Ορισμένο ολοκλήρωμα
&
συμμετρία συναρτήσεων

(Γ΄ Λυκείου κατεύθυνσης)

Ιωάννης Ιωακείμ

21 Φεβρουαρίου 2022

In Robore fortuna
(στο σθένος βρίσκεται ο πλούτος)
– Maurice Leblanc, *The secret tomb*

Ολοκλήρωμα και συμμετρία συναρτήσεων - Ασκήσεις

[1] (α΄) Έστω $a > 0$ και $f : [-a, a] \to \mathbb{R}$ μια **συνεχής** και **περιττή** συνάρτηση. Τότε

$$\int_{-a}^{a} f(x)\, dx = 0.$$

(β΄) Έστω $a > 0$ και $f : [-a, a] \to \mathbb{R}$ μια **συνεχής** και **άρτια** συνάρτηση. Τότε

$$\int_{-a}^{a} f(x)\, dx = 2\int_{0}^{a} f(x)\, dx.$$

[2] (α΄) Με τη βοήθεια της προηγούμενης άσκησης, να υπολογιστεί το

$$I = \int_{-1}^{1} \frac{x^5 - 2x}{\sqrt{x^2+1}} dx.$$

(β΄) Με τη βοήθεια της προηγούμενης άσκησης και των τριγωνομετρικών ταυτοτήτων

$$\begin{aligned} 2\sin(a)\cdot\cos(b) &= \sin(a-b) + \sin(a+b) \\ 2\sin(a)\cdot\sin(b) &= \cos(a-b) - \cos(a+b) \\ 2\cos(a)\cdot\cos(b) &= \cos(a-b) + \cos(a+b) \end{aligned}$$

να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(mx)\cdot\cos(nx)\, dx$$

και

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(mx)\cdot\sin(nx)\, dx$$

για κάθε $m, n \in \mathbb{N}$.

[3] Έστω $a < b$ και $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ μια συνεχής συνάρτηση. Τότε

$$\int_{a}^{b} f(x)\, dx = \int_{a}^{b} f(a+b-x)\, dx.$$

Ως εφαρμογή, υπολογίστε τα

$$\int_{0}^{1} \frac{2^x}{2^x - 2^{1-x}}\, dx$$

και

$$\int_{1}^{3} \frac{\ln x}{\ln x + \ln(4-x)}\, dx.$$

[4] Έστω $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ $(0 < a < b)$ μια συνεχής συνάρτηση.

(α΄) Αν $f(a+b-x) = f(x),\ \forall x \in [a, b]$, τότε

$$\int_{a}^{b} x\cdot f(x)\, dx = \frac{a+b}{2}\int_{a}^{b} f(x)\, dx.$$

(β′) Αν $f(a-x) = f(x),\ \forall x \in [0,a],$ τότε

$$\int_0^a x \cdot f(x)\,dx = \frac{a}{2}\int_0^a f(x)\,dx.$$

(γ′) Δείξτε ότι

$$\int_0^\pi x \cdot f(\text{ημ}x)\,dx = \frac{\pi}{2}\int_0^\pi f(\text{ημ}x)\,dx.$$

Ως εφαρμογή, υπολογίστε το

$$\int_0^\pi \frac{x\text{ημ}x}{1+\text{συν}^2 x}\,dx.$$

[5] Δίνονται οι συνεχείς συναρτήσεις f και g στο διάστημα $[0,\pi]$ για τις οποίες ισχύουν ότι για κάθε $x \in [0,\pi],\ \ f(x) = f(\pi - x)$ και $g(x) + g(\pi - x) = \pi$.

(α′) Χρησιμοποιώντας την αντικατάσταση $x = \pi - y$, να αποδείξετε ότι

$$\int_0^\pi f(x)\cdot g(x)\,dx = \frac{\pi}{2}\int_0^\pi f(x)\,dx.$$

(β′) Με τη βοήθεια του προηγούμενου ερωτήματος, να υπολογίσετε το

$$\int_0^\pi \frac{x\text{ημ}x}{1+\text{συν}^2 x}\,dx.$$

[6] (α′) Αν f μια συνεχής συνάρτηση και τέτοια ώστε $f(2a-x) = f(x)$, όπου $a > 0$, τότε

$$\int_0^{2a} f(x)\,dx = 2\int_0^a f(x)\,dx.$$

Ως εφαρμογή, δείξτε ότι

$$\int_0^\pi f(\text{ημ}x)\,dx = 2\int_0^{\pi/2} f(\text{ημ}x)\,dx.$$

(β′) Αν f μια συνεχής συνάρτηση και τέτοια ώστε $f(2a-x) = -f(x)$, όπου $a > 0$, τότε

$$\int_0^{2a} f(x)\,dx = 0.$$

[7] Αν f συνεχής συνάρτηση στο διάστημα $[0,a]$, $a > 0$, χρησιμοποιώντας την αντικατάσταση $x^2 = u$, να αποδείξετε ότι

$$\int_0^a x^3 \cdot f(x^2)\,dx = \frac{1}{2}\int_0^{a^2} x\cdot f(x)\,dx.$$

Στη συνέχεια, να υπολογιστεί το εμβαδόν του χωρίου που βρίσκεται κάτω από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης h με τύπο $h(x) = x^3\text{τοξεφ}(x^2)$, δεξιά από την ευθεία με εξίσωση $x = 0$ και αριστερά από την ευθεία με εξίσωση $x = 1$.

