Ακολουθίες

Λύσεις των σχολικών ασκήσεων

Δραστηριότητες 6.5.2 - Γεωμετρική πρόοδος

Άσκηση 1

Να χαρακτηρίσετε ΣΩΣΤΟ ή ΛΑΘΟΣ την καθεμιά από τις πιο κάτω προτάσεις και να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

(α΄) Η ακολουθία με αναδρομικό τύπο $a_{\nu+1} = 5a_\nu,\ \nu \in \mathbb{N}$ είναι γεωμετρική πρόοδος.

(β΄) Αν για τρεις οποιουσδήποτε διαδοχικούς όρους α, β, γ μιας ακολουθίας ισχύει ότι $\frac{\beta}{\alpha} = \frac{\beta}{\gamma}$, τότε η ακολουθία είναι γεωμετρική πρόοδος.

(γ΄) Κάθε σταθερή ακολουθία $a_\nu = c,\ \nu \in \mathbb{N}$ είναι γεωμετρική πρόοδος.

(δ΄) Αν σε γεωμετρική πρόοδο ισχύει ότι $\lambda = 1$, τότε $\Sigma_\nu = \nu \cdot a_1$.

(ε΄) Αν η ακολουθία $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, \dots$ είναι γεωμετρική πρόοδος, τότε και η ακολουθία που αποτελείται από τους όρους $a_2, a_4, a_6, \dots$ είναι γεωμετρική πρόοδος.

Απάντηση

(α΄) **ΛΑΘΟΣ**. Η μηδενική ακολουθία για παράδειγμα. Ικανοποιεί τη δοθείσα αναδρομική σχέση αλλά δεν αποτελεί γεωμετρική πρόοδο. Αν όμως υποθέσουμε ότι $a_\nu \neq 0,\ \forall \nu \in \mathbb{N}$, τότε η δοθείσα αποτελεί Γ.Π. με λόγο $\lambda = 5$.

(β΄) **ΛΑΘΟΣ**. Για παράδειγμα η ακολουθία

$$5,\ 10,\ 5,\ 10,\ 5,\ 10, \dots\ .$$

Οποιουσδήποτε διαδοχικούς όρους α, β, γ της ακολουθίας αυτής και να θεωρήσουμε, ισχύει ότι $\frac{\beta}{\alpha} = \frac{\beta}{\gamma}$, αλλά η ακολουθία αυτή δεν είναι γεωμετρική πρόοδος, αφού $5^2 = 25 \neq 10 \times 10 = 100$.

(γ΄) **ΣΩΣΤΟ**. Αν α, β, γ τρείς οποιοιδήποτε διαδοχικοί όροι της ακολουθίας αυτής, τότε $\alpha = \beta = \gamma = c$ και άρα $2\beta = 2c = \alpha + \gamma$.

(δ′) **ΣΩΣΤΟ**. Η ακολουθία είναι τότε η

$$a_1,\ a_1,\ a_1,\ \ldots,\ a_1,\ \ldots\ .$$

Άρα, για κάθε $\nu \in \mathbb{N}$,

$$\Sigma_\nu \;=\; \underbrace{a_1 + a_1 + \ldots + a_1}_{\nu-\text{προσθετέοι}} \;=\; \nu \cdot a_1.$$

(ε′) **ΣΩΣΤΟ**. Αφού η ακολουθία $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, \ldots$ είναι γεωμετρική πρόοδος, έστω με λόγο λ, τότε

$$\begin{aligned}
a_2 &= \lambda a_1,\\
a_4 &= \lambda^3 a_1 = \lambda^2(\lambda a_1) = \lambda^2 a_2,\\
a_6 &= \lambda^5 a_1 = \lambda^4(\lambda a_1) = \lambda^2 a_4,\\
&\vdots\\
a_{2k} &= \lambda^{2k-1} a_1 = \lambda^{2k}(\lambda a_1) = \lambda^2 a_{2k-2}
\end{aligned}$$

και άρα η ακολουθία που αποτελείται από τους όρους $a_2, a_4, a_6, \ldots$ είναι γεωμετρική πρόοδος (με λόγο $\lambda_* = \lambda^2$).

