Αντιπαραδείγματα

Συναρτήσεις

Να δειχθεί ότι η 'πράξη' της σύνθεσης συναρτήσεων **δεν είναι αντιμεταθετική**, δηλαδή $f \circ g \neq g \circ f$.

▶ **Απάντηση**
Για παράδειγμα, $f(x) = x^2 + 1$ και $g(x) = \sqrt{x}$. Είναι $D(f) = \mathbb{R}$ και $D(g) = [0, +\infty)$. Τότε $D(f \circ g) = [0, +\infty)$ με $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = x + 1$, $\forall x \in [0, +\infty)$ και $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = \sqrt{x^2 + 1}$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Οι συναρτήσεις $f \circ g$ και $g \circ f$ δεν είναι ίσες.

Ένα άλλο αντιπαράδειγμα είναι οι συναρτήσεις $f(x) = x^2$ και $g(x) = x + 1$, οι οποίες έχουν το ίδιο πεδίο ορισμού (το $\mathbb{R}$). Είναι $(f \circ g)(x) = (x+1)^2$, $\forall x \in \mathbb{R}$ και $(g \circ f)(x) = x^2 + 1$, $\forall x \in \mathbb{R}$ και $f \circ g \neq g \circ f$, αφού π.χ. $(f \circ g)(-1) = 0 \neq 2 = (g \circ f)(-1)$.

Αποδείξτε ή δώστε αντιπαράδειγμα για καθένα από τους πιο κάτω ισχυρισμούς:

(i) $f \circ (g + h) = f \circ g + f \circ h$.

(ii) $(g + h) \circ f = g \circ f + h \circ f$.

(iii) $\dfrac{1}{f \circ g} = \dfrac{1}{f} \circ g$.

(iv) $\dfrac{1}{f \circ g} = f \circ \left(\dfrac{1}{g}\right)$.

▶ **Απάντηση**

(i) **Λάθος**. Για παράδειγμα, έστω οι συναρτήσεις $f(x) = x^2$, $g(x) = 1$, $h(x) = -1$. Τότε,

$$\begin{aligned} (f \circ (g+h))(x) &= f((g+h)(x)) = f(g(x) + h(x)) \\ &= f(0) = 0 \end{aligned}$$

ενώ

$$\begin{aligned} (f \circ g)(x) + (f \circ h)(x) &= f(g(x)) + f(h(x)) \\ &= f(1) + f(-1) = 2 \end{aligned}$$

(ii) **Σωστό**. Θα δώσουμε απόδειξη. Υποθέτουμε ότι τα πεδία ορισμού των εμπλεκόμενων συναρτήσεων είναι κατάλληλα έτσι ώστε να ορίζονται οι αντίστοιχες συνθέσεις.
Για κάθε x,

$$\begin{aligned} ((g+h) \circ f)(x) &= (g+h)(f(x)) = g(f(x)) + h(f(x)) \\ &= (g \circ f)(x) + (h \circ f)(x). \end{aligned}$$

(iii) Σωστό. Θα δώσουμε απόδειξη. Για κάθε x,

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{f}\circ g\right)(x) &= \left(\frac{1}{f}\right)(g(x)) = \frac{1}{f(g(x))}\\ &= \frac{1}{(f\circ g)(x)} = \left(\frac{1}{f\circ g}\right)(x)\end{aligned}$$

(iv) Λάθος. Για παράδειγμα, έστω οι συναρτήσεις $f(x) = x+1,\ \ g(x) = x^2$. Τότε π.χ.,

$$\left(\frac{1}{f\circ g}\right)(-2) = \frac{1}{(f\circ g)(-2)} = \frac{1}{f(g(-2))} = \frac{1}{f(4)} = \frac{1}{5}$$

ενω

$$\left(f\circ\left(\frac{1}{g}\right)\right)(-2) = f\left(\frac{1}{g(-2)}\right) = f(1/4) = \frac{5}{4}.$$

Έστω $f : X \to Y$ και $g : Y \to Z$ συναρτήσεις. Να δειχθούν τα ακόλουθα:

(i) Αν f, g είναι 1-1, τότε η $g\circ f$ είναι 1-1.

(ii) Αν $g\circ f$ είναι 1-1, τότε η f είναι 1-1. Ισχύει ότι αν $g\circ f$ είναι 1-1, τότε η g είναι 1-1;

(iii) Αν f, g είναι επί, τότε η $g\circ f$ είναι επί.