[8] Χρησιμοποιώντας το μετασχηματισμό $t = k - x,$ όπου $k > 0$ σταθερά, να δείξετε ότι το ολοκλήρωμα

$$A = \int_0^k \frac{f(k-x)}{f(x) + f(x-k)} dx$$

είναι ίσο με το ολοκλήρωμα

$$B = \int_0^k \frac{f(x)}{f(x) + f(x-k)} dx$$

(νοείται η υπόθεση $f \neq 0$ στο $[0, k]$).
Με τη βοήθεια του πιο πάνω, να υπολογίσετε το $A + B$ και στη συνέχεια να δείξετε ότι $B = k/2$. Τέλος, υπολογίστε τα ολοκληρώματα

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{\text{ημ}x}}{\sqrt{\text{ημ}x} + \sqrt{\text{συν}x}} dx \quad \text{και} \quad J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\text{ημ}^3 x}{\text{ημ}^3 x + \text{συν}^3 x}\, dx.$$

[9] Δίνονται οι συναρτήσεις f και g οι οποίες είναι συνεχείς στο σύνολο των πραγματικών αριθμών. Η συνάρτηση f είναι άρτια και για τη συνάρτηση g δίνεται ότι αυτή ικανοποιεί τη σχέση

$$g(x) + g(-x) = 1, \; \forall x \in \mathbb{R}.$$

(α′) Να δείξετε ότι:

$$\int_{-a}^{a} f(x) \cdot g(x)\, dx = \int_0^a f(x)\, dx,$$

όπου $a > 0$.

(β′) Να υπολογίσετε το

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\text{συν}x}{e^{2x} + 1}\, dx.$$

[10] Δίνονται οι συναρτήσεις f και g οι οποίες είναι συνεχείς στο σύνολο των πραγματικών αριθμών.
Η συνάρτηση f είναι άρτια και για τη συνάρτηση g δίνεται ότι $g(x) + g(-x) = 1, \; \forall x \in \mathbb{R}$.

(α′) Χρησιμοποιώντας την αντικατάσταση $u(x) = -x$, ή με οποιοδήποτε άλλο τρόπο, να δείξετε ότι

$$\int_{-a}^{a} \frac{f(x)}{1 + g(x)} dx = \int_0^a f(x)\, dx,$$

όπου $a > 0$.

(β′) Να υπολογίσετε το

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\text{συν}x}{e^{2x} + 1}\, dx.$$

[11] Δίνονται οι συνεχείς συναρτήσεις $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Η συνάρτηση f είναι άρτια και η συνάρτηση g περιττή.

(α′) Να δείξετε ότι:

$$\int_{-a}^{a} \frac{f(x)}{e^{g(x)} + 1} dx = \int_0^a f(x)\, dx$$

(όπου $a > 0$).

(β′) Να υπολογίσετε το

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\text{συν}^2 x + 5}{2e^{\text{ημ}x} + 2}\, dx.$$

[12] Δίνεται συνεχής και άρτια συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

(α′) Χρησιμοποιώντας την αντικατάσταση $x = -t$, να αποδείξετε ότι

$$\int_{-a}^{a} \frac{f(x)}{1+b^x} dx = \int_0^a f(x)\, dx,$$

όπου $a, b > 0$.

(β′) Με τη βοήθεια του προηγούμενου ερωτήματος, να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα

$$\int_{-1}^{1} \frac{dx}{(x^2+1)(1+e^x)}.$$

[13] Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει η σχέση

$$f(a-x) + f(a+x) \quad = \quad \frac{\beta}{2}, \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

όπου a, β πραγματικές σταθερές με $a > 0$.

(α′) Να δείξετε ότι:

$$\int_0^{2a} f(2a-x)\, dx \quad = \quad \int_0^{2a} f(x)\, dx \quad = \quad \frac{a\beta}{2}.$$

(β′) Δείξτε ότι

$$\int_0^{2a} \frac{3+e^{a-x}}{1+e^{a-x}}\, dx \quad = \quad 4a.$$

Απαντήσεις

[1] (α′) Θεωρούμε το μετασχηματισμό

$$u : [-a, 0] \to \mathbb{R} \quad \text{με} \quad u(x) = -x.$$

Τότε $du = -dx$, $u([-a, 0]) = [0, a]$, δηλαδή $u(-a) = a$ και $u(0) = 0$. Τότε

$$\int_{-a}^{0} f(x)\,dx \;=\; -\int_{a}^{0} f(-x)\,dx \;=\; -\int_{0}^{a} f(x)\,dx,$$

αφού η f είναι περιττή συνάρτηση (και άρα $f(-x) = -f(x),\ \forall x \in [-a, a]$).
Διαφορετικά,

$$\begin{aligned}\int_{-a}^{0} f(x)\,dx &= \int_{a}^{0} f(-x)\,d(-x)\\ &= -\int_{a}^{0} f(-x)\,dx\\ &= \int_{0}^{a} f(-x)\,dx = -\int_{0}^{a} f(x)\,dx\end{aligned}$$

όπου στην προτελευταία ισότητα χρησιμοποιήσαμε το ότι η f είναι περιττή συνάρτηση.
Έτσι,

$$\begin{aligned}\int_{-a}^{a} f(x)\,dx &= \int_{-a}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{a} f(x)\,dx\\ &= \int_{0}^{a} f(x)\,dx - \int_{0}^{a} f(x)\,dx = 0.\end{aligned}$$

(β′) Θεωρούμε το μετασχηματισμό u όπως πριν. Τότε

$$\begin{aligned}\int_{-a}^{0} f(x)\,dx &= -\int_{a}^{0} f(-x)\,dx\\ &= \int_{0}^{a} f(-x)\,dx = \int_{0}^{a} f(x)\,dx\end{aligned}$$

όπου στην τελευταία ισότητα χρησιμοποιήσαμε το ότι η f είναι άρτια (και άρα $f(-x) = f(x),\ \forall x \in [-a, a]$). Συνεπώς,

$$\begin{aligned}\int_{-a}^{a} f(x)\,dx &= \int_{-a}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{a} f(x)\,dx\\ &= \int_{0}^{a} f(x)\,dx + \int_{0}^{a} f(x)\,dx\\ &= 2\int_{0}^{a} f(x)\,dx.\end{aligned}$$

◄

[2] (α′) Έχουμε

$$I = \int_{-1}^{1} \frac{x^5 - 2x}{\sqrt{x^2+1}}dx = \int_{1}^{-1} \frac{(-x)^5 - 2(-x)}{\sqrt{(-x)^2+1}}d(-x) = -\int_{-1}^{1} \frac{x^5 - 2x}{\sqrt{x^2+1}}dx = -I$$

και αρα $I = 0$.

