Περίληψη

(1) Ο $\Sigma-$ συμβολισμός:
Έστω $(a_\nu)_\nu$ ακολουθία πραγματικών αριθμών. Το άθροισμα των όρων a_k από το 1 ως το ν (για οποιοδήποτε $\nu \in \mathbb{N}$) γράφεται συμβολικά (για λόγους συντομίας)

$$\sum_{k=1}^{\nu} a_k,$$

δηλαδή

$$\sum_{k=1}^{\nu} a_k = a_1 + a_1 + \ldots + a_\nu.$$

Συνεπώς, το πιο πάνω σύμβολο δηλώνει ότι πρέπει να προσθέσουμε όλους τους όρους της ακολουθίας που πήραμε θέτοντας τιμές για το k από το 1 ως το ν.

Άνω όριο
(της άθροισης)

Σίγμα
(άθροισμα)

$$\sum_{k=1}^{\nu} a_k$$

Γενικός όρος

Δείκτης
(της άθροισης)

Κάτω όριο
(της άθροισης)

(2) Ιδιότητα του $\Sigma-$ συμβολισμού:
Έστω $(a_\nu)_\nu$ και $(b_\nu)_\nu$ ακολουθίες πραγματικών αριθμών και $\lambda \in \mathbb{R}$. Τότε, για $\nu \in \mathbb{N}$ σταθεροποιημένο,

$$\sum_{k=1}^{\nu} (\lambda a_k + b_k) = \lambda \cdot \sum_{k=1}^{\nu} a_k + \sum_{k=1}^{\nu} b_k.$$

(3) Αριθμητική πρόοδος
• Μια ακολουθία πραγματικών αριθμών $(a_\nu)_\nu$ λέγεται **αριθμητική πρόοδος** αν ισχύει

$$a_{\nu+1} - a_\nu = \delta, \quad \forall \nu \in \mathbb{N},$$

όπου δ είναι ένας σταθερός αριθμός, ο οποίος καλείται η **διαφορά** της προόδου.

• Γενικός όρος αριθμητικής προόδου:

$$a_\nu = a_1 + (\nu - 1)\delta, \quad \nu \in \mathbb{N}.$$

• Άθροισμα ν πρώτων όρων αριθμητικής προόδου $(a_\nu)_\nu$:

$$\sum_{k=1}^{\nu} a_k = \frac{\nu(a_1 + a_\nu)}{2} = \frac{\nu[2a_1 + (\nu - 1)\delta]}{2}.$$

(4) Γεωμετρική πρόοδος
• Μια ακολουθία πραγματικών αριθμών $(a_\nu)_\nu$ λέγεται **γεωμετρική πρόοδος** αν ι-σχύει

$$a_{\nu+1} = \lambda \cdot a_1, \quad \forall \nu \in \mathbb{N},$$

όπου λ είναι ένας σταθερός αριθμός, ο οποίος καλείται ο **λόγος** της προόδου.

- Γενικός όρος αριθμητικής προόδου:

$$a_\nu = \lambda^{\nu-1} \cdot a_1, \quad \nu \in \mathbb{N}.$$

- Άθροισμα ν πρώτων όρων γεωμετρικής προόδου $(a_\nu)_\nu$:

$$\sum_{k=1}^{\nu} a_k = \begin{cases} \dfrac{a_1(1-\lambda^\nu)}{1-\lambda}, & \lambda \neq 1 \\ \nu \cdot a_1, & \lambda = 1 \end{cases}.$$

- Άθροισμα άπειρων όρων γεωμετρικής προόδου $(a_\nu)_\nu$:

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu = \frac{a_1}{1-\lambda}, \quad \text{για } |\lambda| < 1.$$

(5) Έστω $(a_\nu)_\nu$ ακολουθία πραγματικών αριθμών. Τότε ορίζεται μια νέα ακολουθία $(S_\nu)_\nu$ με γενικό όρο

$$S_\nu = \sum_{k=1}^{\nu} a_k = a_1 + a_2 + \ldots + a_\nu.$$

Κάθε όρος S_ν της πιο πάνω ακολουθίας καλείται **το μερικό** ($\nu-$**οστό) άθροισμα της ακολουθίας** $(a_\nu)_\nu$.

Το όριο της πιο πάνω ακολουθίας καλείται η **(άπειρη) σειρά των πραγματικών αριθμών** $a_\nu, \ \nu \in \mathbb{N}$ και συμβολίζεται με

$$\sum_{k=1}^{+\infty} a_k.$$

Κάθε όρος $a_k, \ k = 1, 2, \ldots$ καλείται **όρος της σειράς**.
Όταν το όριο $\lim_{\nu \to +\infty} S_\nu$ υπάρχει (και είναι πραγματικός αριθμός, έστω s), τότε λέμε ότι η σειρά **συγκλίνει** στον πραγματικό αριθμό s και γράφουμε

$$s = \sum_{k=1}^{+\infty} a_k.$$

Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι **το άθροισμα της σειράς είναι ίσο με** s. Στην αντίθετη περίπτωση (δηλαδή όταν το όριο αυτό δεν υπάρχει) αλλά και στην περίπτωση που το όριο είναι είτε $+\infty$ είτε $-\infty$, τότε λέμε ότι η σειρά **αποκλίνει**.

(6) Ειδικά (πεπερασμένα) αθροίσματα:

$$\sum_{k=1}^{\nu} k = \frac{\nu(\nu+1)}{2}, \quad \sum_{k=1}^{\nu} k^2 = \frac{\nu(\nu+1)(2\nu+1)}{6}$$

$$\sum_{k=1}^{\nu} k^3 = \left(\sum_{k=1}^{\nu} k\right)^2 = \frac{\nu^2(\nu+1)^2}{4}.$$

(7) Τηλεσκοπική σειρά:
Μια σειρά πραγματικών αριθμών $a_\nu, \ \nu \in \mathbb{N}$ λέγεται **τηλεσκοπική** αν κάθε όρος της γράφεται $a_\nu = b_\nu - b_{\nu+1}$, όπου b_ν οι όροι μιας άλλης σειράς πραγματικών αριθμών. Στην περίπτωση τηλεσκοπικής σειράς, μπορούμε να γράψουμε τα μερικά αθροίσματά της ως $S_\nu = b_1 - b_{\nu+1}$, γεγονός το οποίο μας βοηθά στο να αποφανθούμε ως προς της σύγκλισή της, αναγόμενοι στη σύγκλιση της άλλης σειράς πραγματικών αριθμών.