(iv) Αν $g\circ f$ είναι επί, τότε η g είναι επί. Ισχύει το αντίστροφο; Ισχύει ότι αν $g\circ f$ είναι επί, τότε η f είναι επί;

Λύση

(i) Έστω $x_1, x_2 \in X$ με $(g\circ f)(x_1) = (g\circ f)(x_2)$. Τότε

$$\begin{aligned}(g\circ f)(x_1) = (g\circ f)(x_2) &\implies g(f(x_1)) = g(f(x_2))\\ &\overset{g\ 1-1}{\implies} f(x_1) = f(x_2)\\ &\overset{f\ 1-1}{\implies} x_1 = x_2.\end{aligned}$$

(ii) Έστω $x_1, x_2 \in X$ με $f(x_1) = f(x_2)$. Τότε, αφού $f(x_1), f(x_2) \in D(g) = Y$, είναι $g(f(x_1)) = g(f(x_2))$, δηλαδή $(g\circ f)(x_1) = (g\circ f)(x_2)$ και αφού η $g\circ f$ είναι 1-1 $\Rightarrow x_1 = x_2$.

Δεν ισχύει ότι αν $g\circ f$ είναι 1-1, τότε η g είναι 1-1. Για παράδειγμα, $X = \{1\},\ Y = \{1,2\},\ Z = \{3\}$ και $f(1) = 1,\ g(1) = g(2) = 3$. Τότε,

$$(g\circ f)(1) = g(1) = 3,$$

άρα η $g\circ f$ είναι 1-1 (και επί) αλλά η g δεν είναι 1-1.

(iii) Έστω $z \in Z$. Θα βρούμε $x \in X$ τέτοιο ώστε $(g\circ f)(x) = z$.
g επί και $z \in Z \Rightarrow \exists y \in Y\ :\ g(y) = z$. Τότε, αφού f επί και $y \in Y \Rightarrow \exists x \in X\ :\ f(x) = y$, δηλαδή $g(f(x)) = z$.

(iv) Έστω $z \in Z$. Θα βρούμε $y \in Y$ τέτοιο ώστε $g(y) = z$.
$g\circ f$ επί και $z \in Z \Rightarrow \exists x \in X\ :\ z = g(f(x))$. Το $y = f(x) \in Y$ είναι αυτό που ψάχνουμε.
Το αντίστροφο δεν ισχύει, Για παράδειγμα, $g(x) = x,\ \forall x \in \mathbb{R}$ και $f \equiv 1$. Τότε $(g\circ f)(x) = g(f(x)) = 1,\ \forall x \in \mathbb{R}$ και αρα η $g\circ f$ δεν είναι επί (του $\mathbb{R}$) ενώ η g είναι επί (του $\mathbb{R}$).

Τέλος, θα βρούμε αντιπαράδειγμα για το τελευταίο ερώτημα: π.χ. αυτό του ερωτήματος (ii): η $g\circ f$ είναι επί αλλά η f δεν είναι επί, αφού $2 \notin f(X) = \{1\}$.

◄

Συνέχεια συνάρτησης

Απαντήστε στα πιο κάτω με ΣΩΣΤΟ ή ΛΑΘΟΣ δικαιολογώντας την απάντησή σας (δηλ. αν απαντήσετε με ΣΩΣΤΟ τότε να δώσετε απόδειξη ενώ αν απαντήσετε με ΛΑΘΟΣ να δώσετε αντιπαράδειγμα).

(i) Αν η $f \cdot g$ είναι συνεχής στο σημείο x_0, τότε και οι f, g είναι συνεχείς στο x_0.

(ii) Αν η f/g είναι συνεχής στο σημείο x_0 (με $g(x_0) \neq 0$), τότε και οι f, g είναι συνεχείς στο x_0.

(iii) Αν η $g \circ f$ είναι συνεχής στο σημείο x_0 και η g είναι συνεχής στο $f(x_0)$, τότε η f είναι συνεχής στο x_0.

