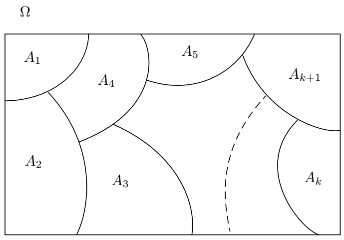
Το Θεώρημα ολικής πιθανότητας

Διαμέριση του δειγματικού χώρου Ω καλείται οποιαδήποτε οικογένεια $A = \{A_k : k \in I\}$ ενδεχομένων (I πεπερασμένο ή αριθμησίμως άπειρο σύνολο δεικτών) τέτοια ώστε

(i) $A_i \cap A_j = \emptyset, \quad \forall i, j \in I$ με $i \neq j$, δηλαδή τα A_k είναι κατα ζεύγη ξένα (διαζευκτά),

(ii) $\bigcup_{k \in I} A_k = \Omega$, δηλαδή η ένωση των στοιχείων της οικογένειας A είναι όλος ο δειγματικός χώρος Ω.

(iii) $P(A_k) > 0, \ \forall k \in I$.



Σχήμα 1: Διαμέριση του δειγματικού χώρου

Θεώρημα 0.0.1. *(Θεώρημα (νόμος) ολικής πιθανότητας)*
Έστω $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ χώρος πιθανότητας και έστω $A = \{A_k : k \in \mathbb{N}\}$ μια διαμέριση του Ω. Τότε, για κάθε $B \in \mathcal{A}$,

$$P(B) = \sum_{k=1}^{\infty} P(B \cap A_k). \tag{1}$$

Παρατήρηση 0.1.

(i) *Το άθροισμα (1) γράφεται ως*

$$P(B) = \sum_{k=1}^{\infty} P(A_k) P(B|A_k) \tag{2}$$

και τη μορφή του αυτή θα χρησιμοποιούμε από δω και πέρα.

(ii) *Αρκετές φορές στον ορισμό της διαμέρισης δεν περιλαμβάνεται η συνθήκη (iii). Αυτό όμως δεν αλλάζει την ουσία του ορισμού, αφού ξέρουμε ότι για κάθε ενδεχόμενο $A \in \mathcal{A}$ είναι $P(A) \geq 0$. Με άλλα λόγια, απαιτούμε τα σύνολα της διαμέρισης να είναι μη κενά.* ■

Απόδειξη. (του Θεωρήματος ολικής πιθανότητας)
Έστω $B \in \mathcal{A}$. Τα ενδεχόμενα $A_k \cap B$ είναι διαζευκτά για κάθε $k \in \mathbb{N}$: για κάθε $i, j \in \mathbb{N}$ με $i \neq j$,

$$(A_i \cap B) \cap (A_j \cap B) = (A_i \cap A_j) \cap B = \emptyset,$$

αφού τα A_k είναι διαζευκτά. Επίσης, αφού

$$\bigcup_{k \in \mathbb{N}} (A_k \cap B) = \left(\bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k \right) \cap B = \Omega \cap B = B,$$

παίρνουμε

$$P(B) = \sum_{k \in \mathbb{N}} P(A_k \cap B).$$

Από το πολλαπλασιαστικό Θεώρημα, έχουμε για κάθε $k \in \mathbb{N}$,

$$P(A_k \cap B) = P(A_k)P(B|A_k).$$

Από τα πιο πάνω έπεται ότι

$$P(B) = \sum_{k \in \mathbb{N}} P(A_k)P(B|A_k).$$

□

▶ **Παράδειγμα 1**

Έστω ότι ένας εργαζόμενος αναλαμβάνει να περατώσει την αρχειοθέτηση ενός αριθμού φακέλων. Αν η πιθανότητα να μετατεθεί ο υπάλληλος σε άλλο τμήμα είναι 0.45, η πιθανότητα ο υπάλληλος να περατώσει εγκαίρως την αρχειοθέτηση δεδομένου ότι δεν μετατεθεί σε άλλο τμήμα είναι 0.9 και η πιθανότητα να την περατώσει εγκαίρως δεδομένου ότι μετατεθεί σε άλλο τμήμα είναι 0.2, να υπολογιστεί η πιθανότητα όπως ο υπάλληλος περατώσει την εργασία εγκαίρως.

