'L'homme c'est rien. L'oeuvre c'est tout'
('Ο άνθρωπος δεν είναι τίποτα.
Το αποτέλεσμα είναι που έχει σημασία')

-Γκιστάβ Φλομπέρ (γράμμα στη Γεωργία Σάνδη)

Ενότητα ΙΙ - Αντίστροφες τριγωνομετρικές συναρτήσεις

Έχουμε δεί τις τριγωνομετρικές συναρτήσεις, εστιάζοντας μεταξύ άλλων την προσοχή μας στη γεωμετρική τους (τριγωνομετρικός κύκλος) αλλά και την αναλυτική τους πλευρά (παράγωγος). Εδώ θα τις μελετήσουμε ως συναρτήσεις και συγκεκριμένα ως προς την αντιστρεψιμότητα, αφού οι αντίστροφές τους βρίσκουν πολλές εφαρμογές.

▶ Α. Ορισμός των αντίστροφων τριγωνομετρικών συναρτήσεων

(i) Η συνάρτηση $y=$ τοξημx.
Περιοριζόμαστε στον **πρωτεύων κλάδο** της συνάρτησης $y=f(x)=$ ημx, δηλαδή στο διάστημα $[-\pi/2,\pi/2]$ στον οποίο αυτή είναι 1-1 (και επί του συνόλου $[-1,1]$). Τότε, αυτή αντιστρέφεται και η αντίστροφή της $f^{-1}:[-1,1]\to[-\pi/2,\pi/2]$ συμβολίζεται με $y=$ τοξημx. Ο λόγος της ονομασίας αυτής έγκειται στο γεγονός ότι η τιμή $y=$ τοξημx είναι το **τόξο** που έχει ημίτονο ίσο με x. Δηλαδή,

$$y=\text{τοξημ}x,\ x\in[-1,1] \iff x=\text{ημ}y,\ y\in[-\pi/2,\pi/2].$$

Βασικά αντίστροφα τριγωνομετρικά ημίτονα

(i) $\text{τοξημ}\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{\pi}{6}$, αφού $\text{ημ}\left(-\frac{\pi}{6}\right)=-\frac{1}{2}$ και $\text{τοξημ}\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{\pi}{6}$, αφού $\text{ημ}\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}$

(ii) $\text{τοξημ}(-1)=-\frac{\pi}{2}$, αφού $\text{ημ}\left(-\frac{\pi}{2}\right)=-1$ και $\text{τοξημ}(1)=\frac{\pi}{2}$, αφού $\text{ημ}\left(\frac{\pi}{2}\right)=1$

(iii) $\text{τοξημ}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=-\frac{\pi}{4}$, αφού $\text{ημ}\left(-\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{\sqrt{2}}{2}$ και $\text{τοξημ}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\frac{\pi}{4}$, αφού $\text{ημ}\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

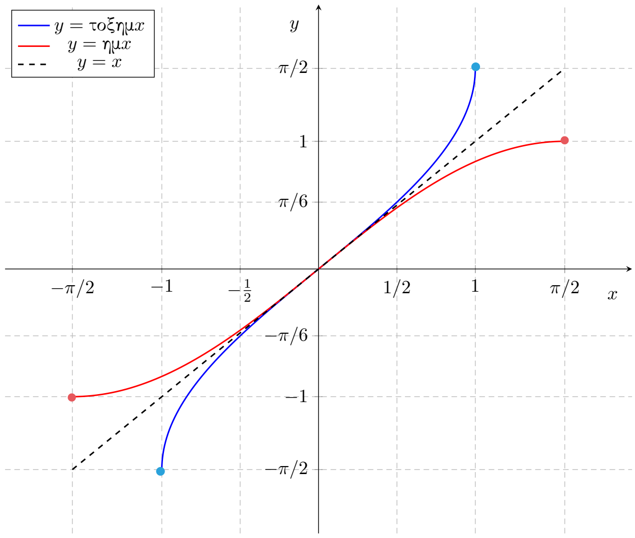
(iv) $\text{τοξημ}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=-\frac{\pi}{3}$, αφού $\text{ημ}\left(-\frac{\pi}{3}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{2}$ και $\text{τοξημ}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{\pi}{3}$, αφού $\text{ημ}\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Παρατήρηση. Για να έχει νόημα η συνάρτηση $h(x)=$ τοξημ$(f(x))$, η οποία είναι σύνθεση των συναρτήσεων f και $y=$ τοξημx, πρέπει το σύνολο τιμών της f να περιέχεται στο πεδίο οριαμού της πρώτης, δηλαδή στο διάστημα $[-1,1]$.
Για *παράδειγμα*, η συνάρτηση $y=$ τοξημ$(2x+1)$ έχει νόημα όταν $-1\leq 2x+1\leq 1$, δηλαδή όταν $-1\leq x\leq 0$.

