(2, 0)$.
Δεν έχουμε σημεία τομής με τον άξονα των τεταγμένων (τον άξονα των y) αφού το $x = 0$ δεν ανήκει στο πεδίο ορισμού της f.

(iii) Η συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη στο πεδίο ορισμού της (ως πηλίκο παραγωγίσιμων) με

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(\frac{x-2}{x^2+6x}\right)' = \frac{(x-2)'(x^2+6x)-(x-2)(x^2+6x)'}{(x^2+6x)^2} \\ &= \frac{x^2+6x-(x-2)(2x+6)}{x^2(x+6)^2} = \frac{x^2+6x-(2x^2+2x-12)}{x^2(x+6)^2} \\ &= \frac{x^2+6x-2x^2-2x+12}{x^2(x+6)^2} = \frac{-x^2+4x+12}{x^2(x+6)^2} \\ &= -\frac{x^2-4x-12}{x^2(x+6)^2} = -\frac{(x-6)(x+2)}{x^2(x+6)^2}, \end{aligned}$$

για $x \neq 0, -6$.

(iv) $f'(x) = 0 \Leftrightarrow (x-6)(x+2) = 0 \Leftrightarrow x = -2$ ή $x = 6$.

Σε αρκετές περιπτώσεις, κατά τη διάρκεια παραγώγισης ρητής συνάρτησης $f = P/Q$, ο αριθμητής $P'Q - PQ'$ και παρονοναστής Q^2 έχουν κοινές ρίζες:

▶ **Παράδειγμα 0.3.2.** *Δίνεται η (ρητή) συνάρτηση f με τύπο*

$$f(x) = \frac{2x+1}{x^2-4x+4}.$$

(i) *Να βρείτε το πεδίο ορισμού της.*

(ii) *Να βρείτε τα σημεία τομής με τους άξονες των συντεταγμένων.*

(iii) *Να προσδιοριστεί η παράγωγος της f (πεδιο ορισμού και τύπος).*

(iv) *Να βρεθούν οι ρίζες της εξίσωσης $f'(x) = 0$.*

Απάντηση.

(i) Το πεδίο ορισμού $D(f)$ της f είναι όλα τα $x \in \mathbb{R}$ εκτός εκείνα τα οποία $x^2 - 4x + 4 = 0$. Έχουμε:

$$x^2 - 4x + 4 = 0 \Leftrightarrow (x-2)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 2.$$

Άρα,

$$D(f) = \{x \in \mathbb{R} \ : \ x \neq 2\} = \mathbb{R} - \{2\}.$$

(ii) Σημεία τομής με τον άξονα των τετμημένων (άξονα των x):

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{2x+1}{x^2-4x+4} = 0 \Leftrightarrow 2x+1 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}$$

και άρα έχουμε μόνο ένα σημείο, το $\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$.
Σημεία τομής με τον άξονα των τεταγμένων (άξονα των y):

$$f(0) = \frac{2 \cdot 0 + 1}{0^2 - 4 \cdot 0 + 4} = \frac{1}{4}$$

και άρα έχουμε μόνο ένα σημείο, το $\left(0, \frac{1}{4}\right)$.

(iii) Η συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη στο πεδίο ορισμού της (ως πηλίκο παραγωγίσιμων) με

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(\frac{2x+1}{x^2-4x+4}\right)' = \left(\frac{2x+1}{(x-2)^2}\right)' \\ &= \frac{(2x+1)'(x^2-4x+4)-(2x+1)(x^2-4x+4)'}{(x-2)^4} \\ &= \frac{2(x^2-4x+4)-(2x+1)(2x-4)}{(x-2)^4} \\ &= \frac{2(x-2)^2-2(2x+1)(x-2)}{(x-2)^4} = 2(x-2)\frac{x-2-(2x+1)}{(x-2)^4} \\ &= 2\frac{x-2-2x-1}{(x-2)^3} = 2\frac{-x-3}{(x-2)^3} = -2\frac{x+3}{(x-2)^3}, \end{aligned}$$

για $x \neq 2$.

(iv) $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x+3=0 \Leftrightarrow x=-3$.

0.4 Παραγώγιση βασικών συναρτήσεων

• Παράγωγος της σταθερής συνάρτησης

Έστω η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με τύπο $f(x)=c$, όπου $c\in\mathbb{R}$. Τότε, η f είναι παραγωγίσιμη σε όλο το $\mathbb{R}$ και μάλιστα

$$f'(x)=0, \quad x\in\mathbb{R}.$$

• Παράγωγος της ταυτοτικής συνάρτησης

Έστω η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με τύπο $f(x)=x$, $\forall x\in\mathbb{R}$. Τότε, η f είναι παραγωγίσιμη σε όλο το $\mathbb{R}$ και μάλιστα

$$f'(x)=1, \quad x\in\mathbb{R}.$$

• Παράγωγος συνάρτηση της ν-οστής δύναμης

Έστω η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με τύπο $f(x)=x^\nu$, $\forall x\in\mathbb{R}$, όπου $\nu\in\mathbb{N}$, $\nu\geq 2$. Τότε, η f είναι παραγωγίσιμη σε όλο το $\mathbb{R}$ και μάλιστα

$$f'(x)=\nu\cdot x^{\nu-1}, \quad x\in\mathbb{R}. \tag{2}$$

Παρατηρήσεις 0.4.1.

(i) *Οι περιπτώσεις $\nu=0$ και $\nu=1$ αντιστοιχούν στην παράγωγο της σταθερής και της ταυτοτικής συνάρτησης αντίστοιχα.*

(ii) *Αποδεικνύεται εύκολα ότι ο* (2) *ισχύει και στην περίπτωση που ο ν είναι αρνητικός φυσικός αριθμός (δηλ. $\nu\in\mathbb{Z}$, $\nu\leq 0$) , αλλά αυτό θα το δούμε αργότερα, καθ όσον η απόδειξή του έπεται εύκολα με χρήση του κανόνα παραγώγισης του πηλίκου συναρτήσεων.*

• Παράγωγος συνάρτηση της ρίζας

Η συνάρτηση $f:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$ με τύπο $f(x)=\sqrt{x}$ είναι παραγωγίσιμη στο σύνολο $(0,+\infty)$ και μάλιστα

$$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}, \quad x>0. \tag{3}$$

• Παραγωγισιμότητα της εκθετικής συνάρτησης

Η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με τύπο $f(x)=e^x$ είναι (παντού) παραγωγίσιμη και μάλιστα

$$f'(x)=e^x, \quad \forall x\in\mathbb{R} \tag{4}$$

0.5 Κανόνες παραγώγισης

Έστω $f : B \to C$ και $g : A \to C$ δύο παραγωγίσιμες συναρτήσεις και έστω $c \in \mathbb{R}$ σταθερά. Τότε,

(i) $(c \cdot f)' = c \cdot f'$ **(ii)** $(f \pm g)' = f' \pm g'$

(iii) $(f \cdot g)' = f' \cdot g + g' \cdot f$ **(iv)** $\left(\dfrac{f}{g}\right)' = \dfrac{f' \cdot g - g' \cdot f}{g^2}$, στο σύνολο $A \cap B - \{g(x) = 0\}$

όπου οι πιο πάνω ισότητες νοούνται ως ισότητες συναρτήσεων.

