

# Δυναμοσειρές

Ασκήσεις

<http://ioakimioannis.com>

## Ασκήσεις

① Να βρεθεί η ακτίνα και το διάστημα σύγκλισης των πιο κάτω δυναμοσειρών

$$(i) \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{3^{k+1}}{k} x^k$$

$$(iv) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n} (4x-8)^n$$

$$(ii) \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^k (x+5)^k$$

$$(v) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$$

$$(iii) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{4^n} (x+3)^n$$

$$(vi) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{n^2}$$

### Λύση

$$(i) \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{3^{k+1}}{k} x^k, \quad c_k = \frac{3^{k+1}}{k} x^k \quad (k \in \mathbb{N})$$

Έχουμε ότι συγκλίνει (πάντα) για  $x = 0$ . Θα ελέγξουμε και για ποιά άλλα  $x$  συγκλίνει. Είναι (για  $x$  σταθεροποιημένο)

$$\left| \frac{c_{k+1}}{c_k} \right| = \left| \frac{\frac{3^{k+2}}{k+1} x^{k+1}}{\frac{3^{k+1}}{k} x^k} \right| = \frac{3k}{k+1} \cdot |x| \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} \underbrace{3 \cdot |x|}_{\rho}$$

και

$$\rho < 1 \iff 3 \cdot |x| < 1 \iff |x| < \frac{1}{3} \iff x \in \left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$$

και αρα η ακτίνα σύγκλισης της δυναμοσειράς είναι η  $R = \frac{1}{3}$ . Ελέγχουμε τη σύγκλιση στα άκρα του πιο πάνω διαστήματος:

για  $x = -\frac{1}{3}$  η σειρά που προκύπτει είναι η  $3 \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k}$  η οποία συγκλίνει (από το Κριτήριο

Εναλλάσσουσας Σειράς<sup>1</sup>) και για  $x = \frac{1}{3}$  η σειρά που προκύπτει είναι η  $3 \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k}$  η οποία αποκλίνει<sup>2</sup>

Συνεπώς, το διάστημα σύγκλισης της δυναμοσειράς είναι το  $\left[-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$ .

$$(ii) \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^k (x+5)^k = \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^k (x - (-5))^k, \quad c_k = \left(\frac{3}{4}\right)^k (x+5)^k \quad (k \in \mathbb{N})$$

Έχουμε ότι συγκλίνει (πάντα) για  $x = -5$ . Θα ελέγξουμε και για ποιά άλλα  $x$  συγκλίνει. Είναι (για  $x$  σταθεροποιημένο)

$$\left| \frac{c_{k+1}}{c_k} \right| = \left| \frac{\left(\frac{3}{4}\right)^{k+1} (x+5)^{k+1}}{\left(\frac{3}{4}\right)^k (x+5)^k} \right| = \frac{3}{4} \cdot |x+5| \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} \frac{3}{5} \cdot |x+4| := \rho$$

<sup>1</sup>Μια σειρά της μορφής  $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k$  λέγεται εναλλάσσουσα. Το κριτήριο λέει ότι αν η ακολουθία  $(a_n)_{n \geq 0}$  είναι απολύτως συγκλίνουσα και  $\lim_n a_n = 0$ , τότε η αντίστοιχη εναλλάσσουσα σειρά  $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k$  συγκλίνει.

<sup>2</sup>Ισχύει ότι η σειρά  $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\rho}$  συγκλίνει αν και μόνο αν  $\rho > 1$ .

και

$$\begin{aligned} \rho < 1 &\iff \frac{3}{4} \cdot |x+5| < 1 \iff |x+5| < \frac{4}{3} \iff -\frac{4}{3} < x+5 < \frac{4}{3} \\ &\iff -5 - \frac{4}{3} < x < \frac{4}{3} - 5 \iff -\frac{19}{3} < x < -\frac{11}{3} \\ &\iff x \in \left(-\frac{19}{3}, -\frac{11}{3}\right) \end{aligned}$$

και αρα η ακτίνα σύγκλισης της δυναμοσειράς είναι η  $R = \frac{4}{3}$ . Ελέγχουμε τη σύγκλιση στα άκρα του πιο πάνω διαστήματος:

για  $x = -\frac{19}{3}$  η σειρά που προκύπτει είναι η  $\sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^k$  η οποία αποκλίνει και για  $x = -\frac{11}{3}$

η σειρά που προκύπτει είναι η  $\sum_{k=1}^{+\infty} 1$  η οποία επίσης αποκλίνει. Συνεπώς, το διάστημα σύγκλισης της δυναμοσειράς είναι το  $\left(-\frac{19}{3}, -\frac{11}{3}\right)$ .