■

Άσκηση 2

Σε γεωμετρική πρόοδο είναι $a_1 = -1$ και $\lambda = 3$. Να βρείτε:
(α) τον πέμπτο όρο της προόδου,
(β) το άθροισμα των 10 πρώτων όρων της προόδου.

Απάντηση

(α) $a_5 = \lambda^4 \cdot a_1 = 3^5 \cdot (-1) = -3^5 = -243$.

(β) $\Sigma_{10} = \dfrac{(-1)\cdot(1-3^{10})}{1-3} = \dfrac{1-3^{10}}{2}$. ■

Άσκηση 3

Να αποδείξετε ότι η ακολουθία με $\nu-$ιοστό όρο $a_\nu = -5 \cdot 4^\nu$, $\nu \in \mathbb{N}$ είναι γεωμετρική πρόοδος.

Απάντηση

Έστω $\nu \in \mathbb{N}$ σταθεροποιημένο. Τότε

$$\frac{a_{\nu+1}}{a_\nu} = \frac{-5\cdot 4^{\nu+1}}{-5\cdot 4^\nu} = 4$$

και άρα η ακολουθία αποτελεί γεωμετρική πρόοδο (με λόγο $\lambda = 4$). ■

Άσκηση 4

Σε γεωμετρική πρόοδο, δίνεται ότι $a_4 = 3$ και $a_8 = \frac{1}{27}$. Να σχηματίσετε την πρόοδο.

Απάντηση

$$\begin{cases} a_4 = 3 \Leftrightarrow a_1\lambda^3 = 3 \\ \\ a_8 = \frac{1}{27} \Leftrightarrow a_1\lambda^7 = \frac{1}{27} \end{cases} \Leftrightarrow \frac{a_1\lambda^7}{a_1\lambda^3} = \frac{1/27}{3} \Leftrightarrow \lambda^4 = \frac{1}{81} = \left(\frac{1}{3}\right)^4 \Leftrightarrow \lambda = \pm\frac{1}{3}.$$

Συνεπώς έχουμε δύο προόδους:
Η πρώτη με $a_1 = \frac{3}{\lambda_1^3} = \frac{3}{\frac{1}{3^3}} = 3^4 = 81$ και $\lambda = \frac{1}{3}$:

$$81, \quad 27, \ 9, \quad 3, \ 1, \ \frac{1}{3}, \ \frac{1}{9}, \ \frac{1}{27}, \ldots$$

και η δεύτερη με $a_1 = \frac{3}{-\lambda_1^3} = -\frac{3}{\frac{1}{3^3}} = -3^4 = -81$ και $\lambda = -\frac{1}{3}$:

$$-81, \quad 27, \ -9, \quad 3, \ -1, \ \frac{1}{3}, \ -\frac{1}{9}, \ \frac{1}{27}, \ldots \ .$$

■

Άσκηση 5

Μεταξύ των αριθμών 15 και 480 να παρεμβάλετε τέσσερις αριθμούς, ώστε όλοι μαζί να αποτελούν γεωμετρική πρόοδο.

Απάντηση

Μεταξύ των αριθμών 15 και 480 θα παρεμβάλουμε τέσσερις αριθμούς $\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5$, ώστε όλοι μαζί να αποτελούν γεωμετρική πρόοδο. Στο σύνολο θα είναι 6 αριθμοί:

$$15 = \alpha_1, \ \alpha_2, \ \alpha_3, \ \alpha_4, \ \alpha_5 \ \alpha_6 = 480.$$

Είναι

$$\alpha_6 = 480 \Leftrightarrow 480 = \alpha_1\lambda^5 \Leftrightarrow 480 = 15\lambda^5 \Leftrightarrow \lambda^5 = 32 = 2^5 \Leftrightarrow \lambda = 2.$$

Άρα,

$$\alpha_2 = \lambda\alpha_1 = 30, \ \alpha_3 = \lambda\alpha_2 = 60, \ \alpha_4 = \lambda\alpha_3 = 120, \ \alpha_5 = \lambda\alpha_4 = 240.$$

$$\alpha_1 = 15 \xrightarrow{\times 2} \alpha_2 = 30 \xrightarrow{\times 2} \alpha_3 = 60 \xrightarrow{\times 2} \alpha_4 = 120 \xrightarrow{\times 2} \alpha_5 = 240 \xrightarrow{\times 2} \alpha_6 = 480$$

■

Άσκηση 6

Σε γεωμετρική πρόοδο, δίνεται ότι $\alpha_1 + \alpha_2 = 3$ και $\alpha_3 + \alpha_4 = 12$. Να υπολογίσετε το άθροισμα των 7 πρώτων όρων της προόδου.