Χρησιμοποιήσαμε το γεγονός ότι η συνάρτηση $f(x) = \dfrac{x^5 - 2x}{\sqrt{x^2+1}}$ είναι περιττή στο (συμμετρικό περί του $x = 0$) διαστήματος $[-1, 1]$.

(β′) Θα αποδείξουμε ότι για κάθε $m, n \in \mathbb{N}$ ισχύει

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(mx) \cdot \cos(nx)\, dx = 0, \qquad \int_{-\pi}^{\pi} \sin(mx) \cdot \sin(nx)\, dx = \begin{cases} 0, & m \neq n \\ \pi, & m = n \end{cases}$$

και

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx) \cdot \cos(mx)\, dx = \begin{cases} 0, & m \neq n \\ \pi, & m = n \end{cases}$$

Κάνουμε χρήση των γνωστών τριγωνομετρικών ταυτοτήτων

$$\begin{aligned} 2\sin(a) \cdot \cos(b) &= \sin(a-b) + \sin(a+b) \\ 2\sin(a) \cdot \sin(b) &= \cos(a-b) - \cos(a+b) \\ 2\cos(a) \cdot \cos(b) &= \cos(a-b) + \cos(a+b) \end{aligned}$$

Για το πρώτο, αν $m \neq n$, έχουμε

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} \sin(mx) \cdot \cos(nx)\, dx &= \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} [\sin(mx - nx) + \sin(mx + nx)]\, dx \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{m-n} \cos[(m-n)x] + \frac{1}{m+n} \cos[(m+n)x] \right]_{-\pi}^{\pi} \\ &= 0 \end{aligned}$$

λόγω του ότι $\cos(-x) = \cos(x)$. Το ίδιο αποτέλεσμα εξάγεται αν σκεφτούμε ότι, αφού η συνάρτηση $x \mapsto \sin(mx)$ είναι περιττή και η συνάρτηση $x \mapsto \cos(nx)$ είναι άρτια, το γινόμενό τους είναι περιττή συνάρτηση. Το αποτέλεσμα έπεται τότε από την προηγούμενη εφαρμογή. Τώρα αν $m = n$, το αποτέλεσμα είναι επίσης άμεσο. Για το δεύτερο, αν $m \neq n$, τότε

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} \sin(mx) \cdot \sin(nx)\, dx &= \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} [\cos[(m-n)x] - \cos[(m-n)x]]\, dx \\ &= \frac{1}{2(m-n)} [\sin[(m-n)x] - \sin[(m+n)x]]_{-\pi}^{\pi} \\ &= 0 \end{aligned}$$

ενω αν $m = n$, τότε

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2(mx)\, dx &= \frac{1}{2m} [mx - \cos(2mx)]_{-\pi}^{\pi} \\ &= \frac{1}{2m} \left[m\pi - \frac{1}{2}\cos(2m\pi) - m(-\pi) + \frac{1}{2}\cos(-2m\pi) \right] \\ &= \frac{1}{2m} \left[2m\pi - \frac{1}{2}\cos(2m\pi) + \frac{1}{2}\cos(2m\pi) \right] \\ &= \frac{2m\pi}{2m} = \pi. \end{aligned}$$

Διαφορετικά, εκμεταλλευόμαστε το ότι $x \mapsto \sin(mx)$ είναι περιττή στο συμμετρικό περι του $x = 0$ διάστημα $[-\pi, \pi]$ και αρα

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(2mx)\, dx = 0$$

οπόταν

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2(mx)\, dx = \frac{1}{2m} [mx]_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \sin(2mx)\, dx = \pi.$$

Εντελώς όμοια και για το τρίτο ολοκλήρωμα. ◀

[3] Θεωρούμε το μετασχηματισμό $u : [a, b] \to \mathbb{R}$ με $u(x) = a + b - x$. Είναι $u(a) = b$, $u(b) = a$, και άρα,

$$\begin{aligned} \int_a^b f(a+b-x)\,dx &= -\int_b^a f(u)\,du = \int_a^b f(u)\,du \\ &\equiv \int_a^b f(x)\,dx \end{aligned}$$

Γεωμετρικά, αυτό σημαίνει ότι το εμβαδόν ενός χωρίου που καθορίζεται από το γράφημα μιας συνάρτησης παραμένει αμετάβλητο αν εφαρμόζουμε ανάκλαση της συνάρτησης γύρω από την ευθεία $x = (b-a)/2$, δηλ. την ευθεία στο μέσο του διαστήματος $[a, b]$. Με άλλα λόγια, ο 'προσανατολισμός' του διαστήματος δεν παίζει ρόλο στο ολοκλήρωμα.

Για το πρώτο ολοκλήρωμα, θεωρούμε τη συνάρτηση $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ με τύπο

$$f(x) = \frac{2^x}{2^x - 2^{1-x}}.$$

Από το προηγούμενο ερώτημα για $a = 0$ και $b = 1$, έχουμε ότι

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 f(0+1-x)\,dx = \int_0^1 f(1-x)\,dx \tag{1}$$

Αλλά,

$$f(1-x) = \frac{2^{1-x}}{2^{1-x} - 2^x}$$

και άμεσα βλέπουμε ότι

$$f(x) + f(1-x) = 1$$

Συνεπώς,

$$\int_0^1 [f(x) + f(1-x)]\,dx = \int_0^1 dx = 1 \tag{2}$$

Όμως, με τη βοήθεια της (1), έχουμε

$$\int_0^1 [f(x) + f(1-x)]\,dx = 2\int_0^1 f(x)\,dx \tag{3}$$

Άρα, οι (2) και (3) δίνουν $2\int_0^1 f(x)\,dx = 1$, δηλ.