Παρατηρήσεις 0.5.1.

1. Ο κανόνας **(ii)** επεκτείνεται και για περισσότερες από 2 συναρτήσεις:
$$(f_1 + f_2 + \ldots + f_\nu)' = f_1' + f_2' + \ldots + f_\nu'$$
(όπου $f_1, f_2, \ldots, f_\nu$ παραγωγίσιμες συναρτήσεις).

2. Οι κανόνες **(i)** και **(ii)** μας λένε ότι για c, μ πραγματικές σταθερές και f, g παραγωγίσιμες συναρτήσεις, τότε
$$(cf \pm \mu g)' = cf' \pm \mu g'.$$

3. Συνδυάζοντας τις δύο πιο πάνω παρατηρήσεις, έχουμε ότι αν $f_1, f_2, \ldots, f_\nu$ παραγωγίσιμες συναρτήσεις και $c_1, c_2, \ldots, c_\nu \in \mathbb{R}$, τότε
$$(c_1 f_1 + c_2 f_2 + \ldots + c_\nu f_\nu)' = c_1 f_1' + c_2 f_2' + \ldots + c_\nu f_\nu'.$$

4. Από εδώ και πέρα, για συντομία, θα χρησιμοποιούμε τους πιο πάνω κανόνες παραγώγισης απευθείας, χωρίς αναφορά των επιμέρους συναρτήσεων που εμφανίζονται, δεδομένου ότι αυτές είναι παραγωγίσιμες. Για παράδειγμα, αν $f(x) = 2x\,(x \in \mathbb{R})$ και $g(x) = -x^2\,(x \in \mathbb{R})$, τότε $f'(x) = 1$, $g'(x) = -2x$ και άρα
$$(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x) = 1 - 2x.$$
Αντί αυτού, θα γράφουμε (απευθείας)
$$(2x - x^2)' = (2x)' - (x^2)' = 1 - 2x.$$
Βέβαια, για να ορίζεται η παράγωγος συνάρτηση συνδυασμού συναρτήσεων (προσθαφαίρεση, πολλαπλασιασμός και πηλίκο) πρέπει να περιοριστούμε στα (κοινά) σημεία των πεδίων ορισμού των επι μέρους συναρτήσεων στα οποία είναι παραγωγίσιμη. Για παράδειγμα, αν $f(x) = \sqrt{x}\,(x \geq 0)$ και $g(x) = x^2\,(x \in \mathbb{R})$, τότε η $f+g$ ορίζεται στο σύνολο $[0, +\infty)$, είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ και
$$(f+g)'(x) = (\sqrt{x})' + (x^2)' = \frac{1}{2\sqrt{x}} + 2x \quad (x > 0).$$

►**Παραδείγματα 0.5.1.**

1. Έστω η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = x^2 - 2x + 3$. Τότε, η f είναι παραγωγίσιμη παντού και μάλιστα $f'(x) = 2x - 2$, $\forall x \in \mathbb{R}$..

1ος Τρόπος [με τον ορισμό]
Για $x \in \mathbb{R}$ σταθεροποιημένο

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} &= \lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^2-2(x+h)+3-(x^2-2x+3)}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{x^2+2xh+h^2-2x-2h+3-x^2+2x-3}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{2xh+h^2-2h}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{h\cdot(2x+h-2)}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}(2x+h-2)=2x-2=2(x-1)\end{aligned}$$

και αρα $f'(x)=2(x-1)$, $\forall x\in\mathbb{R}$.
2ος Τρόπος [με τις ιδιότητες]
Η f είναι παραγωγίσιμη ως άθροισμα παραγωγίσιμων και μάλιστα $\forall x \in \mathbb{R}$

$$f'(x)=(x^2-2x+3)'=(x^2)'-(2x)'+(3)'=2x-2=2(x-1).$$

2. Έχουμε για κάθε $x \in \mathbb{R}$

$$\left(-\frac{x^3}{4}\right)'=-\frac{1}{4}\cdot(x^3)'=-\frac{3x^2}{4}$$

ή αλλιώς

$$\left(-\frac{x^3}{4}\right)'=-\frac{(x^3)'}{4}=-\frac{3x^2}{4}$$

3. Έχουμε για κάθε $x \in \mathbb{R}$

$$(5x^2)'=5\cdot(x^2)'=5\cdot 2x=10x$$

4. Έχουμε για κάθε $x \in \mathbb{R}$

$$(2x^2\cdot e^x)'=2\cdot(x^2\cdot e^x)'=2[(x^2)'\cdot e^x+(e^x)'\cdot x^2]=2(2x\cdot e^x+e^x\cdot x^2)=2x\cdot e^x\cdot(2+x).$$

5. Έχουμε για $x>0$

$$(x\cdot\sqrt{x})'=(x)'\cdot\sqrt{x}+\sqrt{x}\cdot x=\sqrt{x}+x\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}=\sqrt{x}+\frac{x}{2\sqrt{x}}=\sqrt{x}+\frac{\sqrt{x}}{2}=\frac{3\sqrt{x}}{2}$$

Διαφορετικά,

$$(x\cdot\sqrt{x})'=(x^{\frac{3}{2}})'=\frac{3}{2}\cdot x^{\frac{3}{2}-1}=\frac{3}{2}\cdot x^{\frac{1}{2}}=\frac{3\sqrt{x}}{2}$$

6. Θα βρούμε την παράγωγο της συνάρτησης $f(x)=\frac{x}{e^x}$. Έχουμε για κάθε $x \in \mathbb{R}$

$$f'(x)=\left(\frac{x}{e^x}\right)'=\frac{x'\cdot e^x-x\cdot(e^x)'}{(e^x)^2}=\frac{e^x\cdot(1-x)}{e^{2x}}=\frac{1-x}{e^x}$$

Διαφορετικά,

$$f'(x)=\left(\frac{x}{e^x}\right)'=(x\cdot e^{-x})'=(x)'\cdot e^{-x}+x\cdot(e^{-x})'=\frac{1-x}{e^x}$$