Απάντηση

$$\begin{aligned} \alpha_1 + \alpha_2 = 3 \quad &\Rightarrow \quad \alpha_1 + \alpha_1\lambda = 3 \Rightarrow \alpha_1(1+\lambda) = 3 \\ \alpha_3 + \alpha_4 = 12 \quad &\Rightarrow \quad \alpha_1\lambda^2 + \alpha_1\lambda^3 = 12 \Rightarrow \alpha_1\lambda^2(1+\lambda) = 12. \end{aligned}$$

Διαιρούμε κατά μέλη τις δύο πιο πάνω σχέσεις:

$$\frac{\alpha_1\lambda^2(1+\lambda)}{\alpha_1(1+\lambda)} = \frac{12}{3} \Rightarrow \lambda^2 = 4 \Rightarrow \lambda = \pm 2$$

και εφ΄ όσον δεν έχουμε κάποιο περιορισμό για το λόγο λ της προόδου, έχουμε δύο προόδους: αντικαθιστούμε $\lambda_1 = 2$ στην πρώτη σχέση και βρίσκουμε $a_1 = 1$. Τότε

$$\Sigma_7 = \frac{1 \cdot (1-2^7)}{1-2} = 127.$$

Αντικαθιστούμε $\lambda_2 = -2$ στην πρώτη σχέση και βρίσκουμε $a_1 = -1$. Τότε

$$\Sigma_7 = \frac{-1 \cdot (1-(-2)^7)}{1-2} = -129.$$

■

Άσκηση 7

Να υπολογίσετε το άθροισμα $\quad 3 + 6 + 12 + \ldots + 192$.

Απάντηση

Θα πρέπει πρώτα να βρούμε το πλήθος των προσθετέων όρων στο πιο πάνω άθροισμα.
Κατ΄ αρχάς, η ακολουθία $\quad 3,\ 6,\ 12,\ \ldots$ είναι γεωμετρική πρόοδος:
$\alpha = 3,\ \beta = 6,\ \gamma = 12$. Τότε $\beta^2 = 36 = 3 \cdot 12 = \alpha \cdot \gamma$. Ο λόγος της προόδου είναι $\lambda = \beta/\alpha = 2$.
Έχουμε:

$$\begin{aligned} a_\nu = 129 \quad &\Leftrightarrow \quad a_1\lambda^{\nu-1} = 192 \quad \Leftrightarrow \quad 2^{\nu-1} = \frac{192}{3} = 64 = 2^6 \\ &\Leftrightarrow \quad \nu - 1 = 6 \quad \Leftrightarrow \nu = 7. \end{aligned}$$

Άρα,

$$3 + 6 + 12 + \ldots + 192 \quad = \quad \Sigma_7 \quad = \quad \frac{3(1-2^7)}{1-2} \quad = \quad \frac{127}{3} \quad = \quad 381.$$

■

Άσκηση 8

Σε απόλυτα γνήσια φθίνουσα γεωμετρική πρόοδο, ο πρώτος όρος ισούται με το $\frac{1}{2}$ του αθροίσματος των άπειρων όρων της. Αν το άθροισμα των δύο πρώτων όρων της είναι 20, να σχηματίσετε την πρόοδο.