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \frac{1}{2}.$$

Για το δεύτερο ολοκλήρωμα, θεωρούμε τη συνάρτηση $f : [1, 3] \to \mathbb{R}$ με τύπο

$$f(x) = \frac{\ln x}{\ln x + \ln(4-x)}.$$

Είναι καλά ορισμένη αφού για $x \in [1, 3]$ είναι $4 - x > 0$. Από το προηγούμενο ερώτημα για $a = 1$ και $b = 3$, έχουμε ότι

$$\int_1^3 f(x)\,dx = \int_1^3 f(1+3-x)\,dx = \int_1^3 f(4-x)\,dx \tag{4}$$

Αλλά,

$$f(4-x) = \frac{\ln(4-x)}{\ln x + \ln(4-x)}$$

Παρατηρούμε ότι
$$f(x)+f(4-x)=1$$
Συνεπώς,
$$\int_1^3 [f(x)+f(4-x)]\,dx=\int_1^3 \,dx=2 \tag{5}$$
Όμως, με τη βοήθεια της (4), έχουμε
$$\int_1^3 [f(x)+f(4-x)]\,dx=2\int_1^3 f(x)\,dx \tag{6}$$
Άρα, οι (5) και (6) δίνουν $2\int_1^3 f(x)\,dx=2$, δηλ.
$$\int_1^3 f(x)\,dx=1.$$
◀

[4] (α′) Χρησιμοποιώντας το μετασχηματισμό
$$u(x)=a+b-x,\quad x\in[a,b]$$
έχουμε
$$\begin{aligned}
\int_a^b x\cdot f(x)\,dx &= \int_a^b (a+b-x)\cdot f(a+b-x)\,dx\\
&\overset{(;;)}{=} \int_a^b (a+b-x)\cdot f(x)\,dx=\int_a^b (a+b)\cdot f(x)\,dx-\int_a^b x\cdot f(x)\,dx\\
&= (a+b)\int_a^b f(x)\,dx-\int_a^b x\cdot f(x)\,dx
\end{aligned}$$
και αρα
$$\int_a^b x\cdot f(x)\,dx=\frac{a+b}{2}\int_a^b f(x)\,dx.$$

(β′) Άμεσο από το προηγούμενο ερώτημα. Διαφορετικά, αν θέλαμε να το αποδείξουμε ανεξάρτητα: χρησιμοποιώντας το μετασχηματισμό
$$u(x)=a-x,\quad x\in[0,a]$$
έχουμε
$$\begin{aligned}
\int_0^a x\cdot f(x)\,dx &= \int_0^a (a-x)\cdot f(a-x)\,dx \overset{(;;)}{=} \int_0^a (a-x)\cdot f(x)\,dx\\
&= \int_0^a a\cdot f(x)\,dx-\int_0^a x\cdot f(x)\,dx
\end{aligned}$$
και αρα
$$\int_0^a x\cdot f(x)\,dx=\frac{a}{2}\int_0^a f(x)\,dx.$$

(γ′) Άμεσο από το προηγούμενο ερώτημα. Διαφορετικά, αν θέλαμε να το αποδείξουμε ανεξάρτητα: χρησιμοποιώντας ουσιαστικά το μετασχηματισμό

$$u(x) = \pi - x, \quad x \in [0, \pi]$$

έχουμε

$$\begin{aligned}\int_0^\pi x \cdot f(\text{ημ}x)\,dx &= -\int_0^\pi (\pi - x) \cdot f(\text{ημ}(\pi - x))\,d(\pi - x)\\ &= -\int_0^\pi (\pi - x)\cdot f(\text{ημ}x)\,d(\pi - x)\\ &= -\pi\int_0^\pi f(\text{ημ}x)\,d(\pi - x) + \int_0^\pi x\cdot f(\text{ημ}x)\,d(\pi - x)\\ &= \pi\int_0^\pi f(\text{ημ}x)\,dx - \int_0^\pi x\cdot f(\text{ημ}x)\,dx\end{aligned}$$

και αρα

$$2\int_0^\pi x\cdot f(\text{ημ}x)\,dx = \pi\int_0^\pi f(\text{ημ}x)\,dx$$

δηλ.

$$\int_0^\pi x\cdot f(\text{ημ}x)\,dx = \frac{\pi}{2}\int_0^\pi f(\text{ημ}x)\,dx.$$

◀

[5] (α′) Οι συναρτήσεις f και g είναι συνεχείς στο διάστημα $[0, \pi]$ και αρα το γινόμενό τους είναι επίσης μια συνεχής συνάρτηση στο διάστημα αυτό και άρα έχει νόημα το $\int_0^\pi f(x)\cdot g(x)\,dx$. θεωρούμε το μετασχηματισμό $y : [0, \pi] \to \mathbb{R}$ με $y(x) = \pi - x$ ο οποίος είναι 1-1 και επί στο πεδίο ορισμού του και μάλιστα γνησίως φθίνουσα συνάρτηση. Έτσι, σύμφωνα με το Θεώρημα αλλαγής μεταβλητής στο ορισμένο ολοκλήρωμα, είναι

$$\begin{aligned}\int_0^\pi f(x)\cdot g(x)\,dx &= -\int_{y(0)}^{y(\pi)} f(\pi - y)\cdot g(\pi - y)\,dy = -\int_\pi^0 f(\pi - y)\cdot g(\pi - y)\,dy\\ &= \int_0^\pi f(\pi - y)\cdot g(\pi - y)\,dy\end{aligned}$$

και χρησιμοποιώντας την υπόθεση για τις f και g :

$$\begin{aligned}&= \int_0^\pi f(y)\cdot(\pi - g(y))\,dy = \pi\int_0^\pi f(y)\,dy - \int_0^\pi f(y)\cdot g(y)\,dy\\ &\equiv \pi\int_0^\pi f(x)\,dx - \int_0^\pi f(x)\cdot g(x)\,dx\end{aligned}$$

και αρα

$$\begin{aligned}2\int_0^\pi f(x)\cdot g(x)\,dx &= \pi\int_0^\pi f(x)\,dx\\ \Rightarrow \int_0^\pi f(x)\cdot g(x)\,dx &= \frac{\pi}{2}\int_0^\pi f(x)\,dx.\end{aligned}$$