7. Έστω η συνάρτηση
$$f(x) = \frac{x^2}{e^x + 1}, \quad x \in \mathbb{R}.$$
Θα βρούμε την $f'(1)$.
Καταρχάς, η f είναι παραγωγίσιμη (ως πηλίκο τέτοιων) και για κάθε $x \in \mathbb{R}$
$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(\frac{x^2}{e^x+1}\right)' = \frac{(x^2)' \cdot (e^x+1) - (e^x+1)' \cdot x^2}{(e^x+1)^2} \\ &= \frac{2x \cdot (e^x+1) - e^x \cdot x^2}{(e^x+1)^2} = \frac{x \cdot (2e^x - xe^x + 2)}{(e^x+1)^2} \end{aligned}$$
Έτσι,
$$f'(1) = \frac{1 \cdot (2e^1 - 1 \cdot e^1 + 2)}{(e^1+1)^2} = \frac{e+2}{(e+1)^2}$$

8. Αν $f(x) = x^3 - 5x^2 + 6x - 1$, θα βρούμε τις λύσεις της εξίσωσης $f'(x) = 0$.
Είναι $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 3x^2 - 10x + 6$ και αρα
$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 10x + 6 = 0 \Leftrightarrow x_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{7}}{3}.$$

Ασκήσεις

Να βρείτε τις παραγώγους (συναρτήσεις) των πιο κάτω συναρτήσεων:

(i) $f(x) = (2x+3)^2$ **(ii)** $f(x) = (x+1) \cdot e^x$ **(iii)** $f(x) = \frac{e^x+2}{e^x+1}$

(iv) $f(x) = \frac{(x-4)^2}{x+2}$, $x \neq -2$ **(v)** $f(x) = \frac{2}{x+1}$, $x \neq -1$.

Απάντηση:

(i) $f'(x) = 8x + 12,\ x \in \mathbb{R}$ **(ii)** $f'(x) = (x+2)e^x,\ x \in \mathbb{R}$, **(iii)** $f'(x) = -\frac{e^x}{(e^x+1)^2},\ x \in \mathbb{R}$

(iv) $f'(x) = \frac{(x-4)(x+8)}{(x+2)^2}$, $x \neq -2$ **(v)** $f'(x) = -\frac{2}{(x+1)^2},\ x \neq -1$.

0.6 Παράγωγος τριγωνομετρικών συναρτήσεων

Παράγωγος τριγωνομετρικών συναρτήσεων

- Η συνάρτηση $f(x) = \text{ημ}x \; (x \in \mathbb{R})$ είναι παραγωγίσιμη με
$$f'(x) = \text{συν}x \quad (x \in \mathbb{R})$$
- Η συνάρτηση $f(x) = \text{συν}x \; (x \in \mathbb{R})$ είναι παραγωγίσιμη με
$$f'(x) = -\text{ημ}x \quad (x \in \mathbb{R})$$
- Η συνάρτηση $f(x) = \text{εφ}x \; (x \in \mathbb{R} - \{k\pi/2, \, k \in \mathbb{Z}\})$ είναι παραγωγίσιμη με
$$f'(x) = \text{τεμ}^2 x \quad \left(x \in \mathbb{R} - \left\{\frac{k\pi}{2}, \, k \in \mathbb{Z}\right\}\right)$$
- Η συνάρτηση $f(x) = \text{σφ}x \; (x \in \mathbb{R} - \{k\pi, \, k \in \mathbb{Z}\})$ είναι παραγωγίσιμη με
$$f'(x) = -\text{στεμ}^2 x \quad (x \in \mathbb{R} - \{k\pi, \, k \in \mathbb{Z}\})$$
- Η συνάρτηση $f(x) = \text{τεμ}x \; (x \in \mathbb{R} - \{k\pi/2, \, k \in \mathbb{Z}\})$ είναι παραγωγίσιμη με
$$f'(x) = \text{τεμ}x \cdot \text{εφ}x \quad \left(x \in \mathbb{R} - \left\{\frac{k\pi}{2}, \, k \in \mathbb{Z}\right\}\right)$$
- Η συνάρτηση $f(x) = \text{στεμ}x \; (x \in \mathbb{R} - \{k\pi, \, k \in \mathbb{Z}\})$ είναι παραγωγίσιμη με
$$f'(x) = -\text{στεμ}x \cdot \text{σφ}x \quad (x \in \mathbb{R} - \{k\pi, \, k \in \mathbb{Z}\})$$

► **Παράδειγμα 0.6.1.** *Έστω η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = x^3 ημx - 2συνx$. Τότε, η f είναι παραγωγίσιμη παντού (ως γινόμενα και αφαίρεση παραγωγίσιμων συναρτήσεων) και*

$$\begin{aligned} f'(x) &= (x^3 ημx - 2συνx)' = (x^3 ημx)' - 2(συνx)' \\ &= (x^3)' ημx + x^3 (ημx)' - 2(-ημx) \\ &= 3x^2 ημx + x^3 συνx + 2ημx. \end{aligned}$$

Ασκήσεις

Να βρείτε την παράγωγο συνάρτηση των πιο κάτω συναρτήσεων:

(α) $f(x) = 3\text{ημ}x - \text{συν}x, \; x \in \mathbb{R}$

(β) $f(x) = x\text{εφ}x, \; x \in \mathbb{R} - \left\{k\pi + \frac{\pi}{2}\right\}$

(γ) $f(x) = e^x \text{συν}x, \; x \in \mathbb{R}$

(δ) $f(x) = \frac{x^5}{5}\text{τεμ}x, \; x \in \mathbb{R} - \left\{k\pi + \frac{\pi}{2}\right\}$

(ε) $f(x) = \frac{\text{στεμ}x}{1 + \text{σφ}x}, \; x \in \mathbb{R} - \left\{k\pi - \frac{\pi}{4}\right\}$

(στ) $f(x) = \frac{1 + \text{συν}x}{1 + \text{ημ}x}, \; x \in \mathbb{R} - \left\{2k\pi - \frac{\pi}{2}\right\}$

(ζ) $f(x) = \frac{x\text{ημ}x}{x + 1}, \; x \in \mathbb{R} - \{-1\}$

(η) $f(x) = \frac{3}{\text{ημ}x \cdot \text{συν}x}, \; x \in \mathbb{R} - \left\{\frac{k\pi}{2}\right\}$

(θ) $f(x) = x^3 e^x \text{ημ}x, \; x \in \mathbb{R}$

(ι) $f(x) = \frac{x\text{συν}x + \text{ημ}x}{e^x}, \; x \in \mathbb{R}$

Απάντηση:

(α) $f'(x) = 3\text{συν}x + \text{ημ}x,\ x \in \mathbb{R}$ **(β)** $f'(x) = \text{εφ}x + x\text{τεμ}^2 x,\ x \in \mathbb{R} - \left\{k\pi + \dfrac{\pi}{2}\right\}$

