Ασκήσεις στις κωνικές τομές[1]

Ασκήσεις πρώτου μέρους

[1] **(α)** Να δώσετε τον ορισμό του κύκλου.

(β) Έστω η εξίσωση $x^2 + y^2 + 6x - 2y - 15 = 0$.
Να δείξετε ότι η πιο πάνω εξίσωση αναπαριστά κύκλο, του οποίου να βρείτε το κέντρο και το μήκος της ακτίνας του.

[2] Δίνεται η εξίσωση $x^2 + y^2 - 8x + 2y = c$, όπου c (πραγματική) σταθερά.

(α) Να βρείτε την ελάχιστη **ακέραια** τιμή της σταθεράς c για την οποία η πιο πάνω εξίσωση αναπαριστά κύκλο.
(β) Αν η ελάχιστη ακέραια τιμή της σταθεράς c για την οποία η πιο πάνω εξίσωση αναπαριστά κύκλο είναι -16, να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα του κύκλου που προκύπτει, να δείξετε ότι ο κύκλος αυτός εφάπτεται του άξονα των τετμημένων και να γράψετε τις παραμετρικές εξισώσεις του.

[3] **(α)** Να βρεθεί η εξίσωση του κύκλου ο οποίος περνά από την αρχή των αξόνων και εφάπτεται στην ευθεία με εξίσωση $y = 2$ στο σημείο $A(4, 2)$.

(β) Για τον πιο πάνω κύκλο, να βρεθούν τα (υπόλοιπα) σημεία στα οποία ο κύκλος τέμνει τους άξονες των συντεταγμένων.

[4] Δίνεται ο κύκλος $(C):\ x^2 + (y-b)^2 = R^2\ \ (R > 0)$ και σημείο $T(R\text{συν}\theta, R\text{ημ}\theta + b),\ t \in [0, 2\pi),\ \theta \neq 0, \pi$. Η εφαπτομένη του κύκλου στο σημείο T τέμνει στα σημεία Α και Β τον άξονα των τετμημένων και τον άξονα των τεταγμένων αντίστοιχα.

(α) Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης του κύκλου στο σημείο T.
(β) Να βρεθεί η εξίσωση της καμπύλης πάνω στην οποία βρίσκεται ο γεωμετρικός τόπος του μέσου Μ του ευθυγράμμου τμήματος ΑΒ.

[5] **(α)** Να δώσετε τον ορισμό της έλλειψης.

(β) Δίνεται η έλλειψη με εξίσωση $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{25} = 1$.

Να βρείτε τις συντεταγμένες των εστιών και των κορυφών της, την εκκεντρότητά της καθώς και τις εξισώσεις των διευθετουσών της.

(γ) Αν χορδή ΓΔ στην έλλειψη του προηγούμενου ερωτήματος διέρχεται από την εστία Ε, να υπολογίσετε την περίμετρο του τριγώνου ΓΔΕ′.

[6] Να βρεθεί η εξίσωση της έλλειψης (σε καρτεσιανή μορφή), όπως επίσης και η εκκεντρότητά της, αν γνωρίζετε ότι η εστιακή απόσταση $(EE') = 16$ μονάδες, το μήκος του μικρού άξονά της, ο οποίος βρίσκεται στον άξονα των τετμημένων, είναι ίσο με 12 μονάδες.

[1] Οι πιο κάτω ασκήσεις προτάθηκαν είτε σε παλιότερες Παγκύπριες εξετάσεις (κάποιες από τις οποίες τροποποίησα) είτε σε εξετάσεις μαθήματος εισαγωγικής Ανάλυσης σε Πανεπιστήμιο (οι οποίες βέβαια είναι αντιμετωπίσιμες από μαθητές Λυκείου).

[7] Να βρείτε την εξίσωση της έλλειψης η οποία έχει κέντρο την αρχή των αξόνων, το μεγάλο της άξονα πάνω στον άξονα των τεταγμένων, εστιακή απόσταση ίση με 4 μονάδες και η οποία διέρχεται από το σημείο $P(-\sqrt{2}, 2)$.

[8] Δίνεται η έλλειψη $(\Pi):\ x^2 + 3y^2 = 4$.
(α) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης στην έλλειψη (Π) στο σημείο $A(1,1)$ όπως επίσης και την εξίσωση της καθέτου (της εφαπτομένης) στο σημείο αυτό.
(β) Βρείτε τα σημεία τομής της εφαπτομένης του προηγούμενου ερωτήματος με τους άξονες των συντεταγμένων.
(γ) Να γραφούν οι παραμετρικές εξισώσεις της πιο πάνω έλλειψης.

[9] Δίνεται η εξίσωση $\dfrac{x^2}{2-\lambda} + \dfrac{y^2}{1+\lambda} = 1,$ όπου $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 2\}$.
(α) Για ποιές τιμές του λ η πιο πάνω εξίσωση παριστάνει κύκλο και για ποιές έλλειψη;
(β) Για τις τιμές του λ για τις οποίες η πιο πάνω εξίσωση παριστάνει έλλειψη, προσδιορίστε εκείνες για τις οποίες οι εστίες (της έλλειψης) βρίσκονται στον άξονα των τετμημένων και αντίστοιχα εκείνες για τις οποίες οι εστίες της έλλειψης βρίσκονται στον άξονα των τεταγμένων.