(iii)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{4^n} (x+3)^n$  Έχουμε ότι συγκλίνει (πάντα) για  $x = -3$ . Θα ελέγξουμε και για ποιά άλλα  $x$  συγκλίνει: Θα χρησιμοποιήσουμε το Κριτήριο Λόγου.

$$\begin{aligned} L &:= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{(-1)^{n+1} (n+1)}{4^{n+1}} (x+3)^{n+1}}{\frac{(-1)^n n}{4^n} (x+3)^n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{-(n+1)(x+3)}{4n} \right| \\ &= |x+3| \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{4n} = \frac{1}{4} |x+3|. \end{aligned}$$

Επομένως, από το Κριτήριο Λόγου, η Σειρά συγκλίνει για όλα τα  $x \in \mathbb{R}$  για τα οποία  $L < 1$ , δηλ.  $\frac{1}{4}|x+3| < 1 \iff |x+3| < 4$ . Άρα, η ακτίνα σύγκλισης  $R = 4$ . Για όλα τα  $x$  τέτοια ώστε  $|x+3| > 4$ , η σειρά αποκλίνει. Τώρα,  $|x+3| < 4 \iff -4 < x+3 < 4 \iff -7 < x < 1$ , επομένως, το διάστημα σύγκλισης είναι το  $(-7, 1)$ . Ακολούθως, θα ελέγξουμε αν η σειρά συγκλίνει στα άκρα του διαστήματος αυτού, δηλ. στα σημεία  $x = -7, 1$ .

$$x = 1: \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{4^n} 4^n = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n, \quad x = -7: \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{4^n} (-4)^n = \sum_{n=1}^{\infty} n,$$

η οποία αποκλίνει.

η οποία αποκλίνει.

Άρα, τελικά, το διάστημα σύγκλισης είναι το  $(-7, 1)$ .

(iv)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n} (4x-8)^n$

Έχουμε ότι συγκλίνει (πάντα) για  $x = 2$ . Θα ελέγξουμε και για ποιά άλλα  $x$  συγκλίνει:

$$\begin{aligned} L &:= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{2^{n+1}}{n+1} (4x-8)^{n+1}}{\frac{2^n}{n} (4x-8)^n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{2(4x-8)n}{4n+1} \right| \\ &= 2|4x-8| \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = 2|4x-8|. \end{aligned}$$

Επομένως, από το Κριτήριο Λόγου, η Σειρά συγκλίνει για όλα τα  $x \in \mathbb{R}$  για τα οποία  $L < 1$ , δηλ.  $|x-2| < \frac{1}{8}$ . Επομένως, η ακτίνα σύγκλισης είναι  $R = \frac{1}{8}$ . Τώρα,  $|x-2| <$

$\frac{1}{8} \Leftrightarrow -\frac{1}{8} < x-2 < \frac{1}{8} \Leftrightarrow \frac{15}{8} < x < \frac{17}{8}$ , επομένως, το διάστημα σύγκλισης είναι το  $(\frac{15}{8}, \frac{17}{8})$ . Ακολουθώντας, θα ελέγξουμε αν η σειρά συγκλίνει στα άκρα του διαστήματος αυτού, δηλ. στα σημεία  $x = \frac{15}{8}, \frac{17}{8}$ .

$$x = \frac{15}{8} :$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n} \left(\frac{15}{2} - 8\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n},$$

η οποία συγκλίνει.

$$x = \frac{17}{8} :$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n} \left(\frac{17}{2} - 8\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n},$$

η οποία αποκλίνει.

$$(v) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} \quad (x \in \mathbb{R})$$