Απάντηση

Η γεωμετρική πρόοδος είναι απολύτως γνησίως φθίνουσα $\Leftrightarrow 0 < |\lambda| < 1$, δηλαδή $-1 < \lambda < 1$ και $\lambda \neq 0$.
Από υπόθεση είναι

$$a_1 = \frac{1}{2} \cdot \Sigma_\infty \Rightarrow a_1 = \frac{a_1}{1-\lambda}. \tag{1}$$

Επίσης, από υπόθεση,

$$a_1 + a_2 = 20 \Rightarrow a_1 + a_1\lambda = 20 \Rightarrow a_1(1+\lambda) = 20 \Rightarrow a_1 = \frac{20}{1+\lambda}. \tag{2}$$

Αντικαθιστούμε στην (1):

$$\frac{20}{1+\lambda} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\frac{20}{1+\lambda}}{1-\lambda} \Rightarrow 1-\lambda = \frac{1}{2} \Rightarrow \lambda = \frac{1}{2}.$$

Τότε, από την (2) βρίσκουμε ότι $a_1 = \frac{40}{3}$.
Συνεπώς, η πρόοδος είναι η

$$\frac{40}{3}, \frac{20}{3}, \frac{10}{3}, \frac{1}{3}, \ldots .$$

∎

Άσκηση 9

Να υπολογίσετε τα πιο κάτω αθροίσματα:

(α) $4 + \frac{4}{3} + \frac{4}{9} + \frac{4}{27} + \ldots,$ (β) $\frac{1}{3} - \frac{1}{2} - \frac{2}{9} + \frac{1}{10} + \frac{4}{27} - \frac{1}{50} - \ldots .$

Απάντηση

(α) $4 + \frac{4}{3} + \frac{4}{9} + \frac{4}{27} + \ldots .$

Η ακολουθία $4, \frac{4}{3}, \frac{4}{9}, \frac{4}{27}, \ldots$ είναι γεωμετρική πρόοδος: $\alpha = 4$, $\beta = \frac{4}{3}$, $\gamma = \frac{4}{9}$. Τότε $\beta^2 = \frac{16}{9} = 4 \cdot \frac{4}{9} = \alpha \cdot \gamma$. Ο λόγος της προόδου είναι $\lambda = \beta/\alpha = \frac{1}{3}$.
Είναι $|\lambda| = \left|\frac{1}{3}\right| = \frac{1}{3} < 1$. Συνεπώς,

$$4 + \frac{4}{3} + \frac{4}{9} + \frac{4}{27} + \ldots \quad = \quad \Sigma_\infty \quad = \quad \frac{4}{1-\frac{1}{3}} \quad = \quad 6.$$

(β) $\boxed{\frac{1}{3}} - \frac{1}{2} \boxed{-\frac{2}{9}} + \frac{1}{10} + \boxed{\frac{4}{27}} - \frac{1}{50} - \ldots .$

Παρατηρούμε ότι το πιο πάνω (άπειρο) άθροισμα αποτελείται από δύο επί μέρους (άπειρα) αθροίσματα, τα $\frac{1}{3} - \frac{2}{9} + \frac{4}{27} + \dots$ και $-\frac{1}{2} + \frac{1}{10} - \frac{1}{50} + \dots$.

Για το πρώτο:

η ακολουθία $\frac{1}{3}, -\frac{2}{9}, \frac{4}{27}, \dots$ είναι γεωμετρική πρόοδος: $\alpha = \frac{1}{3}$, $\beta = -\frac{2}{9}$, $\gamma = \frac{4}{27}$. Τότε $\beta^2 = \frac{4}{81} = \frac{1}{3} \cdot \frac{4}{27} = \alpha \cdot \gamma$. Ο λόγος της προόδου είναι $\lambda = \beta/\alpha = -\frac{2}{3}$.

Είναι $|\lambda| = \left|-\frac{2}{3}\right| = \frac{2}{3} < 1$. Συνεπώς,

$$\frac{1}{3} - \frac{2}{9} + \frac{4}{27} + \dots \quad = \quad \Sigma_\infty \quad = \quad \frac{\frac{1}{3}}{1 - (-\frac{2}{3})} \quad = \quad \frac{1}{5}.$$

Για το δεύτερο:

η ακολουθία $-\frac{1}{2}, \frac{1}{10}, -\frac{1}{50}, \dots$ είναι γεωμετρική πρόοδος: $\alpha = -\frac{1}{2}$, $\beta = \frac{1}{10}$, $\gamma = -\frac{1}{50}$. Τότε $\beta^2 = \frac{1}{100} = \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \left(-\frac{1}{50}\right) = \alpha \cdot \gamma$. Ο λόγος της προόδου είναι $\lambda = \beta/\alpha = -\frac{1}{5}$.