(γ) $f'(x) = e^x(\text{συν}x - \text{ημ}x),\ x \in \mathbb{R}$ **(δ)** $f'(x) = x^4\text{τεμ}x\left(1 + \dfrac{x\text{εφ}x}{5}\right),\ x \in \mathbb{R} - \left\{k\pi + \dfrac{\pi}{2}\right\}$

(ε) $f'(x) = \text{στεμ}x \cdot \dfrac{1 - \text{σφ}x}{(1 + \text{σφ}x)^2},\ x \in \mathbb{R} - \left\{k\pi - \dfrac{\pi}{4}\right\}$

(στ) $f'(x) = -\dfrac{\text{ημ}x + \text{συν}x + 1}{(\text{ημ}x + 1)^2},\ x \in \mathbb{R} - \left\{2k\pi - \dfrac{\pi}{2}\right\}$

(ζ) $f'(x) = \dfrac{\text{ημ}x + x \cdot \text{συν}x \cdot (x+1)}{(x+1)^2},\ x \in \mathbb{R} - \{-1\}$

(η) $f'(x) = 12\frac{\text{ημ}^2 x - \text{συν}^2 x}{\text{ημ}^2(2x)},\ x \in \mathbb{R} - \left\{\frac{k\pi}{2}\right\}$

(θ) $f'(x) = x^2 e^x[(x+3)\text{ημ}x + x\text{συν}x],\ x \in \mathbb{R}$

(ι) $f'(x) = -\dfrac{(x+1)\text{ημ}x + (x-2)\text{συν}x}{e^x},\ x \in \mathbb{R}.$

0.7 Παράγωγος Σύνθετης συνάρτησης-Ο κανόνας της Αλυσίδας

Θεώρημα 0.7.1. *Ο κανόνας της Αλυσίδας*

Έστω $g : A \to B$ μια συνάρτηση παραγωγίσιμη σε ένα $x_0 \in A$ και έστω $f : g(A) \subset C \to \mathbb{R}$ μια συνάρτηση παραγωγίσιμη στο $g(x_0)$. Τότε, η σύνθεσή τους $f \circ g$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και μάλιστα

$$(f \circ g)'(x_0) = f'(g(x_0)) \cdot g'(x_0) \tag{5}$$

Η απόδειξη του Θεωρήματος (0.7.1) είναι εκτός σχολικής ύλης.

Σημείωση Θεωρίας (Δουλεύοντας με τον κανόνα της αλυσίδας)

Υπάρχουν 2 τρόποι να παραγωγίσουμε μια σύνθετη συνάρτηση. Ο πρώτος είναι με τον τύπο (5) του πιο πάνω Θεωρήματος ή χρησιμοποιώντας τη συμβολισμό του Leibniz: Θέτοντας $g(x) = u$, ο πιο πάνω τύπος γράφεται:

$$(f \circ g)'(x_0) = \frac{du}{dx} \cdot \frac{df(u)}{du} \equiv u'(x) \cdot \frac{df(u)}{du}.$$

►**Παραδείγματα 0.7.1.**

1. Έστω f μια παραγωγίσιμη συνάρτηση. Θεωρούμε τη συνάρτηση g με τύπο $g(x) = f(2x+1)$. Θα βρούμε την g'.
   Καταρχάς η g είναι παραγωγίσιμη ως σύνθεση των παραγωγίσιμων συναρτήσεων f και h όπου η τελευταία έχει τύπο $h(x) = 2x + 1$.
   1ος τρόπος
   Έχουμε από τον κανόνα της αλυσίδας
   $$g'(x) = (2x+1)' \cdot f'(2x+1) = 2f'(2x+1).$$
   [το $f'(2x+1)$ μένει όπως είναι αφού δε γνωρίζουμε τον τύπο της f ή την παράγωγό της]
   2ος τρόπος
   Θέτουμε $g(x) = u$, δηλ. $u = 2x + 1$. Τότε, $du/dx = 2$ και
   $$g'(x) = u'(x) \cdot \frac{df(u)}{du} = 2 \cdot \frac{df(u)}{du} = 2f'(2x+1).$$

2. Θα παραγωγίσουμε τη συνάρτηση $f(x) = e^{2x}$.
1ος τρόπος
Βλέπουμε τη συνάρτηση ως σύνθεση 2 (παραγωγισίμων) συναρτήσεων: της $g(x) = 2x$ και της $f(x) = e^x$. Τότε, $f'(x) = e^x$ και $g'(x) = 2$. Επίσης,

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = e^{g(x)} = e^{2x}$$

και άρα

$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x) = e^{g(x)} \cdot 2 = 2 \cdot e^{2x}.$$

2ος τρόπος
Θέτουμε $g(x) = u$, δηλ. $u = 2x$. Τότε, $du/dx = 2$ και $f(u) = e^u \Rightarrow df(u)/du = e^u$. Άρα,

$$(f \circ g)'(x)) = u'(x) \cdot \frac{df(u)}{du} = 2 \cdot e^u = 2 \cdot e^{2x}.$$

Παρατήρηση 0.7.1. ***(ΣΗΜΑΝΤΙΚΟ)***
Για τον υπολογισμό της παραγώγου (συνάρτησης) της μορφής $\frac{c}{f}$ όπου $c \in \mathbb{R}$ και $f \neq 0$, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τον κανόνα παραγώγισης του πηλίκου:

$$\left(\frac{c}{f(x)}\right)' = \frac{c' \cdot f(x) - (cf)'(x)}{f^2(x)} = \frac{-c \cdot f'(x)}{f^2(x)} = -c \cdot \frac{f'(x)}{f^2(x)}$$

ή του γινομένου:

$$\left(\frac{c}{f(x)}\right)' = (c \cdot [f(x)]^{-1})' = c \cdot ([f(x)]^{-1})' = c \cdot (-1)[f(x)]^{-1-1} \cdot f'(x) = -c \cdot \frac{f'(x)}{f^2(x)}.$$

Για παράδειγμα,

$$\left(\frac{5}{x^3}\right)' = 5 \cdot (x^{-3})' = 5 \cdot (-3) \cdot (x^{-3-1}) = -\frac{15}{x^4}.$$