(β′) Θεωρούμε τις f και g με τύπους $f(x) = \text{ημ}x/(1+\text{συν}^2 x)$ και $g(x) = x$ αντίστοιχα. Είναι συνεχείς στο διάστημα $[0,\pi]$ και $\forall x \in [0,\pi]$ έχουμε

$$\begin{aligned} f(\pi - x) &= \frac{x \cdot \text{ημ}(\pi - x)}{1+\text{συν}^2(\pi - x)} = \frac{x \cdot \text{ημ}x}{1+(-\text{συν}x)^2} \\ &= \frac{x \cdot \text{ημ}x}{1+\text{συν}^2 x} = f(x). \end{aligned}$$

Επίσης $g(x) + g(\pi - x) = x + \pi - x = \pi$. Πληρούνται λοιπόν οι υποθέσεις του προηγούμενου ερωτήματος για τις πιο πάνω συναρτήσεις. Συνεπώς,

$$\int_0^\pi \frac{x \cdot \text{ημ}x}{1+\text{συν}^2 x} dx = \int_0^\pi \underbrace{\frac{\text{ημ}x}{1+\text{συν}^2 x}}_{f(x)} \cdot \underbrace{x}_{g(x)} dx = \frac{\pi}{2} \int_0^\pi \frac{\text{ημ}x}{1+\text{συν}^2 x} dx$$

Αλλά,

$$\int \frac{\text{ημ}x}{1+\text{συν}^2 x} dx = -\int \frac{d(\text{συν}x)}{1+\text{συν}^2 x} = -\text{τοξεφ}(\text{συν}x) + c$$

και αρα

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{2} \int_0^\pi \frac{\text{ημ}x}{1+\text{συν}^2 x} dx &= -\frac{\pi}{2}\Big[\text{τοξεφ}(\text{συν}x)\Big]_0^\pi = -\frac{\pi}{2}\Big[\text{τοξεφ}(\text{συν}(\pi)) - [\text{τοξεφ}(\text{συν}(0))\Big] \\ &= \frac{\pi}{2}\Big[\text{τοξεφ}(1) - \text{τοξεφ}(-1)\Big] = \frac{\pi}{2}\Big[\text{τοξεφ}(1) + \text{τοξεφ}(1)\Big] \\ &= \pi\Big[\text{τοξεφ}(1)\Big] = \pi \cdot \frac{\pi}{4} = \frac{\pi^2}{4}. \end{aligned}$$

◀

[6] (α′) $f(2a - x) = f(x)$, $\forall x \in [0, 2a]$. Τότε,

$$\int_0^{2a} f(x)\,dx = \int_0^a f(x)\,dx + \int_a^{2a} f(x)\,dx.$$

Αλλά,

$$\begin{aligned} \int_a^{2a} f(x)\,dx &= \int_a^0 f(2a - x)\,d(2a - x) \\ &= \int_a^0 f(x)\,d(2a - x) = -\int_a^0 f(x)\,dx \\ &= \int_0^a f(x)\,dx \end{aligned}$$

και αρα

$$\int_0^{2a} f(x)\,dx = \int_0^a f(x)\,dx.$$

Εφαρμόζοντας το πιο πάνω αποτέλεσμα για $a = \pi/2$ και αφού $\text{ημ}(\pi - x) = \text{ημ}x$, $\forall x \in (0, \pi)$ αλλά και λόγω της συνέχειας της f, έπεται ότι

$$\int_0^\pi f(\text{ημ}x)\,dx = 2\int_0^{\pi/2} f(\text{ημ}x)\,dx.$$

(β′) $f(2a-x) = -f(x)$, $\forall x \in [0, 2a]$. Τότε,

$$\int_0^{2a} f(x)\,dx = \int_0^a f(x)\,dx + \int_a^{2a} f(x)\,dx$$

Αλλά,

$$\begin{aligned} \int_a^{2a} f(x)\,dx &= \int_a^0 f(2a-x)\,d(2a-x) = -\int_0^a (-f(x))\,dx \\ &= -\int_0^a f(x)\,dx \end{aligned}$$

και αρα

$$2\int_a^{2a} f(x)\,dx = 0, \text{ δηλ. } \int_a^{2a} f(x)\,dx = 0.$$

◀

[7] Αφού η συνάρτηση g είναι συνεχής, έπεται ότι και η $h(x) = x^3 \cdot g(x^2)$, $x \in [0, a]$ είναι συνεχής, άρα (κατά Riemann) ολοκληρώσιμη. Θεωρούμε το μετασχηματισμό $u : [0, a] \to \mathbb{R}$ με $u(x) = x^2$ ο οποίος είναι 1-1 στο πεδίο ορισμού του κα μάλιστα γνησίως αύξουσα συνάρτηση $(du/dx = 2x \geq 0$, $\forall x \in [0, a]$ και=0 μόνον για $x = 0)$. Έτσι,

$$\begin{aligned} \int_0^a x^3 \cdot g(x^2)\,dx &= \int_0^a x \cdot g(x^2) \cdot x^2\,dx &= \frac{1}{2}\int_{u(0)}^{u(a)} u \cdot g(u)\,du \\ &= \frac{1}{2}\int_0^{a^2} u \cdot g(u)\,du &\equiv \frac{1}{2}\int_0^{a^2} x \cdot g(x)\,dx. \end{aligned}$$

Εύκολα βλέπουμε ότι $h(x) \geq 0$, $\forall x \in [0, 1]$ και $h(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$.
Είναι $h(1) = \text{τοξεφ}(1) = \frac{\pi}{4}$ και αρα

$$E = \int_0^1 x^3 \cdot \text{τοξεφ}(x^2)\,dx = \frac{1}{2}\int_0^{1^2} x \cdot \text{τοξεφ}(x)\,dx = \frac{1}{2}\int_0^1 x \cdot \text{τοξεφ}(x)\,dx$$

όπου στην πρώτη ισότητα κάναμε χρήση του προηγούμενου ερωτήματος.
Ακολούθως, κατά τα γνωστά (ολοκλήρωση κατά παράγοντες) έχουμε

$$\int \text{τοξεφ}(x)\,dx = \frac{1}{2}\left(x^2\text{τοξεφ}(x) + \text{τοξεφ}(x) - x\right) + c$$