[10] Δίνεται η εξίσωση $\dfrac{x^2}{\lambda+1} - \dfrac{y^2}{\lambda-4} = 1,$ όπου $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 4\}$.
(α) Για ποιές τιμές του λ η πιο πάνω εξίσωση παριστάνει κύκλο και για ποιές έλλειψη;
(β) Για τις τιμές του λ για τις οποίες η πιο πάνω εξίσωση παριστάνει έλλειψη, προσδιορίστε εκείνες για τις οποίες οι εστίες (της έλλειψης) βρίσκονται στον άξονα των τετμημένων και αντίστοιχα εκείνες για τις οποίες οι εστίες της έλλειψης βρίσκονται στον άξονα των τεταγμένων.

[11] Δίνεται η έλλειψη με εξίσωση $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{\beta^2} = 1,\quad \beta > a > 0.$
Έστω $P(a\text{συν}\theta, \beta\text{ημ}\theta),\quad 0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ τυχαίο σημείο της έλλειψης. Η κάθετη στην εφαπτομένη της έλλειψης στο σημείο P τέμνει τον άξονα των τεταγμένων στο σημείο K.

(α) Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης και της κάθετης της έλλειψης στο σημείο P.
(β) Να βρεθεί η εξίσωση της καμπύλης στην οποία ανήκει ο γεωμετρικός τόπος του μέσου M του ευθύγραμμου τμήματος PK.

[12] Δίνεται η έλλειψη με εξίσωση $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{\beta^2} = 1,\quad a > \beta > 0.$
Σε τυχαίο σημείο M της έλλειψης φέρουμε εφαπτομένη η οποία τέμνει τον άξονα των τεταγμένων στο σημείο P. Οι ευθείες $A'M$ και AM όπου A' και A τα άκρα του μεγάλου άξονα της έλλειψης, τέμνουν τον άξονα των τεταγμένων στα σημεία Γ και Δ αντίστοιχα.
Να αποδείξετε ότι το σημείο P είναι το μέσον του ΓΔ.

[13] Δίνεται η έλλειψη με εξίσωση $\dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{9} = 1.$
Από σημείο $T(5\text{συν}\theta, 3\text{ημ}\theta),\ \frac{\pi}{2} < \theta < \pi$ της πιο πάνω έλλειψης φέρουμε ευθεία κάθετη στον άξονα των τετμημένων η οποία τέμνει ξανά την έλλειψη στο σημείο P και ευθεία κάθετη στον άξονα των τεταγμένων η οποία τέμνει ξανά την έλλειψη στο σημείο T.

(α) Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας που περνά από τα σημεία P και T.
(β) Να βρεθεί η εξίσωση της καθέτου της έλλειψης στο σημείο T.
(γ) Να βρεθεί η εξίσωση της καμπύλης πάνω στην οποία βρίσκεται ο γεωμετρικός τόπος του σημείο τομής της ευθείας που περνά από τα σημεία P και T και της καθέτου της έλλειψης στο σημείο T.

[14] **(α)** Να δώσετε τον ορισμό της παραβολής.
Για τα επόμενα δύο ερωτήματα, θεωρούμε ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων.
(β) Να αποδείξετε ότι η παραβολή με εστία το σημείο $E(a, 0),\ \ a > 0$ και διευθετούσα την ευθεία με εξίσωση $x + a = 0$ έχει εξίσωση $y^2 = 4ax$.
(γ) Να αποδείξετε ότι η παραβολή με εστία το σημείο $E(0, a),\ \ a > 0$ και διευθετούσα την ευθεία με εξίσωση $y + a = 0$ έχει εξίσωση $x^2 = 4ay$.

[15] Δίνεται η παραβολή με εξίσωση $y^2 = 8x$.
Να βρείτε τις συντεταγμένες της εστίας και την εξίσωση της διευθετούσας της.
Ακολούθως, να γράψετε τις παραμετρικές εξισώσεις της παραβολής.

[16] Δίνεται η παραβολή με εξίσωση $y^2 = 4ax,\ \ a > 0$ με εστία E.
Σε σημείο $T(at^2, 2at),\ t \neq 0$ της πιο πάνω παραβολής φέρουμε την εφαπτομένη, η οποία τέμνει τον άξονα των τεταγμένων στο σημείο P και τον άξονα των τετμημένων στο σημείο T.

(α) Να βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων P και T.
(β) Να δείξετε ότι η γωνία $E\hat{P}T$ είναι ορθή.

[17] Δίνεται η παραβολή με εξίσωση $y^2 = 4ax,\ \ a > 0$ και σημείο της $T(at^2, 2at),\ t > 0$.
Η κάθετη της παραβολής στο σημείο T τέμνει ξανά την παραβολή στο σημείο $P(a\rho^2, 2a\rho)$.

(α) Να δείξετε ότι $t^2 + t\rho + 2 = 0$.
(β) Αν η εφαπτομένη της παραβολής στο σημείο T τέμνει τον άξονα των τετμημένων στο σημείο Β και τον άξονα των τεταγμένων στο σημείο Α και η εφαπτομένη της παραβολής στο σημείο P τέμνει τον άξονα των τετμημένων στο σημείο Δ και τον άξονα των τεταγμένων στο σημείο Γ, να βρεθεί το εμβαδόν των τριγώνων ΟΑΔ και ΟΒΓ (όπου Ο η αρχή των αξόνων).