Απάντηση.
Θεωρούμε τα ενδεχόμενα

$$\begin{aligned} A &= \text{ο υπάλληλος να περατώσει την εργασία εγκαίρως} \\ B &= \text{ο υπάλληλος μετατεθεί σε άλλο τμήμα.} \end{aligned}$$

Από τα δεδομένα του προβλήματος έχουμε

$$P(B) = 0.45, \quad P(A|B) = 0.2, \quad P(A|B^c) = 0.9.$$

Τότε,

$$P(B^c) = 1 - P(B) = 1 - 0.45 = 0.55.$$

Η οικογένεια $\{B, B^c\}$ αποτελεί διαμέριση του δειγματικού χώρου. Τότε, από το Θεώρημα ολικής πιθανότητας, η πιθανότητα του ενδεχομένου A δίνεται από

$$\begin{aligned} P(A) &= P(B)P(A|B) + P(B^c)P(A|B^c) \\ &= (0.45)(0.2) + (0.55)(0.9) \\ &= 0.585. \end{aligned}$$

■

Θεώρημα 0.0.2. *(Θεώρημα του Bayes)*
Έστω $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ χώρος πιθανότητας και έστω $A = \{A_k : k \in \mathbb{N}\}$ μια διαμέριση του Ω. Τότε, για κάθε $B \in \mathcal{A}$ με $P(B) > 0$,

$$P(A_k|B) = \frac{P(A_k)P(B|A_k)}{\sum_{k=1}^{\infty} P(A_k)P(B|A_k)} \quad (k = 1, 2, \ldots). \tag{3}$$

Απόδειξη. Έστω $B \in \mathcal{A}$. Τότε,

$$\begin{aligned} P(A_k|B) &= \frac{P(A_k \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A_k)P(B|A_k)}{P(B)} \\ &\overset{(2)}{=} \frac{P(A_k)P(B|A_k)}{\sum_{k=1}^{\infty} P(A_k)P(B|A_k)}. \end{aligned}$$

□

Ο πιο πάνω τύπος συνδέει τις 'a priori' (εκ των προτέρων) πιθανότητες $P(A_k)$ με τις 'a posteriori' πιθανότητες $P(B|A_k)$, δηλαδή τις πιθανότητες που προκύπτουν κατόπιν πραγματοποίησης του θεωρούμενου ενδεχομένου. Με άλλα λόγια, ο τύπος του Bayes μας επιτρέπει να υπολογίζουμε την πιθανότητα να προέκυψε το ενδεχόμενο A_k της διαμέρισης του αναφερόμενου δειγματικού χώρου, δεδομένου ότι γνωρίζουμε την πιθανότητα πραγματοποίησης ενός ενδεχομένου B.

Ιδιαίτερο ενδιαφέρον, όσον αφορά τις εφαρμογές, παρουσιάζει η περίπτωση που ο δειγματικός χώρος μπορεί να διαμεριστεί σε δύο ενδεχόμενα μόνο (δηλαδή στο A και στο συμπληρωματικό του), όπως είδαμε στο προηγούμενο παράδειγμα. Ας δούμε ακόμη ένα παράδειγμα.

▶ **Παράδειγμα 2** (Τέστ αντιγόνου)

> Το τέστ 'Χ' ταχείας ανίχνευσης αντιγόνου για τον ιό SARS-CoV-2 έχει ευαισθησία 91% (ποσοστό σωστής διάγνωσης). Το τέστ ανιχνεύει επίσης ορθά με ποσοστό 98.5% (δηλαδή ανιχνεύει ορθά (βγαίνει αρνητικό) τους 9.8 στους 10 μη-νοσούντες).
> Είναι γνωστό ότι το ποσοστό επιπολασμού (prevalence) της νόσου (δηλαδή το ποσοστό των νοσούντων) σε μια συγκεκριμένη περιοχή της Κύπρου είναι 1,15%.
> Δεδομένου ότι ένα (τυχαία) επιλεγμένο άτομο από τη συγκεκριμένη περιοχή έχει βγεί θετικό στο τέστ, ποιά η πιθανότητα να νοσεί πραγματικά;