► **Παράδειγμα 0.7.1.**

Χρησιμοποιώντας τις πρότερές μας γνώσεις, για να υπολογίσουμε την παράγωγο της συνάρτησης $f(x) = (x+1)^2$, χρησιμοποιούμε τη γνωστή μας ταυτότητα ανάπτυξης του τετραγώνου: $(x+1)^2 = x^2 + 2x + 1$ και τότε $f(x) = (x^2 + 2x + 1)' = 2x + 2,\ x \in \mathbb{R}$.
Τί γίνεται στην περίπτωση που έχουμε μια μεγάλη δύναμη; Π.χ. για τον υπολογισμό της παραγώγου της $f(x) = (2x+1)^{500}$. Υπάρχει βέβαια τύπος ανάπτυξης του πιο πάνω σε άθροισμα μονωνύμων[3] αλλά αυτό είναι μια πολύ χρονοβόρα διαδικασία και θα μας δώσει το ανάπτυγμα σε μη παραγοντοποιημένη μορφή. Εδω είναι μια περίσταση όπου ο κανόνας της αλυσίδας είναι ιδιαίτερα χρήσιμος.
Ποιάς σύνθετης συνάρτησης όμως εδώ πήραμε την παράγωγο για να παραγωγίσουμε (σύνθετα/αλυσιδωτά);
Η πρώτη συνάρτηση απεικονίζει το $x \in \mathbb{R}$ στο $2x+1$, ας την ονομάσουμε f_1, δηλαδή $f_1(x) = 2x+1$.
Η επόμενη συνάρτηση, θα απεικονίζει το $w = 2x+1 = f(x)$ στο w^{500}, έστω f_2, δηλαδή $f_2(w) = w^{500}$.
Τότε

$$\begin{aligned}(f_2 \circ f_1)(x) &= f_2(f_1(x)) = f_2(2x+1) \\ &= (2x+1)^{500}.\end{aligned}$$

[3]Διωνυμικό ανάπτυγμα του Νεύτωνα

Τώρα που γράψαμε την f ως σύνθεση (δύο) συναρτήσεων, ας βρούμε την παράγωγό της: Θέτουμε $w = (f_1)(x) = 2x + 1$. Τότε $w^{500} = f_1^{500}(x) = (2x + 1)^{500}$. Έτσι,

$$f_1'(x) = \frac{dw}{dx} = (2x + 1)' = 2$$

και

$$\frac{d(w^{500})}{dw} = 500w^{499} = 500f_1^{499}(x).$$

Άρα, από **τον κανόνα της αλυσίδας**,

$$\begin{aligned} \frac{d(w^{500})}{dx} &= \frac{dw}{dx} \cdot \frac{d(w^{500})}{dw} \\ &= 500w^{499} \cdot 2 = 1000w^{499} = 1000f_1^{499}(x) \\ &= 1000(2x + 1)^{499}. \end{aligned}$$

Συνοπτικά, θα γράφουμε:

$$\begin{aligned} f'(x) &= ((2x + 1)^{500})' = 500(2x + 1)^{499}(2x + 1)' \\ &= 500(2x + 1)^{499}2 = 1000(2x + 1)^{499}, \ x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Δοκιμάστε να αποδείξετε το πιο κάτω, μιμούμενοι την ανωτέρω διαδικασία:

Άσκηση 0.7.1. *Έστω f συνάρτηση παραγωγίσιμη στο $x_0 \in D(f)$ και έστω ν φυσικός αριθμός $\nu \geq 1$. Τότε*

$$(f^\nu(x_0))' = \nu \cdot f^{\nu-1}(x_0) \cdot f'(x_0). \tag{6}$$

αλλά και κάτι γενικότερο:

Άσκηση 0.7.2. *Έστω f συνάρτηση παραγωγίσιμη στο $x_0 \in D(f)$ και έστω g συνάρτηση παραγωγίσιμη στο $g(x_0) \in D(g)$. Αν ν φυσικός αριθμός $\nu \geq 1$, τότε*

$$(f^\nu(g(x_0)))' = \nu \cdot f^{\nu-1}(g(x_0)) \cdot f'(g(x_0)) \cdot g'(x_0). \tag{7}$$

► **Παράδειγμα 0.7.2.** *Να υπολογίσετε την παράγωγο της συνάρτησης*

$$f(x) = \eta\mu^{11}(x).$$

Απάντηση. Από τον τύπο (6) έχουμε

$$f'(x) = 11\text{ημ}^{10}x \cdot \text{συν}x.$$

► **Παράδειγμα 0.7.3.** *Να υπολογίσετε την παράγωγο της συνάρτησης*

$$f(x) = \eta\mu^{11}(3x^2 + 1).$$

Απάντηση. Από τον τύπο (7) έχουμε

$$\begin{aligned} f'(x) &= 11\text{ημ}^{10}(3x^2 + 1) \cdot (3x^2 + 1)' \cdot \text{συν}(3x^2 + 1) \\ &= 11\text{ημ}^{10}(3x^2 + 1) \cdot 6x \cdot \text{συν}(3x^2 + 1) \\ &= 66x \cdot \text{ημ}^{10}(3x^2 + 1) \cdot \text{συν}(3x^2 + 1). \end{aligned}$$

Χρησιμοποιώντας τον κανόνα της αλυσίδας έχουμε:

Τύπος Συνάρτησης	Παράγωγος συνάρτηση
$f(x)=\sqrt{g(x)},\ g(x)>0,\ \forall x$	$f'(x)=\dfrac{g'(x)}{2\sqrt{g(x)}}$
$f(x)=\text{ημ}^{\nu}x$	$f'(x)=\nu\text{ημ}^{\nu-1}x\cdot\text{συν}x$
$f(x)=\text{συν}^{\nu}x$	$f'(x)=-\nu\text{συν}^{\nu-1}x\cdot\text{ημ}x$
$f(x)=\text{ημ}^{\nu}(g(x))$	$f'(x)=\nu\text{ημ}^{\nu-1}(g(x))\cdot\text{συν}(g(x))\cdot g'(x)$
$f(x)=\text{συν}^{\nu}(g(x))$	$f'(x)=-\nu\text{συν}^{\nu-1}(g(x))\cdot\text{ημ}(g(x))\cdot g'(x)$
$f(x)=\text{εφ}^{\nu}x$	$f'(x)=-\nu\text{εφ}^{\nu-1}x\cdot\text{τεμ}^2x$
$f(x)=\text{εφ}^{\nu}(g(x))$	$f'(x)=-\nu\text{εφ}^{\nu-1}(g(x))\cdot\text{τεμ}^2(g(x))\cdot g'(x)$
$f(x)=e^x$	$f'(x)=e^x$
$f(x)=e^{g(x)}$	$f'(x)=g'(x)e^{g(x)}$
$f(x)=\ln x,\ x>0$	$f'(x)=\dfrac{1}{x},\ x>0$
$f(x)=\ln(g(x)),g(x)>0,\ \forall x>0$	$f'(x)=\dfrac{g'(x)}{g(x)},\ g(x),\ \forall x>0$
$f(x)=a^x,\ a>0,\ a\neq 1$	$f'(x)=\ln a\cdot a^x$
$f(x)=a^{g(x)},\ a>0,\ a\neq 1$	$f'(x)=\ln a\cdot a^{g(x)}\cdot g'(x)$

Ασκήσεις

Να βρείτε την παράγωγο συνάρτηση των πιο κάτω συναρτήσεων:

(α) $f(x)=(2x-3)^4,\ x\in\mathbb{R}$

(β) $f(x)=(x+1)^5\text{ημ}x,\ x\in\mathbb{R}$

(γ) $f(x)=\left(\dfrac{x}{x^2+2}\right)^3,\ x\in\mathbb{R}$

(δ) $f(x)=\ln(x-3),\ x>3$

(ε) $f(x)=\ln[(x-3)^2],\ x\in\mathbb{R}$

(στ) $f(x)=\ln^5(x^2+1),\ x\in\mathbb{R}$

(ζ) $f(x)=x\sqrt{x^4+\text{συν}x}$.