► **Απάντηση**

(i) **ΛΑΘΟΣ**. Για παράδειγμα, έστω οι συναρτήσεις

$$f(x) = \begin{cases} -1, & x \leq 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases}, \quad \text{και} \quad g(x) = \begin{cases} 1, & x \leq 0 \\ -1, & x > 0 \end{cases}.$$

Οι f και g δεν είναι συνεχείς στο $x_0 = 0$, αλλά η $(f \cdot g)(x) = -1,\ \forall x \in \mathbb{R}$ είναι συνεχής στο σημείο αυτό.

(ii) **ΛΑΘΟΣ**. Για παράδειγμα, έστω οι συναρτήσεις

$$f(x) = \begin{cases} -1, & x \leq 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases}, \quad \text{και} \quad g(x) = \begin{cases} 1, & x \leq 0 \\ -1, & x > 0 \end{cases}.$$

Οι f και g δεν είναι συνεχείς στο $x_0 = 0$, αλλά η $(f \cdot g)(x) = -1,\ \forall x \in \mathbb{R}$ είναι συνεχής στο σημείο αυτό.

(iii) **ΛΑΘΟΣ**. Για παράδειγμα, έστω $g(x) = 1,\ \forall x \in \mathbb{R}$ και $f(x) = \begin{cases} x, & x \neq 2 \\ 1, & x = 2 \end{cases}$. Τότε $(g \circ f)(x) = 1,\ \forall x \in \mathbb{R}$ και αρα η $g \circ f$ είναι συνεχής στο $x_0 = 2$, η g είναι συνεχής στο $f(x_0) = f(2) = 1$ αλλά η f δεν είναι συνεχής στο σημείο $x_0 = 2$:

$$\lim_{x \to 2} f(x) = 2 \neq 1 = f(2).$$

Όριο συνάρτησης

Να απαντήσετε με ΣΩΣΤΟ ή με ΛΑΘΟΣ στα πιο κάτω δίνοντας απόδειξη ή αντιπαράδειγμα αντίστοιχα:

(i) Αν τα όρια $\lim_{x\to x_0} f(x)$ και $\lim_{x\to x_0} g(x)$ δεν υπάρχουν, τότε ούτε το $\lim_{x\to x_0}[f(x)+g(x)]$ υπάρχει.

(ii) Αν το $\lim_{x\to x_0} f(x)$ και το $\lim_{x\to x_0} g(x)$ δεν υπάρχουν, τότε ούτε το $\lim_{x\to x_0}[f(x)\cdot g(x)]$ υπάρχει.

(iii) Αν τα όρια $\lim_{x\to x_0} f(x)$ και $\lim_{x\to x_0}[f(x)+g(x)]$ υπάρχουν, τότε υπάρχει και το $\lim_{x\to x_0} g(x)$.

(iv) Αν το $\lim_{x\to x_0} f(x)$ υπάρχει και το $\lim_{x\to x_0} g(x)$ δεν υπάρχει, τότε υπάρχει το $\lim_{x\to x_0}[f(x)+g(x)]$.

(v) Αν τα όρια $\lim_{x\to x_0} f(x)$ και $\lim_{x\to x_0} f(x)\cdot g(x)$ υπάρχουν, τότε υπάρχει το $\lim_{x\to x_0} g(x)$.

(vi) Αν $f(x) < g(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$ και τα $\lim_{x\to x_0} f(x)$ και $\lim_{x\to x_0} g(x)$ υπάρχουν αμφότερα, τότε $\lim_{x\to x_0} f(x) < \lim_{x\to x_0} g(x)$.

(vii) Αν $\lim_{x\to x_0} f(x) = 0$, τότε είτε $\lim_{x\to x_0} \frac{1}{f(x)} = -\infty$ είτε $\lim_{x\to x_0} \frac{1}{f(x)} = +\infty$.

▶ **Απάντηση**

(i) ΛΑΘΟΣ. Αν το $\lim_{x\to x_0} f(x)$ δεν υπάρχει, τότε ούτε το όριο $\lim_{x\to x_0}(-f(x))$ θα υπάρχει, αλλά

$$\lim_{x\to x_0}[f(x)+(-f(x))] = 0.$$

Για παράδειγμα, $f(x) = \frac{1}{x}$, $x \neq 0$ και $g(x) = -f(x) = -\frac{1}{x}$, $x \neq 0$ ή $f(x) = \frac{1}{x}$, $x \neq 0$ και $g(x) = 1 - f(x) = 1 - \frac{1}{x}$, $x \neq 0$.