Απάντηση.
Θεωρούμε τα ενδεχόμενα

$$\begin{aligned} A &= \text{το άτομο να νοσεί} \\ B &= \text{το τέστ να βγεί θετικό.} \end{aligned}$$

Από τα δεδομένα της άσκησης έχουμε

$$P(A) = 1,15\% = 0,0115, \quad P(B|A) = 91\% = 0,91, \quad P(B^c|A^c) = 0,985$$

και άρα

$$\begin{aligned} P(A^c) &= 1 - P(A) = 1 - 0,0115 = 0,9885 \\ P(B|A^c) &= 1 - P(B^c|A^c) = 1 - 0.985 = 0.015. \end{aligned}$$

Το σύνολο $\Gamma = \{A, A^c\}$ αποτελεί διαμέριση του δειγματικού χώρου Ω (εδώ το πείραμα είναι η επιλογή τυχαίου ατομου από τη συγκεκριμένη περιοχή της Κύπρου).
Η πιθανότητα $P(B|A)$, δηλαδή η πιθανότητα του ενδεχομένο $B|A$='δεδομένου ότι το επιλεγόμενο άτομο νοσεί, το τέστ να βγήκε θετικό' είναι a posteriori πιθανότητα και ψάχνουμε την πιθανότητα $P(A|B)$, δηλαδή την πιθανότητα του ενδεχομένου $A|B$='το τέστ να βγεί θετικό και το άτομο να είναι νοσούντας'.

Από το *Θεώρημα του Bayes*,

$$
\begin{aligned}
P(A|B) &= \frac{P(A)P(B|A)}{P(A)P(B|A)+P(A^c)P(B|A^c)} \\
&= \frac{(0,0115)(0,91)}{(0,0115)(0,91)+(0,9885)(0,015)} \\
&= \frac{0.010465}{0.010465+0.0148275} \\
&\approx 0.4138.
\end{aligned}
$$

■

► **Παράδειγμα 3** (Θέμα 2/Σεπτέμβριος 2004-Τμήμα Μαθηματικών (ΕΚΠΑ))

> Οι εταιρείες ασφάλισης αυτοκινήτων κατατάσσουν τους οδηγούς σε 7 κατηγορίες επικινδυνότητας, ανάλογα με την πιθανότητα που έχουν να προκαλέσουν δυστύχημα.
> Έστω ότι η πιθανότητα όπως ένας οδηγός της κατηγορίας k προκαλέσει ένα τουλάχιστον δυστύχημα σε ένα δωδεκάμηνο είναι $k/84$, $k = 1, 2, \ldots, 7$. Ας θεωρήσουμε μια ασφαλιστική εταιρεία, στην οποία κάθε ασφαλισμένος οδηγός ανήκει στην κατηγορία k με πιθανότητα $(k+1)/c$, για $k = 1, 2, \ldots, 7$. Να υπολογισθούν **(α)** η σταθερά c και οι πιθανότητες όπως ένας οδηγός ασφαλισμένος στην εταιρεία αυτή: **(β)** να μην έχει προκαλέσει δυστύχημα σε ένα δωδεκάμηνο και **(γ)** να ανήκει στην πέμπτη κατηγορία δεδομένου ότι έχει προκαλέσει δυστύχημα το τελευταίο δωδεκάμηνο.