και αρα

$$E = \frac{1}{2}\left[x^2\text{τοξεφ}(x) + \text{τοξεφ}(x) - x\right]_0^1 = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}\left(\frac{\pi}{2} - 1\right)$$

(τετραγωνικές μονάδες). ◀

[8] Ο μετασχηματισμός $t = k - x \Leftrightarrow x = k - t$ απεικονίζει (με αντιστρέψιμο τρόπο) το διάστημα $[0, k]$ στον εαυτό του. Επίσης, $dt = -dx$ και αρα,

$$A = \int_0^k \frac{f(x)}{f(x) + f(x-k)}\,dx = B.$$

Αλλά,

$$A + B = \int_0^k \frac{f(x) + f(x-k)}{f(x) + f(x-k)} dx = \int_0^k dx = k$$

και αφού $A = B$, έπεται ότι
$$A = B = \frac{k}{2}.$$
Τώρα, για τον υπολογισμό του
$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{\text{ημ}x}}{\sqrt{\text{ημ}x} + \sqrt{\text{συν}x}} dx,$$
θεωρούμε τη συνάρτηση f με τύπο
$$f(x) = \sqrt{\text{ημ}x},\ x \in [0, \pi/2]$$
όπως επίσης και η συνάρτηση g με τύπο
$$g(x) = \frac{f(x)}{f(x) + f\left(\frac{\pi}{2} - x\right)} = \frac{\sqrt{\text{ημ}x}}{\sqrt{\text{ημ}x} + \sqrt{\text{ημ}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}} = \frac{\sqrt{\text{ημ}x}}{\sqrt{\text{ημ}x} + \sqrt{\text{συν}x}}$$
για $x \in [0, \pi/2]$.
Έτσι, από το προηγούμενο ερώτημα,
$$I = \frac{\frac{\pi}{2}}{2} = \frac{\pi}{4}.$$
Επίσης, εντελώς όμοια,
$$J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\text{ημ}^3 x}{\text{ημ}^3 x + \text{συν}^3 x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\text{ημ}^3 x}{\text{ημ}^3 x + \text{ημ}^3\left(\frac{\pi}{2} - x\right)} dx = \frac{\frac{\pi}{2}}{2} = \frac{\pi}{4}.$$
◀

[9] (α΄) Η f είναι συνεχής, άρα έχει νόημα το $\int_{-a}^{a} f(x) \cdot g(x)\, dx$ και αφού $g(x) + g(-x) = 1,\ \forall x \in \mathbb{R}$, έχουμε ότι $g(x) = 1 - g(-x),\ \forall x \in [-a, a]$. Έτσι,
$$\begin{aligned}\int_{-a}^{a} f(x) \cdot (1 + g(x)) dx &= \int_{-a}^{a} f(x) \cdot (1 - g(-x)) dx \\ &= \int_{-a}^{a} f(x)\, dx - \int_{-a}^{a} g(-x)\, dx.\end{aligned}$$
Αφού η f είναι άρτια, ξέρουμε ότι
$$\int_{-a}^{a} f(x)\, dx = 2\int_0^{a} f(x)\, dx.$$
Ακολούθως, θεωρούμε το μετασχηματισμό $u : [-a, a] \to \mathbb{R}$ με $u(x) = -x$. Είναι $u(-a) = a,\ u(a) = -a$ και τότε
$$\begin{aligned}\int_{-a}^{a} f(x) \cdot g(-x)\, dx &= \int_{u(-a)}^{u(a)} f(-u) \cdot g(u)\, dx = \int_{a}^{-a} f(u) \cdot g(u)\, du \\ &\equiv \int_{a}^{-a} f(x) \cdot g(x)\, dx\end{aligned}$$
Συνεπώς,
$$\int_{-a}^{a} f(x) \cdot g(x)\, dx = 2\int_0^{a} f(x)\, dx - \int_{a}^{-a} f(x) \cdot g(x)\, dx$$
και τελικά,
$$\int_{a}^{-a} f(x) \cdot g(x)\, dx = \int_0^{a} f(x)\, dx.$$

(β') Εφαρμόζουμε το προηγούμενο ερώτημα για $a = \frac{\pi}{2}$, $f(x) = $ συνx, $\forall x \in [-a, a] \equiv [-\pi/2, \pi/2]$ και $g(x) = 1/(e^{2x}+1), \forall x \in \mathbb{R}$. Είναι συν$(-x) =$ συν(x), $\forall x \in [-\pi/2, \pi/2]$ και

$$x \in [-\pi/2, \pi/2] \Rightarrow (-x) \in [-\pi/2, \pi/2]$$

δηλ. f άρτια και $\forall x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} g(x) + g(-x) &= \frac{1}{e^{2x}+1} + \frac{1}{e^{-2x}+1} = \frac{e^{-2x}+1+e^{2x}+1}{(e^{2x}+1)(e^{-2x}+1)} \\ &= \frac{e^{-2x}+e^{2x}+2}{e^{-2x}+e^{2x}+2} = 1 \end{aligned}$$

και αρα

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\text{συν}x}{e^{2x}+1}\,dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \text{συν}x\,dx = 1.$$

◀

[10] (α') Η $f/(1+g)$ είναι συνεχής (ως σύνθεση συνεχών), άρα έχει νόημα το $\int_{-a}^{a} \frac{f(x)}{1+g(x)}\,dx$ και

$$\int_{-a}^{a} \frac{f(x)}{1+g(x)}dx = \int_{-a}^{0} \frac{f(x)}{1+g(x)}dx + \int_{0}^{a} \frac{f(x)}{1+g(x)}dx$$

Αλλά,

$$\int_{-a}^{0} \frac{f(x)}{1+g(x)}dx = -\int_{a}^{0} \frac{f(-x)}{1+g(-x)}dx = \int_{0}^{a} \frac{f(-x)}{1+g(-x)}dx = ` \int_{0}^{a} \frac{f(x)}{1+g(-x)}dx$$