▷ Εφόσον ο αριθμός $y=$ τοξημ$x,\ x\in[-1,1]$ εκφράζει μια γωνία (στο διάστημα $[-\pi/2,\pi/2]$) μπορούμε να βρούμε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς ημy, συνy, εφy κ.ο.κ..
Αυτό γίνεται είτε με τη χρήση των γνωστών μας τριγωνομετρικών ταυτοτήτων

$$\text{ημ}^2x+\text{συν}^2x=1,\qquad \text{εφ}^2x+1=\text{τεμ}^2x,\qquad \text{σφ}^2x+1=\text{στεμ}^2x,$$

είτε με τη χρήση ορθογωνίου τριγώνου.



Σχήμα 1: Πρωτεύων κλάδος της $y =$ ημx και η αντίστροφή της.

⊳⊳ Για *παράδειγμα*, θα υπολογίσουμε τους αριθμούς συν(τοξημ(3/4)) και εφ(τοξημ(3/4)). Θέτουμε

$$\theta = \text{τοξημ}\left(\frac{3}{5}\right).$$

Τότε, από τον ορισμό της $y =$ τοξημx,

$$\text{ημ}\theta = \frac{3}{5}.$$

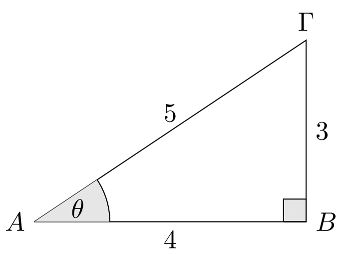
Αφού $x = \frac{3}{4} > 0$, τότε $\theta \in (0, \pi/2) \Rightarrow \text{συν}\theta,\ \text{εφ}\theta > 0$. Τότε

$$\text{ημ}\theta = \frac{3}{5} \Rightarrow \text{ημ}^2\theta = \frac{9}{25} \Rightarrow 1 - \text{συν}^2\theta = \frac{9}{25} \Rightarrow \text{συν}\theta = \sqrt{1 - \frac{9}{25}} = \sqrt{\frac{16}{25}} = \frac{4}{5}$$

και

$$\text{εφ}\theta = \frac{\text{ημ}\theta}{\text{συν}\theta} = \frac{3/5}{4/5} = \frac{3}{4}.$$

Εναλλακτικά, θεωρούμε ορθογώνιο τρίγωνο με μιά από τις οξείες του γωνίες τη θ και τότε αφού ημ$\theta =$(απέναντι)/(υποτείνουσα), το Πυθαγόρειο Θεώρημα δίνει ότι η προσκείμενη πλευρά της θ έχει μήκος 4 μονάδες. Συνεπώς, συν$\theta = \frac{4}{5}$ και εφ $= \frac{3}{4}$.



(ii) Η συνάρτηση $y = \text{τοξσυν}x$.

Περιοριζόμαστε στον **πρωτεύων κλάδο** της συνάρτησης $y = f(x) = \text{συν}x$, δηλαδή στο διάστημα $[0, \pi]$ στον οποίο αυτή είναι 1-1 (και επί του συνόλου $[-1, 1]$). Τότε, αυτή αντιστρέφεται και η αντίστροφή της $f^{-1} : [-1, 1] \to [0, \pi]$ συμβολίζεται με $y = \text{τοξσυν}x$.

Ο λόγος της ονομασίας αυτής έγκειται στο γεγονός ότι η τιμή $y = \text{τοξσυν}x$ είναι το **τόξο** που έχει συνημίτονο ίσο με x. Δηλαδή,