Απάντηση:

(α) $f'(x)=8(2x-3)^3,\ x\in\mathbb{R}$

(β) $f'(x)=(x+1)^4[5\text{ημ}x+(x+1)\text{συν}x],\ x\in\mathbb{R}$

(γ) $f'(x)=-\dfrac{3x^2(x^2-2)}{(x^2+2)^4},\ x\in\mathbb{R}$

(δ) $f'(x)=\dfrac{1}{x-3},\ x>3$

(ε) $f'(x)=\dfrac{2}{x-3},\ x\in\mathbb{R}$

(στ) $f'(x)=\dfrac{10x\ln^4(x^2+1)}{x^2+1},\ x\in\mathbb{R}$

(ζ) $f'(x)=\dfrac{3x^4-x\text{συν}x\text{ημ}x+\text{συν}^2x}{\sqrt{x^4+\text{συν}^2x}},\ x\in\mathbb{R}$.

Πεπλεγμένη εξίσωση, πεπλεγμένη παραγώγιση

Ορισμός
Μια εξίσωση της μορφής $F(x, y) = 0$, όπου F μια συνάρτηση 2 μεταβλητών, λέγεται **πεπλεγμένη**.
Πεπλεγμένη συνάρτηση λέγεται μια συνάρτηση f η οποία καθορίζεται από μια πεπλεγμένη εξίσωση, δηλαδή τέτοια ώστε να ικανοποιεί μια εξίσωση της μορφής $F(x.f(x)) = 0$.

►**Παραδείγματα 0.7.2.**

1. Η εξίσωση $x^2 + y^2 = 1$ είναι μια πεπλεγμένη εξίσωση.
   Η πιο πάνω εξίσωση καθορίζει μια πεπλεγμένη συνάρτηση $y = f(x)$ μέσω της σχέσης $x^2 + y^2(x) = 1$ μόνο αν $x \in [-1, 1]$ και $y \geq 0$ (ή $g \leq 0$) αφού είτε η $y = \sqrt{1 - x^2},\ x \in [-1, 1]$ είτε η $y = -\sqrt{1 - x^2},\ x \in [-1, 1]$ είναιο συναρτήσεις (εδώ θεωρείται ανεξάρτητη μεταβλητή το x).
2. Η συνάρτηση $y = f(x)$ η οποία καθορίζεται από την (πεπλεγμένη) εξίσωση $x^2y^5 + 1 = 0$ είναι μια πεπλεγμένη συνάρτηση.

Όπως φαίνεται και από το παράδειγμα 0.7.2/1, δε σημαίνει ότι κάθε πεπλεγμένη εξίσωση καθορίζει μια πεπλεγμένη συνάρτηση. Το ερώτημα του 'κατω από ποιές συνθήκες μια πεπλεγμένη εξίσωση καθορίζει μια πεπλεγμένη συνάρτηση¨ αποτελεί το θέμα ενός σημαντικού Θεωρήματος, του Θεωρήματος πεπλεγμένων συναρτήσεων του οποίου οι μελέτη (και συνέπειες) ξεφεύγουν από τη θεματολογία του παρόντος κεφαλαίου. Γιάυτό από δώ και πέρα, θα αναφερόμαστε (γενικά) σε καμπύλες σε πεπλεγμένη μορφή.

Η πεπλεγμένη παραγώγιση δίνει σε αρκετές περιπτώσεις πιο άμεσα την παράγωγο απ' ότι η απευθείας παραγώγιση. Για παράδειγμα, έστω η εξίσωση $x^4 + 5y^2 = 3$. Η (εξαρτημένη) μεταβλητή y καθορίζει συνάρτηση αν είτε $y > 0$ είτε αν $y < 0$. Χωρίς να κάνουμε υπόθεση για τις τιμές του y, τότε

$$y = \pm\sqrt{\frac{3 - x^4}{5}}$$

η οποία δεν είναι συνάρτηση.
Έχουμε:

$$\begin{cases} y = \sqrt{\dfrac{3 - x^4}{5}} \Rightarrow y' = -\dfrac{\sqrt{5}x^3}{\sqrt{3 - x^4}} \\ \\ y = -\sqrt{\dfrac{3 - x^4}{5}} \Rightarrow y' = \dfrac{\sqrt{5}x^3}{\sqrt{3 - x^4}} \end{cases}.$$

Τουναντίων, με πεπλεγμένη παραγώγιση:

$$x^4 + 5y^2 = 3 \Rightarrow (x^4 + 5y^2)' = 3' \Rightarrow 4x^3 + 10yy' = 0 \Rightarrow \boxed{y' = \frac{-2x^3}{5y},\quad y \neq 0}$$

και αυτό είναι που μας ενδιαφέρει (δηλαδή η τιμή της παραγώγου σε συγκεκριμένο σημείο $(x_0, y(x_0))$).

Αν λοιπόν δεν ξέρουμε τον τύπο της συνάρτησης $y = f(x)$, τότε ο τρόπος της πεπλεγμένης παραγώγισης μας δίνει τη μορφή της παραγώγου.
Κυρίαρχο στοιχείο στη διαδικασία της πεπλεγμένης παραγώγισης είναι ο κανόνας της αλυσίδας.
Εδώ όμως, θα έχουμε να αντιμετωπίσουμε παραγώγιση συνάρτησης της μορφής $F(x, y) = 0$ όπου η μεταβλητή y είναι η εξαρτημένη (συνάρτηση του x). Οδηγούμαστε έτσι στη μελέτη της παραγώγου ως προς x της συνάρτησης $F(y(x))$. Αν θέσουμε $F = F(y)$ και $y = y(x)$, τότε από τον κανόνα της αλυσίδας, έχουμε:

$$\frac{dF}{dx} = \frac{dF}{dy} \cdot \frac{dy}{dx}.$$

▶Παραδείγματα 0.7.3.