Έχουμε ότι συγκλίνει (πάντα) για  $x = 0$ . Θα ελέγξουμε και για ποιά άλλα  $x$  συγκλίνει: Θα χρησιμοποιήσουμε το Κριτήριο Ρίζας. Έχουμε

$$c_n := \frac{x^n}{n} \Rightarrow \sqrt[n]{|c_n|} = \sqrt[n]{\frac{x^n}{n}} = \frac{|x|}{\sqrt[n]{n}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} |x|.$$

Επομένως, από το Κριτήριο Ρίζας, η δυναμοσειρά συγκλίνει για όλα τα  $x \in \mathbb{R}$  τέτοια ώστε  $|x| < 1$ , δηλ.  $x \in (-1, 1)$ , επομένως η ακτίνα σύγκλισης  $R = 1$ . Για  $|x| > 1$ , η δυναμοσειρά αποκλίνει. Θα δούμε τώρα αν η δυναμοσειρά συγκλίνει στα άκρα του διαστήματος σύγκλισης, δηλ για  $x = \pm 1$ :

$$x = 1 :$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n},$$

η οποία αποκλίνει.

$$x = -1 :$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n},$$

η οποία συγκλίνει.

Επομένως, το διάστημα σύγκλισης είναι το  $[-1, 1)$ .

$$(vi) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{n^2} \quad (x \in \mathbb{R})$$

Έχουμε ότι συγκλίνει (πάντα) για  $x = 0$ . Θα ελέγξουμε και για ποιά άλλα  $x$  συγκλίνει: Θα χρησιμοποιήσουμε το Κριτήριο Ρίζας. Έχουμε

$$c_n := \frac{x^{2n}}{n^2} \Rightarrow \sqrt[n]{|c_n|} = \sqrt[n]{\frac{x^{2n}}{n^2}} = \frac{|x|^2}{\sqrt[n]{n^2}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x^2.$$

Επομένως, από το Κριτήριο Ρίζας, η δυναμοσειρά συγκλίνει για όλα τα  $x \in \mathbb{R}$  τέτοια ώστε  $x^2 < 1$ , δηλ.  $x \in (-1, 1)$ , επομένως η ακτίνα σύγκλισης  $R = 1$ . Για  $x^2 > 1$ , η δυναμοσειρά αποκλίνει. Θα δούμε τώρα αν η δυναμοσειρά συγκλίνει στα άκρα του διαστήματος σύγκλισης, δηλ για  $x = \pm 1$ :

$$x = 1 :$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2},$$

η οποία συγκλίνει.

$$x = -1 :$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2},$$

η οποία συγκλίνει.

Επομένως, το διάστημα σύγκλισης είναι το  $[-1, 1]$ .

② Υπολογίστε τα πιο κάτω:

$$(i) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} \left(\frac{1}{2}\right)^{2n+1} \qquad (ii) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!}$$

Λύση

(i) Θυμόμαστε ότι

$$\log(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} \quad \text{και (άρρα)} \quad \log(1-x) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}.$$

Έτσι,

$$\begin{aligned} \log(1+x) - \log(1-x) &= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} \\ &= \left( x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} + \dots \right) + \\ &\quad + \left( x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots + \frac{x^n}{n} + \dots \right) \\ &= 2 \left( x + \frac{x^3}{3} + \dots + \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \dots \right) \\ &\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = \frac{1}{2} [\log(1+x) - \log(1-x)]. \end{aligned}$$

Για  $x = \frac{1}{2}$  ο πιο πάνω τύπος μας δίνει

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} \left(\frac{1}{2}\right)^{2n+1} &= \frac{1}{2} \left[ \log\left(1 + \frac{1}{2}\right) - \log\left(1 - \frac{1}{2}\right) \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[ \log\left(\frac{3}{2}\right) - \log\left(\frac{1}{2}\right) \right] = \frac{1}{2} \log\left(\frac{3/2}{1/2}\right) \\ &= \frac{1}{2} \log 3 = \log \sqrt{3}. \end{aligned}$$

(ii) Θυμόμαστε ότι

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \quad \text{και (άρρα)} \quad e^{-x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{n!}.$$

Έτσι,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} = \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$

**Σημείωση:**  $\frac{e^x + e^{-x}}{2} = \cosh x$ .

Για  $x = 1$ , ο πιο πάνω τύπος δίνει

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!} = \frac{e + \frac{1}{e}}{2}.$$