(ii) ΛΑΘΟΣ. Για παράδειγμα, έστω οι συναρτήσεις $f(x) = \begin{cases} 1, & x < 0 \\ -1, & x \geq 0 \end{cases}$ και $g(x) = \begin{cases} -1, & x < 0 \\ 1, & x \geq 0 \end{cases}$. Τότε, τα όρια $\lim_{x\to 0} f(x)$ και $\lim_{x\to 0} g(x)$ δεν υπάρχουν (τα πλευρικά όρια είναι διαφορετικά στο κάθε ενα), αλλά $f \cdot g \equiv -1 \Rightarrow \lim_{x\to 0}[f(x)\cdot g(x)] = -1$.

(iii) ΣΩΣΤΟ. Είναι $g = (f+g) - f$ και αρα αφού τα όρια $\lim_{x\to x_0} f(x)$ και $\lim_{x\to x_0}[f(x)+g(x)]$ υπάρχουν, τότε θα υπάρχει και το $\lim_{x\to x_0} g(x)$.

(iv) ΛΑΘΟΣ. Αν το όριο $\lim_{x\to x_0}[f(x)+g(x)]$ υπήρχε, τότε από το προηγούμενο ερώτημα, θα υπήρχε και το όριο $\lim_{x\to x_0} g(x)$, άτοπο.
Συνεπώς, το ερώτημα αυτό είναι μια αναδιατύπωση του προηγούμενου.

(v) ΛΑΘΟΣ. Για παράδειγμα, $f(x) = x^2$ και $g(x) = 1/x$, $x \neq 0$. Τότε $\lim_{x\to 0} f(x) = 0 = \lim_{x\to 0}[f(x)\cdot g(x)]$, αλλά το $\lim_{x\to 0} g(x)$ δεν υπάρχει. Διαφορετικά, θεωρούμε τις $f(x) = x$ και $g(x) = \sin(1/x)$. Το $\lim_{x\to 0} g(x)$ δεν υπάρχει, ενώ το $\lim_{x\to 0}[f(x)\cdot g(x)] = \lim_{x\to 0} x\sin(1/x)$ υπάρχει (και είναι ίσο με 0).

Σημείωση: Αν όμως το όριο $\lim_{x\to x_0} f(x)$ υπάρχει και είναι διάφορο του μηδενός και το

$\lim\limits_{x \to x_0} [f(x) \cdot g(x)]$ υπάρχει, τότε υπάρχει το $\lim\limits_{x \to x_0} g(x)$.
Πράγματι, αν $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L_1 \neq 0$ και $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) \cdot g(x) = L_2$, τότε

$$\lim_{x \to x_0} g(x) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) \cdot g(x)}{f(x)} = \frac{\lim\limits_{x \to x_0} f(x) \cdot g(x)}{\lim\limits_{x \to x_0} f(x)} = \frac{L_2}{L_1}.$$

Βέβαια, για να είναι πλήρης η απόδειξη, πρέπει να αποδείξουμε ότι υπάρχει μια (ανοικτή) περιοχή του x_0 για την οποία $f(x) \neq 0$. Αυτό έπεται με χρήση του ορισμού του ορίου: υποθέτουμε χωρίς απώλεια της γενικότητας ότι $L_1 > 0$. Αφού $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L_1$, για $\epsilon = L_1/2$, υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε

$$\forall x \text{ με } 0 < |x - x_0| < \delta \;\Rightarrow\; |f(x) - L_1| < \frac{L_1}{2},$$

δηλαδή

$$\forall x \text{ με } 0 < |x - x_0| < \delta \;\Rightarrow\; 0 < \frac{L_1}{2} < f(x).$$

(vi) ΛΑΘΟΣ. Για παράδειγμα, έστω οι συναρτήσεις $f \equiv 0$ και $g(x) = \begin{cases} x, & x > 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$. Τότε, $f(x) < g(x),\ \forall x \in \mathbb{R}$ αλλά

$$\lim_{x \to 0} f(x) = 0 = \lim_{x \to 0} g(x).$$

(vii) ΛΑΘΟΣ. Για παράδειγμα, έστω η συνάρτηση $f(x) = x, \forall x \in \mathbb{R}$. Τότε $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$ ενω $\lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{1}{f(x)} = -\infty$ και $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{1}{f(x)} = +\infty$, άρα το $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{f(x)}$ δεν υπάρχει.