$$y = \text{τοξσυν}x, \ x \in [-1, 1] \iff x = \text{συν}y, \ y \in [0, \pi].$$

Βασικά αντίστροφα τριγωνομετρικά συνημίτονα

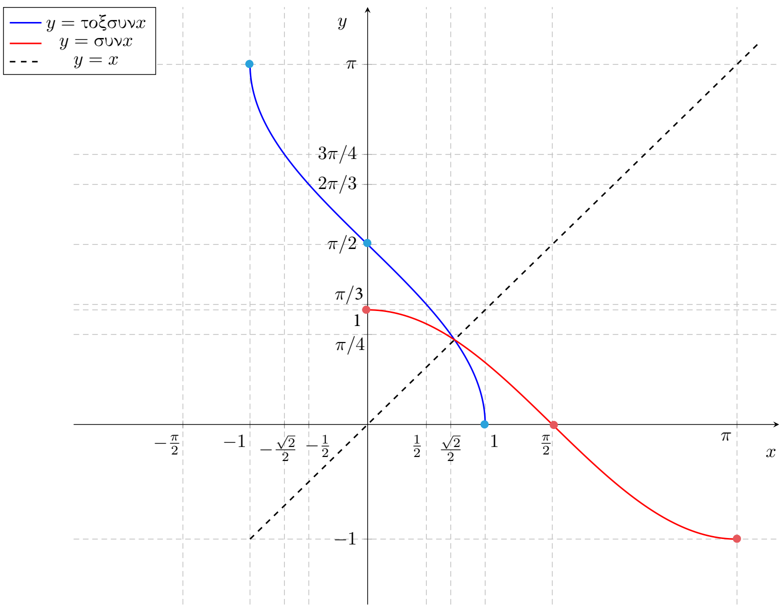
(i) $\text{τοξσυν}\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{2\pi}{3}$, αφού $\text{συν}\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}$ και $\text{τοξσυν}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{3}$, αφού $\text{συν}\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$.

(ii) $\text{τοξσυν}0 = \frac{\pi}{2}$, αφού $\text{συν}\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$.

(iii) $\text{τοξσυν}(-1) = \pi$, αφού $\text{συν}(\pi) = -1$ και $\text{τοξσυν}(1) = 0$, αφού $\text{συν}(0) = 1$

(iv) $\text{τοξσυν}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{3\pi}{4}$, αφού $\text{συν}\left(\frac{3\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ και $\text{τοξσυν}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\pi}{4}$, αφού $\text{συν}\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

(v) $\text{τοξσυν}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{5\pi}{6}$, αφού $\text{συν}\left(\frac{5\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ και $\text{τοξσυν}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\pi}{6}$, αφού $\text{συν}\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$.



Σχήμα 2: Πρωτεύων κλάδος της $y = \text{συν}x$ και η αντίστροφή της.

(iii) Η συνάρτηση $y =$ τοξεφx.

Περιοριζόμαστε στον **πρωτεύων κλάδο** της συνάρτησης $y = f(x) =$ εφx, δηλαδή στο διάστημα $(-\pi/2, \pi/2)$ στον οποίο αυτή είναι 1-1 (και επί του $\mathbb{R}$). Τότε, αυτή αντιστρέφεται και η αντίστροφή της $f^{-1} : \mathbb{R} \to (-\pi/2, \pi/2)$ συμβολίζεται με $y =$ τοξεφx.

Ο λόγος της ονομασίας αυτής έγκειται στο γεγονός ότι η τιμή $y =$ τοξεφx είναι το **τόξο** που έχει εφαπτομένη ίση με x.

Δηλαδή,

$$y = \text{τοξεφ}x,\ x \in \mathbb{R} \iff x = \text{εφ}y,\ y \in (-\pi/2, \pi/2).$$

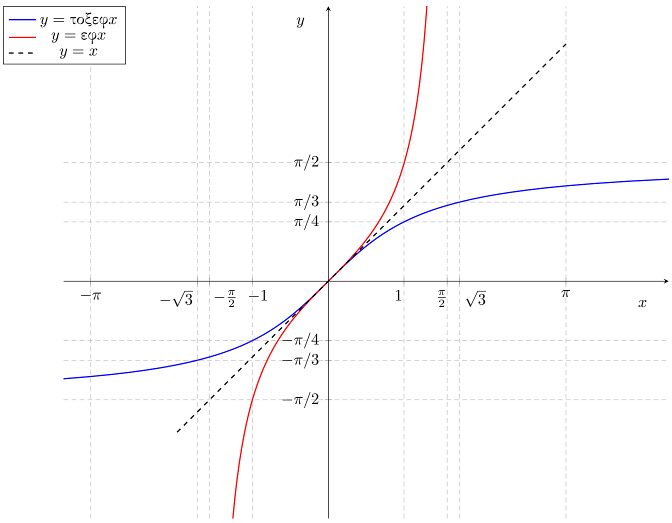
Βασικές αντίστροφες τριγωνομετρικές εφαπτομένες

(i) $\text{τοξεφ}\,(-1) = -\dfrac{\pi}{4}$, αφού $\text{εφ}\left(-\dfrac{\pi}{4}\right) = -1$ και $\text{τοξεφ}\,(1) = \dfrac{\pi}{4}$, αφού $\text{εφ}\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = 1$.