αφού η f είναι άρτια και αφού

$$g(x) \cdot g(-x) = 1 \Rightarrow g(x) \neq 0, \forall x \in [-a, a]$$

έπεται ότι

$$\int_{0}^{a} \frac{f(x)}{1+g(-x)}dx = \int_{0}^{a} \frac{g(x)f(x)}{g(x)(1+g(-x))}dx = \int_{0}^{a} \frac{g(x)f(x)}{g(x)+g(x)g(-x)}dx = \int_{0}^{a} \frac{g(x)f(x)}{1+g(x)}dx$$

(από την υπόθεση για την g). Συνεπώς,

$$\begin{aligned} \int_{-a}^{a} \frac{f(x)}{1+g(x)}dx &= \int_{0}^{a} \frac{g(x)f(x)}{1+g(x)}dx + + \int_{0}^{a} \frac{f(x)}{1+g(x)}dx \\ &= \int_{0}^{a} \frac{f(x)(g(x)+1)}{1+g(x)}dx = \int_{0}^{a} f(x)\,dx. \end{aligned}$$

(β') Εφαρμόζουμε το προηγούμενο ερώτημα για $a = \pi/2$,

$$f(x) = \text{συν}x,\ x \in [-a, a] \equiv [-\pi/2, \pi/2]$$

και

$$g(x) = \frac{1}{e^{2x}+1},\ x \in \mathbb{R}.$$

Είναι συν$(-x) =$ συν(x), $\forall x \in [-\pi/2, \pi/2]$, δηλ. f άρτια και $\forall x \in \mathbb{R}$ είναι

$$g(x) \cdot g(-x) = e^{2x} \cdot e^{-2x} = 1.$$

Άρα

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\text{συν}x}{e^{2x}+1}\,dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \text{συν}x \cdot \frac{1}{e^{2x}+1}\,dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \text{συν}x\,dx = 1.$$

◀

[11] (α′) Το $\int_{-a}^{a} \frac{f(x)}{e^{g(x)}+1} dx$ έχει νόημα λόγω της συνέχειας της $f/(e^g+1)$ (ως σύνθεση συνεχών). Ας επισημάνουμε επίσης ότι $e^g+1>0$ παντού. Τώρα, είναι

$$\int_{-a}^{a} \frac{f(x)}{e^{g(x)}+1} dx = \int_{-a}^{0} \frac{f(x)}{e^{g(x)}+1} dx + \int_{0}^{a} \frac{f(x)}{e^{g(x)}+1} dx$$

Αλλά,

$$\begin{aligned}\int_{-a}^{0} \frac{f(x)}{e^{g(x)}+1} dx &= -\int_{a}^{0} \frac{f(-x)}{e^{g(-x)}+1} dx = \int_{0}^{a} \frac{f(-x)}{e^{g(-x)}+1} dx = \int_{0}^{a} \frac{f(x)}{e^{-g(x)}+1} dx \\ &= \int_{0}^{a} \frac{f(x)}{\frac{1}{e^{g(x)}}+1} dx = \int_{0}^{a} \frac{e^{g(x)} f(x)}{e^{g(x)}+1} dx\end{aligned}$$

(χρησιμοποιήσαμε τις υποθέσεις συμμετρίας των f και g) και αρα

$$\begin{aligned}\int_{-a}^{a} \frac{f(x)}{e^{g(x)}+1} dx &= \int_{0}^{a} \frac{e^{g(x)} f(x)}{e^{g(x)}+1} dx + \int_{0}^{a} \frac{f(x)}{e^{g(x)}+1} dx \\ &= \int_{0}^{a} \left[\frac{e^{g(x)} f(x)}{e^{g(x)}+1} + \frac{f(x)}{e^{g(x)}+1} \right] dx = \int_{0}^{a} \frac{f(x)(e^{g(x)}+1)}{e^{g(x)}+1} dx \\ &= \int_{0}^{a} f(x)\, dx\end{aligned}$$

(β′) Εφαρμόζουμε το προηγούμενο ερώτημα για $a = \pi/2$,

$$f(x) = \text{συν}^2 x + 5,\ x \in [-a, a] \equiv [-\pi/2, \pi/2]$$

και

$$g(x) = \text{ημ} x,\ x \in \mathbb{R}.$$

Αφού συν$(-x) =$ συν(x), $\forall x \in [-\pi/2, \pi/2]$, έπεται ότι η f είναι άρτια και αφού $\forall x \in \mathbb{R}$ είναι

$$g(-x) = \text{ημ}(-x) = -\text{ημ} x = -g(x),$$

έπεται ότι η g είναι περιττή συνάρτηση.
Πληρούνται λοιπόν όλες οι υποθέσεις του πρώτου ερωτήματος. Άρα

$$\begin{aligned}&\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\text{συν}^2 x + 5}{2e^{\text{ημ} x}+2} dx = \frac{1}{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\text{συν}^2 x + 5}{e^{\text{ημ} x}+1} dx \overset{1.}{=} \frac{1}{2} \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} (\text{συν}^2 x + 5)\, dx \\ =\ & \frac{1}{2} \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1+\text{συν}(2x)}{2} + 5 \right) dx \\ =\ & \frac{1}{2} \left[\frac{\text{ημ}(2x)}{4} + \frac{11x}{4} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{11\pi}{8}\end{aligned}$$

◀

[12] (α′) Έχουμε καταρχάς ότι αφού η f είναι άρτια,

$$f(-x) = f(x),\ \forall x \in [-a, a]. \tag{7}$$

Επίσης,

$$\int_{-a}^{a} \frac{f(x)}{1+b^x} dx = \int_{-a}^{0} \frac{f(x)}{1+b^x} dx + \int_{0}^{a} \frac{f(x)}{1+b^x} dx$$