1. Αν $F(y(x)) = y^3$, τότε
$$\frac{dF}{dx} = \frac{dF}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = 3y^2 \cdot \frac{dy}{dx} = 3y^2 \cdot y'.$$

2. Αν $F(y(x)) = y^2 + \text{ημ}(2y)$, τότε
$$\frac{dF}{dx} = \frac{dF}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = (2y + 2\text{συν}(2y)) \cdot \frac{dy}{dx} = 2(y + \text{συν}(2y)) \cdot y'.$$

3. Αν $F(x, y(x)) = x^2y^5 + 1$, τότε
$$\frac{dF}{dx} = \frac{d(x^2y^5 + 1)}{dx} = \frac{d(x^2y^5)}{dx} + \frac{d(1)}{dx} = \frac{d(x^2y^5)}{dx}.$$
Από τον κανόνα παραγώγισης γινομένου συναρτήσεων και τον πιο πάνω τύπο, έχουμε:
$$\begin{aligned} \frac{d(x^2y^5)}{dx} &= \frac{d(x^5)}{dx}y^5 + x^2\frac{d(y^5)}{dx} \\ &= 2xy^5 + x^2 \cdot 5yy' \ = \ 2xy^5 + 10x^2yy'. \end{aligned}$$

▶Παραδείγματα 0.7.4.

1. Έστω η πεπλεγμένη **εξίσωση** $y^6 - 5y = 3x$. Θα προσδιορίσουμε την y'. Προς τούτο εφαρμόζουμε πεπλεγμένη παραγώγιση σε αμφότερα μέλη της πιο πάνω εξίσωσης:
$$\begin{aligned} y^6 - 5y = 3x \quad &\Rightarrow \quad 6y^5y' - 5y' = 3 \cdot 1 \\ &\Rightarrow \quad y' \cdot (6y^5 - 5) = 3 \\ &\Rightarrow \quad y' = \frac{3}{6y^5 - 5}, \end{aligned}$$
για όλα εκείνα τα y για τα οποία $6y^5 - 5 \neq 0$ (δηλαδή ποιά;).

2. Έστω η πεπλεγμένη **εξίσωση** $x^2 + y^2 = R^2$, όπου $R > 0$ (δηλαδή μια γνησίως θετική σταθερά). Θα προσδιορίσουμε την y':
$$x^2 + y^2 = R^2 \quad \Rightarrow \quad 2x + 2yy' = 0 \ \Rightarrow \ y' = -\frac{x}{y},$$
για $y \neq 0$.

3. Έστω η πεπλεγμένη **εξίσωση** $\dfrac{x^2}{A} + \dfrac{y^2}{B} = C$, όπου A, B, C σταθερές με $A \neq B,\ A, B \neq 0$. Θα προσδιορίσουμε την y':'
$$\frac{x^2}{A} + \frac{y^2}{B} = C \quad \Rightarrow \quad \frac{2x}{A} + \frac{2yy'}{B} = 0 \ \Rightarrow \ y' = -\frac{Bx}{Ay},$$
για $y \neq 0$.

4. Έστω η καμπύλη η οποία καθορίζεται από την (πεπλεγμένη) εξίσωση $ye^{-x} - 3x + y^2 = 1$. Έχουμε:
$$\begin{aligned} ye^{-x} - 3x + y^2 = 1 \quad &\Rightarrow \quad \frac{d(ye^{-x} - 3x + y^2)}{dx} = \frac{d(1)}{dx} \\ &\Rightarrow \quad \frac{d(ye^{-x})}{dx} - 3\frac{d(x)}{dx} + \frac{d(y^2)}{dx} = 0 \\ &\Rightarrow \quad \frac{dy}{dx}e^{-x} + y\frac{d(e^{-x})}{dx} - 3 \cdot 1 + 2y\frac{dy}{dx} = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow \quad e^{-x}\frac{dy}{dx} - e^{-x}y - 3 + 2y\frac{dy}{dx} = 0 \\
&\Rightarrow \quad \frac{dy}{dx}(e^{-x} + 2y) = 3 + e^{-x}y \\
&\Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = \frac{3 + e^{-x}y}{e^{-x} + 2y} \overset{\cdot\frac{e^x}{e^x}}{=} \frac{3e^x + y}{1 + 2ye^x}.
\end{aligned}$$

όταν $1 + 2ye^x \neq 0$.

Ασκήσεις

1. Να βρείτε την παράγωγο συνάρτηση $\dfrac{dy}{dx}$ των πιο συναρτήσεων $y = f(x)$ που ορίζονται από τις πιο κάτω (πεπλεγμένες) συναρτήσεις:

   (α) $f(x) = x^2 + 3xy - y^4 = 0,$ **(β)** $yx^2 - 5x + y = 2$

   (γ) $2y = 3x + 5xe^y$ **(δ)** $y^2 - 2y\sqrt{1 + x^2} = -x^2$

   Απάντηση:
   (α) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2x + 3y}{4y^3 - 3x},\ 4y^3 - 3x \neq 0$ **(β)** $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{5 - 2xy}{x^2 + 1}$
   (γ) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{3 + 5e^y}{2 - 5xe^y},\ 2 - 5xe^y \neq 0$ **(δ)** $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + 1}},\ y \neq \sqrt{x^2 + 1}.$

2. (*) Να βρείτε για ποιές τιμές των x και y η πιο κάτω πεπλεμένη εξίσωση καθορίζει συνάρτηση:

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} = 1$$

   (χωρίς να υποθέτουμε ότι η y είναι η εξαρτημένη και x η ανεξάρτητη μεταβλητή).
   Ακολούθως, να βρεθούν οι (αντίστοιχες) παράγωγοι $\dfrac{dy}{dx}$ και $\dfrac{dx}{dy}$.

   Απάντηση:
   Αν x η ανεξάρτητη μεταβλητή τότε είτε $y = \dfrac{5}{3}\sqrt{9 - x^2},\ x \in [-3, 3]$ και τότε $y \in [0, 5]$ είτε $y = -\dfrac{5}{3}\sqrt{9 - x^2},\ x \in [-3, 3]$ και τότε $y \in [-5, 0]$. Με πεπλεγμένη παραγώγιση βρίσκουμε ότι $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{25x}{9y},\ y \neq 0$. Βέβαια, αν αντικαταστήσουμε με y την κάθε μία από τις δύο πιο πάνω συναρτήσεις, βρίσκουμε έκφραση της παραγώγου ως συνάρτηση του x, το οποίο προκύπτει και αν παραγωγίσουμε απ΄ ευθείας τις συναρτήσεις.
   Αντίστοιχα αν y η ανεξάρτητη μεταβλητή.