Απάντηση.
Θεωρούμε τα ενδεχόμενα

$$
\begin{aligned}
A_k &= \text{ο ασφαλισμένος να ανήκει στην κατηγορία } k \\
B &= \text{οδηγός να έχει προκαλέσει ένα τουλάχιστον δυστύχημα σε ένα 12μηνο.}
\end{aligned}
$$

Από τα δεδομένα της άσκησης έχουμε

$$P(A_k) = \frac{k+1}{c}, \quad k = 1, 2, \ldots, 7$$

και (αφού $B|A_k$=το ενδεχόμενο όπως ένας οδηγός της κατηγορίας k προκαλέσει ένα τουλάχιστον δυστύχημα σε ένα δωδεκάμηνο),

$$P(B|A_k) = \frac{k}{84}, \quad k = 1, 2, \ldots, 7.$$

(α) Είναι

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{7} P(A_k) = 1 \quad &\Leftrightarrow \quad \sum_{k=1}^{7} \frac{k+1}{c} = 1 \\
&\Leftrightarrow \quad \frac{1}{c}\sum_{k=1}^{7}(k+1) = 1 \\
&\Leftrightarrow \quad c = \frac{7 \cdot 8}{2} + 7 \quad = \quad 28 + 7 \\
&\Leftrightarrow \quad c = 35.
\end{aligned}
$$

Άρα,

$$P(A_k) = \frac{k+1}{35}, \quad k = 1, 2, \ldots, 7.$$

(β) Η οικογένεια $\Gamma = \{A_k : k = 1, 2, \ldots, 7\}$ αποτελεί διαμέριση του δειγματικού χώρου (ο οποίος

αποτελείται από τα δειγματικά σημεία της επιλογής οδηγού (από τις k κατηγορίες) ασφαλισμένου στην εν λόγω ασφαλιστική).
Εφαρμόζοντας το *Θεώρημα ολικής πιθανότητας* έχουμε

$$\begin{aligned}
P(B) &= \sum_{k=1}^{7} P(A_k)P(B|A_k) &= \sum_{k=1}^{7} \frac{k+1}{35} \cdot \frac{k}{84} \\
&= \frac{1}{(35)(84)} \sum_{k=1}^{7} k(k+1) &= \frac{1}{2940} \sum_{k=1}^{7} (k^2 + k) \\
&= \frac{1}{2940} \left[\sum_{k=1}^{7} k^2 + \sum_{k=1}^{7} k \right] \\
&= \frac{1}{2940} \left[\frac{7(7+1)(2(7)+1)}{6} + \frac{7(7+1)}{2} \right] \\
&= \frac{(7)(8)}{(2)(2940)} \left(\frac{15}{3} + 1 \right) &= \frac{(7)(4)}{2940} \cdot 6 \\
&= \frac{168}{2940}.
\end{aligned}$$

Άρα, η πιθανότητα του ενδεχομένου $A^c =$'ένας οδηγός ασφαλισμένος στην εταιρεία αυτή να μην έχει προκαλέσει δυστύχημα σε ένα δωδεκάμηνο' είναι

$$P(A^c) = 1 - P(A) = 1 - \frac{168}{2940} = \frac{2772}{2940} \approx 0.943.$$

(γ) Έχουμε

$$\begin{aligned}
P(A_5|B) &= \frac{P(A_5 \cap B)}{P(B)} &= \frac{P(A_5)P(B|A_5)}{P(B)} \\
&= \frac{\frac{5+1}{35} \cdot \frac{5}{84}}{\frac{168}{2940}} = \frac{(5)(6)}{168} &= \frac{15}{84}.
\end{aligned}$$

■

▶ **Παράδειγμα 4** (Άσκηση 10, σελ. 106 στο [1])

> Δύο παίκτες ρίχνουν από n φορές ένα σύνηθες νόμισμα. Να υπολογισθεί η πιθανότητα όπως ρίψουν τον ίδιο αριθμό φορών την ένδειξη 'Γράμματα'.

