

ΔΕΙΓΜΑΤΙΚΟ ΔΟΚΙΜΙΟ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

**Β' ΤΕΤΡΑΜΗΝΟΥ**

[ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ - 037]

ΣΧ. ΧΡΟΝΙΑΣ 2021-2022

ΛΥΚΕΙΟ ΒΕΡΓΙΝΑΣ (ΛΑΡΝΑΚΑ)

**Μέρος Α' : Να λύσετε και τις 6 ασκήσεις. Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 5 μονάδες.**

**A1.** Δίνεται η έλλειψη με εξίσωση  $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{36} = 1$ .

**α.** Να βρείτε τις συντεταγμένες των εστιών και των κορυφών της, την εκκενρότητά της καθώς και τις εξισώσεις των διευθετούσών της.

**β.** Αν η χορδή ΣΤ της πιο πάνω έλλειψης διέρχεται από την εστία Ε, να υπολογίσετε την περίμετρο του τριγώνου ΣΤΕ'.

**A2.**

**α.** Να αποδείξετε ότι:  $\int_0^3 |x^2 - x - 2| dx = \frac{31}{6}$ .

**β.** Να υπολογίσετε το εμβαδόν του επιπέδου χωρίου που περικλείεται από την καμπύλη με εξίσωση  $y = x^2 - x - 2$ , τον άξονα των τετμημένων και τις ευθείες  $x = -1$  και  $x = 3$ .

**A3.** Αν  $\Omega = \{1, 2, 3, \dots, 999\}$ , να υπολογίσετε το πλήθος των στοιχείων του  $\Omega$  τα οποία :

**α.** διαιρούνται με το 3 ή το 5

**β.** δε διαιρούνται ούτε με το 3 ούτε με το 5.

**A4.**

**α.** Να βρείτε το πλήθος των αναγραμματισμών της λέξης **ΔΙΕΥΘΕΤΟΥΣΑ**.

**β.** Πόσοι από τους αναγραμματισμούς του ερωτήματος **α.**: **i.** έχουν όλα τα φωνήεντα μαζί, **ii.** αρχίζουν και τελειώνουν με σύμφωνο, **iii.** περιέχουν τη λέξη **ΘΕΟΣ**.

**A5.**

**α.** Να αποδείξετε ότι για κάθε φυσικό αριθμό  $\nu$  ισχύει:

$$\sum_{k=1}^{\nu} (4k^3 - 6k^2 + 2k) = \nu^2 \cdot (\nu^2 - 1).$$

**β.** Να υπολογίσετε την τιμή του φυσικού αριθμού  $m$  ώστε να ισχύει:

$$\sum_{k=9}^{20} (4k^3 - 6k^2 + 2k - m) = 5568.$$

**A6.** Η ευθεία που περνά από τις κορυφές  $A'(-4, 0)$  και  $B(0, 2)$  της έλλειψης με εξίσωση  $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1$

είναι εφαπτομένη της παραβολής με εξίσωση  $y^2 = 4ax$ ,  $a > 0$ .

**α.** Να βρείτε την τιμή του  $a$  και τις συντεταγμένες του σημείου επαφής.

**β.** Να βρείτε τον όγκο του στερεού που παράγεται από την πλήρη περιστροφή γύρω από τον άξονα των τετμημένων, του επιπέδου χωρίου που σχηματίζεται από την ευθεία ΑΒ και το τμήμα της έλλειψης για  $y \geq 0$ .

**γ.** Αν  $a = 1$  να γράψετε, χρησιμοποιώντας ορισμένα ολοκληρώματα, με τι ισούται το εμβαδόν του επιπέδου χωρίου που φράσσεται από την ΑΒ, την παραβολή και το τμήμα της έλλειψης για  $y \geq 0$  (χωρίς να υπολογίσετε τα εν λόγω ορισμένα ολοκληρώματα).

**Μέρος Β' : Να λύσετε και τις 3 ασκήσεις. Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 10 μονάδες.**

**B.1** Δίνεται η παραβολή  $y^2 = 4ax$  με  $a > 0$ , σημείο  $T(at^2, 2at)$ ,  $t \in \mathbb{R}$  της παραβολής και TP εστιακή χορδή της.

Από το σημείο T φέρουμε ευθεία (η) παράλληλη με τον άξονα της παραβολής η οποία τέμνει τη διευθετούσα της παραβολής στο σημείο Δ και θεωρούμε σημείο Σ πάνω στην (η) τέτοιο ώστε το T να είναι το μέσο του ΔΣ. Η κάθετη της παραβολής στο T τέμνει τον άξονα των τεταγμένων στο Λ και η εφαπτομένη της στο σημείο T τέμνει τον άξονα των τεταγμένων στο Ζ.

α' Να δείξετε ότι η κάθετη της παραβολής στο T έχει εξίσωση  $y + tx = 2at + at^3$ .

β' Να βρείτε τις συντεταγμένες του Ζ και να δείξετε ότι η γωνία  $T\hat{Z}E$  είναι ορθή.

γ' Να δείξετε ότι η εξίσωση στην οποία ανήκει ο γεωμετρικός τόπος του σημείο N τέτοιο ώστε το τετράπλευρο ZTAN είναι ορθογώνιο, είναι η  $x = 2a$ .

**B.2** Στην τελετή αποφοίτησης ενός λυκείου θα δοθούν 12 διαφορετικά βραβεία και δεν υπάρχει περίπτωση βραβείου που θα μοιραστεί σε δύο ή περισσότερα άτομα. Να βρείτε με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορούμε να απονεύσουμε τα βραβεία :

α' αν 8 άτομα έχουν δικαίωμα διεκδίκησης των βραβείων

β' αν 20 άτομα έχουν δικαίωμα διεκδίκησης των βραβείων και δεν θα υπάρξει μαθητής/τρια που θα πάρει περισσότερα από ένα βραβείο

γ' αν μόνο σε δύο συγκεκριμένους/ες μαθητές/τριες θα απονευθούν τα βραβεία

δ' αν τα βραβεία θα απονευθούν σε 11 συγκεκριμένους/ες μαθητές/τριες.

**B.3**

α' Έστω  $f$  μια συνεχής συνάρτηση στο  $[0, a]$ . Να αποδείξετε ότι:

$$\int_0^a f(x) dx = \int_0^a f(a-x) dx.$$

β' Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα:

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1 + \epsilon \phi x) dx.$$

Σημείωση: Δίνεται ότι  $\epsilon \phi(a - \beta) = \frac{\epsilon \phi a - \epsilon \phi \beta}{1 + \epsilon \phi a \epsilon \phi \beta}$ .