Εξίσωση εφαπτομένης στο γράφημα συνάρτησης

Ορισμός δες Β′ Λυκείου κατ., Τεύχος Δ/κεφάλαιο 10, σελ. 106

Έστω ότι η **συνάρτηση** f ορίζεται σε ένα ανοικτό διάστημα $\Delta \subseteq \mathbb{R}$, το οποίο περιέχει το x_0. Αν το όριο

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

(δηλαδή ο παράγωγος αριθμός $f'(x_0)$) υπάρχει και είναι πραγματικός αριθμός, τότε η ευθεία που διέρχεται από το σημείο $A(x_0, f(x_0))$ της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f και έχει κλίση $\lambda = f'(x_0)$, ονομάζεται **εφαπτομένη ευθεία** της συνάρτησης f στο σημείο A.

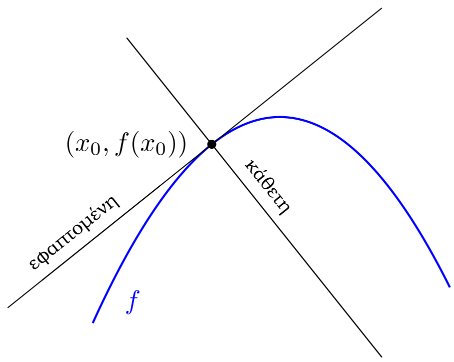
Άρα, η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο $A(x_0, f(x_0))$ είναι η

$$\boxed{y - y_0 = f'(x_0) \cdot (x - x_0)}\ .$$

Η εξίσωση της καθέτου σε σημείο $A(x_0, f(x_0))$ με $f(x_0) \neq 0$ στο γράφημα της συνάρτησης είναι η

$$\boxed{y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)} \cdot (x - x_0)}\ ,$$

αφού $\lambda_{\text{εφ.}} = -\dfrac{1}{\lambda_{\text{κάθ.}}}$.



Στην περίπτωση που η εξίσωση της καμπύλης είναι σε πεπλεγμένη μορφή, για να βρούμε την κλίση της εφαπτομένης της καμπύλης στο σημείο $A(x_0, y_0)$, παραγωγίζουμε πεπλεγμένα την εξίσωσή της και λύνουμε ως προς y'.

► **Παράδειγμα 0.7.4.** *(Ασκήσεις παιδαγωγικής στήριξης μαθητών Γ Λυκείου κατ./2020)*

(i) *Να βρείτε την εξίσωση της κάθετης της καμπύλης με εξίσωση $y = x \ln x$ η οποία είναι παράλληλη στην ευθεία με εξίσωση $2x - 2y + 3 = 0$.*

(ii) *Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτόμενων της καμπύλης με εξίσωση $\dfrac{x^2}{2} - \dfrac{y^2}{7} = 1$, που είναι κάθετες στην ευθεία με εξίσωση $2x + 4y - 3 = 0$.*

Απάντηση.

(i) Η καμπύλη εδώ καθορίζεται από τη **συνάρτηση** $y = x \ln x,\ x > 0$. Είναι

$$y' = (x \ln x)' = x' \ln x + x(\ln x)' = \ln x + x \cdot \frac{1}{x} = \ln x + 1, \quad x > 0.$$

Είναι
$$2x-2y+3=0 \Leftrightarrow y=x+\frac{3}{2}$$
και άρα η κλίση της πιο πάνω ευθείας είναι $\lambda_{(\epsilon)}=1$. Αλλά η εφαπτομένη που ψάχνουμε είναι παράλληλη με την ευθεία αυτή, άρα $\lambda_{(\epsilon)}=\lambda_{\epsilon\phi.}=1$, δηλαδή (αν (x_0,y_0) το σημείο επαφής)
$$y'(x_0)=\lambda_{\epsilon\phi.}=1 \Leftrightarrow \ln x_0+1=1 \Leftrightarrow x_0=1.$$
Τότε, $y_0=y(x_0)=1\ln 1=0$. Έτσι, η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης στο σημείο της $(1,0)$ είναι η $y-0=1\cdot(x-1)$, δηλαδή η
$$\boxed{y=x-1}\,.$$

(ii) Εδώ η καμπύλη καθορίζεται από την πεπλεγμένη εξίσωση $\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{y^2}{7}=1$, την οποία παραγωγίζουμε (πεπλεγμένα):
$$\frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{7}=1 \quad\Leftrightarrow\quad \frac{2x}{2}-\frac{2yy'}{7}=0 \quad\Leftrightarrow\quad y'=\frac{7x}{2y},$$
φυσικά για $y\neq 0$ (όπου το γράφημα της καμπύλης έχει κατακόρυφη εφαπτομένη).
Είναι
$$2x+4y-3=0 \Leftrightarrow y=3-\frac{x}{2}$$
και άρα η κλίση της πιο πάνω ευθείας είναι $\lambda_{(\epsilon)}=-\frac{1}{2}$. Αλλά η εφαπτομένη που ψάχνουμε είναι κάθετη στην ευθεία αυτή, άρα $\lambda_{(\kappa\alpha\theta.)}=-\frac{1}{\lambda_\epsilon}=2$, δηλαδή (αν $(x_0,y_0),\ y_0\neq 0$ το σημείο επαφής), τότε
$$\frac{7x_0}{2y_0}=2 \Leftrightarrow y_0=\frac{7x_0}{4}.$$
Αλλά, το σημείο αυτό ανήκει στην καμπύλη, άρα επαληθεύει την εξίσωσή της:
$$\frac{x_0^2}{2}-\frac{y_0^2}{7}=1$$
και αντιθιστώντας το $y_0=\frac{7x_0}{4}$ βρίσκουμε $x_0^2=16 \Rightarrow x_0=\pm 4$. Στα σημεία αυτά αντιστοιχούν τα $y_0=7$ και $y_0=-7$ αντίστοιχα.
Άρα, έχουμε δύο εφαπτομένες, τις
$$(\epsilon\phi.1):\ y-7=2(x-4) \Leftrightarrow \boxed{y-2x=-1}$$
και
$$(\epsilon\phi.2):\ y+7=2(x+4) \Leftrightarrow \boxed{y-2x=1}\,.$$

◀

Ασκήσεις

1. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης και της κάθετης της καμπύλης με εξίσωση $x^2y-xy^2+6=0$ στο σημείο με τετμημένη $x=1$ και τεταγμένη $y>0$.

   Απάντηση:
   $y=3$ και η εξίσωση της εφαπτομένης είναι $y=-\dfrac{3}{5}(x-1)+3$ και της καθέτου η
   $y=\dfrac{5}{3}(x-1)+3.$

2. Έστω η καμπύλη η οποία καθορίζεται από την (πεπλεγμένη) εξίσωση

$$y^2 + 4x^4 - 10xy + 4x + 13 = 0.$$

Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της καμπύλης στο σημείο $(1, 3)$.

Απάντηση:
(εφ.) : $y = -\frac{7}{2}(x - 1) + 3.$