Θεωρούμε το μετασχηματισμό $t : [-a, 0] \to \mathbb{R}$ με $t(x) = -x$ ο οποίος είναι $1-1$ και επί στο πεδίο ορισμού του και μάλιστα γνησίως φθίνουσα συνάρτηση ($dt/dx = -1 < 0, \forall x \in (-a, 0)$ και συνεχής στα άκρα του πεδίου ορισμού της). Έτσι,

$$\begin{aligned}
\int_{-a}^{0} \frac{f(x)}{1+b^x} dx &= -\int_{t(-a)}^{t(0)} \frac{f(-t)}{1+b^{-t}} dt \quad = \quad -\int_{a}^{0} \frac{f(-t)}{1+b^{-t}} dt \\
&= \int_{0}^{a} \frac{f(-t)}{1+b^{-t}} dt \quad \overset{(7)}{=} \quad \int_{0}^{a} \frac{f(t)}{1+b^{-t}} dt \\
&= \int_{0}^{a} \frac{b^t \cdot f(t)}{1+b^t} dt \quad \equiv \quad \int_{0}^{a} \frac{b^x \cdot f(x)}{1+b^x} dx
\end{aligned}$$

και αρα

$$\begin{aligned}
\int_{-a}^{a} \frac{f(x)}{1+b^x} dx &= \int_{0}^{a} \frac{b^x \cdot f(x)}{1+b^x} dx + \int_{0}^{a} \frac{f(x)}{1+b^x} dx \quad = \quad \int_{0}^{a} \frac{f(x) + b^x \cdot f(x)}{1+b^x} dx \\
&= \int_{0}^{a} \frac{f(x) \cdot (1+b^x)}{1+b^x} dx \quad = \quad \int_{0}^{a} f(x)\, dx
\end{aligned}$$

(β′) Θα εφαρμόσουμε το προηγούμενο ερώτημα για $a = 1 > 0,\ b = e > 0$ και

$$f : [-1, 1] \to \mathbb{R} \quad \text{με} \quad f(x) = \frac{1}{x^2+1}.$$

Η f είναι άρτια και αρα από πρίν:

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{1} \frac{dx}{(x^2+1)(1+e^x)} &= \int_{-1}^{1} \frac{\frac{1}{x^2+1}}{1+e^x} dx \quad = \quad \int_{0}^{1} \frac{dx}{x^2+1} \\
&= [\text{τοξεφ}x]_0^1 \quad = \quad \text{τοξεφ}1 - \text{τοξεφ}0 \\
&= \frac{\pi}{4}.
\end{aligned}$$

◀

[13] (α′) Η πρώτη ισότητα έπεται εύκολα θεωρώντας την αντικατάσταση $u = 2a - x \Rightarrow du = -dx$ και $u(0) = 2a,\ u(2a) = 0$. Τότε,

$$\int_{0}^{2a} f(2a-x)\, dx \quad = \quad -\int_{2a}^{0} f(u)\, du \quad = \quad \int_{0}^{2a} f(u)\, du \quad \equiv \quad \int_{0}^{2a} f(x)\, dx.$$

Ακολούθως,

$$\begin{aligned}
f(a-x) + f(a+x) = \frac{\beta}{2},\ \forall x \in [0, a] \quad &\Leftrightarrow \quad \int_{0}^{a} [f(a-x) + f(a+x)]\, dx \; = \; \int_{0}^{a} \frac{\beta}{2}\, dx \\
&\Leftrightarrow \quad \int_{0}^{a} f(a-x)\, dx + \int_{0}^{a} f(a+x)\, dx \; = \; \left[\frac{\beta}{2}\right]_0^a \\
&= \frac{a\beta}{2}. \qquad (8)
\end{aligned}$$

Για το $\int_0^a f(a-x)\, dx$ θεωρούμε την αντικατάσταση $u = a + x$. Τότε $du = dx$ και $u(0) = a,\ u(a) = 2a$. Έχουμε

$$\int_{0}^{a} f(a-x)\, dx \quad = \quad \int_{a}^{2a} f(2a-u)\, du \quad \equiv \quad \int_{a}^{2a} f(2a-x)\, dx.$$

Για το $\int_0^a f(a+x)\,dx$ θεωρούμε την αντικατάσταση $u = a - x$. Τότε $-du = dx$ και $u(0) = a,\ u(a) = 0$. Έχουμε

$$\int_0^a f(a+x)\,dx \quad = \quad -\int_a^0 f(2a-u)\,du \quad \equiv \quad \int_0^a f(2a-x)\,dx.$$

Τότε, αντικαθιστώντας στην (8),

$$\begin{aligned} \int_a^{2a} f(2a-x)\,dx + \int_0^a f(2a-x)\,dx &= \frac{a\beta}{2} \\ \Rightarrow \int_0^{2a} f(2a-x)\,dx &= \frac{a\beta}{2}. \end{aligned}$$

Άρα,

$$\int_0^{2a} f(2a-x)\,dx \quad = \quad \int_0^{2a} f(x)\,dx \quad = \quad \frac{a\beta}{2}.$$

(β′) Θεωρούμε τη συνάρτηση f με τύπο $f(x) = \dfrac{3+e^{a-x}}{1+e^{a-x}}$. Τότε

$$\begin{aligned} f(a-x) + f(a+x) &= \frac{3+e^{a-(a-x)}}{1+e^{a-(a-x)}} + \frac{3+e^{a-(a+x)}}{1+e^{a-(a+x)}} \\ &= \frac{3+e^{x}}{1+e^{x}} + \frac{3+e^{-x}}{1+e^{-x}} \\ &= \frac{3+e^{x}}{1+e^{x}} + \frac{e^x(3+e^{-x})}{e^x(1+e^{-x})} \\ &= \frac{3+e^{x}}{1+e^{x}} + \frac{3e^x+1}{1+e^{x}} \\ &= \frac{3+e^x+3e^x+1}{1+e^x} \quad = \quad 4\frac{e^x+1}{e^x+1} \\ &= 4. \end{aligned}$$

Εφαρμόζουμε λοιπόν το προηγούμενο ερώτημα για $\beta = 8$:

$$\int_0^{2a} f(x)\,dx \quad = \quad \int_0^{2a} \frac{3+e^{a-x}}{1+e^{a-x}}\,dx \quad = \quad \frac{a\beta}{2} \quad = \quad 4a.$$

◀

Παράρτημα

Γεωμετρική ερμηνεία της σχέσης

$$\int_0^a f(x)\,dx \quad = \quad \int_0^a f(a-x)\,dx,$$

όπου f συνεχής συνάρτηση και $a > 0$.