Απάντηση.
Έστω Ω ο δειγματικός χώρος του πειράματος ρίψη νομίσματος n φορές. Κάθε στοιχείο του Ω είναι μια διατεταγμένη $n-$άδα $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, όπου κάθε $a_i \in \{K, \Gamma\}$. Τότε,

$$N(\Omega) = 2^n.$$

Θεωρούμε το ενδεχόμενο $A_k =$ο πρώτος παίκτης να φέρει k φορές 'Κεφαλή', $k = 0, 1, \ldots, n$ και B=το ενδεχόμενο οι παίκτες να φέρουν τις ίδιες φορές 'Κεφαλή'. Κάθε στοιχείο του ενδεχομένου

A_k σχηματίζεται αν επιλέξουμε k από τις n θέσεις στις οποίες θα εμφανιστεί η ένδειξη 'Κεφαλή' και αρα

$$N(A_k) = \binom{n}{k}, \quad \forall k \in \{0, 1, \ldots, n\}.$$

Τότε, για κάθε $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$,

$$\mathbb{P}[A_k] = \frac{N(A_k)}{N(\Omega)} = \frac{\binom{n}{k}}{2^n}.$$

Επίσης, για κάθε $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$,

$$\mathbb{P}[B|A_k] = \frac{N(B_k)}{N(\Omega)} = \frac{\binom{n}{n-k}}{2^n} = \frac{\binom{n}{k}}{2^n}.$$

Από το *Θεώρημα ολικής πιθανότητας*,

$$\mathbb{P}[B] = \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}[A_k] \cdot \mathbb{P}[B|A_k] = \sum_{k=0}^{n} \frac{\binom{n}{k}}{2^n} \cdot \frac{\binom{n}{k}}{2^n} = \frac{1}{2^{2n}} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2.$$

Σημείωση:
Από το Θεώρημα του Newton, το οποίο αποδεικνύουμε αμέσως μετά,

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot \binom{n}{n-k} = \binom{2n}{n}$$

και αρα η ζητούμενη πιθανότητα γράφεται

$$\mathbb{P}[B] = \frac{1}{4^n} \binom{2n}{n}.$$

Θεώρημα 0.0.3. *(Newton) Έστω $r, s \in \mathbb{R}^+$ και $n \in \mathbb{N}$. Τότε*

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{r}{k} \cdot \binom{s}{n-k} = \binom{r+s}{n}.$$

Απόδειξη. $(x+1)^r \cdot (x+1)^s = (x+1)^{r+s}$ και αρα, από το διώνυμο του Newton,

$$\left(\sum_{k=0}^{r} \binom{r}{k} x^k \right) \cdot \left(\sum_{j=0}^{s} \binom{s}{j} x^j \right) = \sum_{r=0}^{r+s} \binom{r+s}{n} x^n,$$

δηλαδή

$$\sum_{k=0}^{r} \sum_{j=0}^{s} \binom{r}{k} \binom{s}{j} x^{k+j} = \sum_{r=0}^{r+s} \binom{r+s}{n} x^n.$$

Θεωρούμε την αλλαγή μεταβλητής $k + j = n \sim \{0, 1, 2, \ldots, r + s\} \Rightarrow j = n - k \geq 0 \Rightarrow k \leq n$ και η πιο πάνω γράφεται:

$$\sum_{k=0}^{r+s} \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{r}{k} \binom{s}{n-k} \right) x^n = \sum_{r=0}^{r+s} \binom{r+s}{n} x^n$$

και αρα

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{r}{k} \binom{s}{n-k} = \binom{r+s}{n}.$$

□

Βιβλιογραφία

[1] Χ. Χαραλαμπίδη, *Θεωρία Πιθανοτήτων και εφαρμογές*, Τεύχος 1, 2η Έκδοση, Εκδόσεις Συμμετρία, Αθήνα, 2000

[2] Χ. Χαραλαμπίδη, *Ασκήσεις Πιθανοτήτων*, Τεύχος 1, Εκδόσεις Συμμετρία, Αθήνα, 1993

[3] Χ. Χαραλαμπίδη, *Συνδυαστική*, Τεύχος 1, 2η Έκδοση, Εκδόσεις Συμμετρία, Αθήνα, 2000

[4] P. L. Meyer, *Introductory Probability and Statistical applications*, Addison-Wesley Publishing Company, Inc., 1970