Είναι $|\lambda| = \left|-\frac{1}{5}\right| = \frac{1}{5} < 1$. Συνεπώς,

$$-\frac{1}{2} + \frac{1}{10} - \frac{1}{50} + \dots \quad = \quad \Sigma_\infty \quad = \quad \frac{-\frac{1}{2}}{1 - (-\frac{1}{5})} \quad = \quad -\frac{5}{12}.$$

Άρα,

$$\frac{1}{3} - \frac{1}{2} - \frac{2}{9} + \frac{1}{10} + \frac{4}{27} - \frac{1}{50} - \dots \quad = \quad \frac{1}{5} - \frac{5}{12} \quad = \quad -\frac{13}{60}.$$

■

Άσκηση 10

Πόσα χρήματα πρέπει να τοκίσει κάποιος με ανατοκισμό και ετήσιο επιτόκιο 2%, ώστε να πάρει μετά από 10 χρόνια συνολικά €30000;

Απάντηση

Από τον τύπο του **ανατοκισμού**, $a_\nu = a\left(1 + \frac{\epsilon}{100}\right)^\nu$, για αρχικό κεφάλαιο $a = 30000$, επιτόκιο $\epsilon = 2\%$, χρόνο $\nu = 10$ (χρόνια), έχουμε:

$$\begin{aligned} 30000 = a\left(1 + \frac{2}{100}\right)^\nu \quad &\Rightarrow \quad 30000 = a \cdot (1,02)^{10} \\ &\Rightarrow \quad a = \frac{30000}{(1,02)^{10}} \approx 24610.45 \text{ (€)}. \end{aligned}$$

■

Άσκηση 11

Τοποθετούμε κόκκους ρυζιού στα 64 τετράγωνα μιας σκακιέρας ως εξής: ένας κόκκος στο κάτω αριστερά τετραγωνάκι, δύο στο τετράγωνο που βρίσκεται στα δεξιά του, τέσσερεις στο επόμενο κτλ.
Να υπολογίσετε πόσους κόκκους ρυζιού πρέπει να βάλουμε στο 64ο τετράγωνο της σκακιέρας.

Απάντηση

Η διαδικασία αυτή[1] ταιριάζει στο (αναδρομικό) σχήμα **γεωμετρικής προόδου** με λόγο $\lambda = 2$ και πρώτο όρο $a_1 = 1$. Έτσι,

$$a_{64} = 2^{63}.$$

■

Άσκηση 12

Δίνεται ότι το άθροισμα Σ_ν των ν πρώτων όρων μιας ακολουθίας $(a_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ είναι:

$$\Sigma_\nu = 2 - \frac{2}{5^\nu}.$$

Να αποδείξετε ότι η ακολουθία είναι γεωμετρική πρόοδος και να υπολογίσετε το άθροισμα των άπειρων όρων της.

Απάντηση

Για κάθε $\nu \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} a_\nu = \Sigma_\nu - \Sigma_{\nu-1} &= 2 - \frac{2}{5^\nu} - \left(2 - \frac{2}{5^{\nu-1}}\right) = \frac{2}{5^{\nu-1}} - \frac{2}{5^\nu} \\ &= \frac{2}{5^{\nu-1}}\left(1 - \frac{1}{5}\right) = \frac{2}{5^{\nu-1}} \cdot \frac{4}{5} \\ &= \frac{8}{5^\nu}. \end{aligned}$$

Άρα (για κάθε $\nu \in \mathbb{N}$)

$$\frac{a_{\nu-1}}{a_\nu} = \frac{\frac{8}{5^{\nu-1}}}{\frac{8}{5^\nu}} = 5 = \text{σταθερό}$$

και άρα η ακολουθία $(a_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ είναι γεωμετρική πρόοδος (με λόγο $\lambda = \frac{1}{5}$ και πρώτο όρο $a_1 = \frac{8}{5^1} = \frac{8}{5}$).
Αφού $|\lambda| = \left|\frac{1}{5}\right| = \frac{1}{5} < 1$,

$$\Sigma_\infty = \frac{\frac{8}{5}}{1 - \frac{1}{5}} = \frac{8/5}{4/5} = 2.$$

[1] Δείτε αυτό το σχετικό άρθρο: Wheat and chessboard problem.