

Μια εισαγωγή στις Συνήθεις Διαφορικές Εξισώσεις
(Λύσεις των ασκήσεων)
Παροράματα/διορθώσεις
5 Φεβρουαρίου 2022

Κεφάλαιο 2

Άσκηση 1

Στις τελευταίες δύο γραμμές, στο συντελεστή του $(e^x + 1)^{-2}$ είναι $\frac{1}{2}$ και όχι 2.

Άσκηση 4/(iii)

Αντικαταστήστε με το σωστό:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y-x}{y+x}, \quad x > 0$$

Θεωρούμε την αντικατάσταση (2.3) και η Δ.Ε. γράφεται $x \frac{du}{dx} + u = \frac{u-1}{u+1}$,

δηλ. $x \frac{du}{dx} = -\frac{u+1}{1+u^2}$, δηλ.

$$-\frac{1+u^2}{u+1} du = \frac{1}{x} dx$$

(χωριζομένων μεταβλητών). Ολοκληρώνουμε:

$$-\int \frac{u+1}{1+u^2} du = \int \frac{dx}{x} \Leftrightarrow -\int \left(\frac{u}{1+u^2} + \frac{1}{1+u^2} \right) du = \ln|x| + c,$$

δηλ.

$$-\frac{1}{2} \ln(1+u^2) - \tan^{-1} u = \ln|x| + c$$

Άσκηση 6/(iv)

Ο σωστός ολοκληρωτικός παράγοντας είναι ο (ξέφυγε το αρνητικό πρόσημο στον εκθέτη)

$$I(x) = e^{-\int dx} = e^{-x}.$$

Άσκηση 8/(i)

Αντικαταστήστε: $\frac{dy}{dx} - \frac{y}{x} = -\frac{y^2}{x} \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{y(1-y)}{x} \Leftrightarrow \frac{1}{y(1-y)} dy = \frac{1}{x} dx$.

Η πιο πάνω Δ.Ε. είναι γραμμική, χωριζομένων μεταβλητών. Ολοκληρώνουμε αμφότερα μέλη:

$$\int \frac{dy}{y(1-y)} = \int \frac{dx}{x} \Leftrightarrow \int \left(\frac{1}{y} - \frac{1}{y-1} \right) dy = \ln|x| \Leftrightarrow \ln \left| \frac{y}{y-1} \right| = \ln|c_* x|$$

$$\Leftrightarrow \ln \left| \frac{y}{y-1} \right| = \ln|c_* x| \Leftrightarrow \frac{y}{y-1} = c_* x$$

$$\Leftrightarrow \boxed{y = \frac{c_* x}{c_* x - 1} = \frac{x}{x - \frac{1}{c_*}} \equiv \frac{x}{x + c}}$$

Άσκηση 11/(ii)

Το σωστό είναι

$$u = \frac{x}{xy + 1}$$

και η λύση του ΠΑΤ:

$$y(x) = \frac{x^3 - x - 1}{x(x+1)}$$

Άσκηση 19/(ii)

Όπου p^1 να γίνει p^2

Άσκηση 15/(ii)

Αντικαταστήστε:

Αφού

$$\begin{aligned} \frac{\partial P(x, y)}{\partial y} - \frac{\partial Q(x, y)}{\partial x} &= \sec^2 y - 1 + 2x \tan y = 1 + \tan^2 y - 1 + 2x \tan y \\ &= \tan y(2x + \tan y) \\ &\Rightarrow \frac{1}{P(x, y)} \left(\frac{\partial P(x, y)}{\partial y} - \frac{\partial Q(x, y)}{\partial x} \right) = \tan y \end{aligned}$$

Κεφάλαιο 3

Άσκηση 4 (i): $m = \frac{1}{2}$ και όχι $m = -\frac{1}{2}$.

Άσκηση 4 (ii): $\sqrt{-576}$ και όχι $\sqrt{576}$.

Κεφάλαιο 5

Άσκηση 4,(ii)

Να αφαιρεθεί το " c_1 " στην τελευταία γραμμή (στη λύση του ΠΑΤ).

Άσκηση 5/(i)

Το σωστό είναι

$$\mathbf{X}(t) = \begin{bmatrix} (c_1 - c_2) \sin t - (c_1 + c_2) \cos t \\ 2(c_1 \cos t + c_2 \sin t) \end{bmatrix}$$