(ii) $\text{τοξεφ}0 = 0$, αφού $\text{εφ}\,(0) = 0$.

(iii) $\text{τοξεφ}(\sqrt{3}) = \dfrac{\pi}{3}$, αφού $\text{εφ}\left(\dfrac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3}$ και $\text{τοξεφ}(-\sqrt{3}) = -\dfrac{\pi}{3}$, αφού $\text{εφ}\left(-\dfrac{\pi}{3}\right) = -\sqrt{3}$.

(iv) $\text{τοξεφ}\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right) = -\dfrac{\pi}{6}$, αφού $\text{εφ}\left(-\dfrac{\pi}{6}\right) = -\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ και $\text{τοξεφ}\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right) = \dfrac{\pi}{6}$, αφού $\text{εφ}\left(\dfrac{\pi}{3}\right) = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$.



Σχήμα 3: Πρωτεύων κλάδος της $y =$ εφx και η αντίστροφή της.

(iv) Η συνάρτηση $y =$ τοξσφx.

Περιοριζόμαστε στον **πρωτεύων κλάδο** της συνάρτησης $y = f(x) =$ σφx, δηλαδή στο διάστημα $(0, \pi)$ στον οποίο αυτή είναι 1-1 (και επί του $\mathbb{R}$). Τότε, αυτή αντιστρέφεται και η αντίστροφή της $f^{-1} : \mathbb{R} \to (0, \pi)$ συμβολίζεται με $y =$ τοξσφx.

Ο λόγος της ονομασίας αυτής έγκειται στο γεγονός ότι η τιμή $y =$ τοξσφx είναι το **τόξο** που έχει συνεφαπτομένη ίση με x.

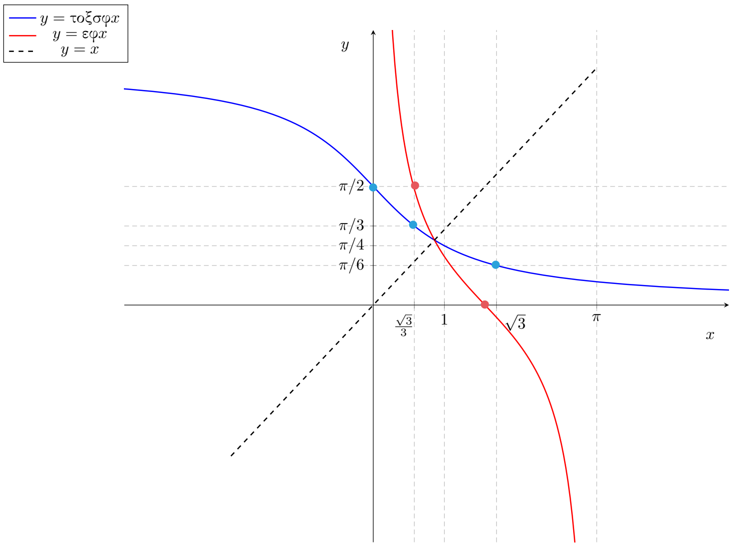
Δηλαδή,

$$y = \text{τοξσφ}x,\ x \in \mathbb{R} \iff x = \text{σφ}y,\ y \in (0, \pi).$$

Βασικές αντίστροφες τριγωνομετρικές συνεφαπτομένες

(i) τοξσφ $(1) = \frac{\pi}{4}$, αφού σφ $\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$ και τοξσφ$0 = \frac{\pi}{2}$, αφού σφ $\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$.

(ii) τοξσφ$(\sqrt{3}) = \frac{\pi}{6}$, αφού σφ $\left(\frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{3}$ και τοξσφ $\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{\pi}{3}$, αφού σφ $\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{3}$.



Σχήμα 4: Πρωτεύων κλάδος της $y =$ σφx και η αντίστροφή της.

▶ Β. Παράγωγος αντίστροφων τριγωνομετρικών συναρτήσεων

(i) Η συνάρτηση $y =$ τοξημx, $x \in [-1, 1]$.

Αποδεικνύεται ότι

$$f'_-(1) = f'_+(-1) = +\infty$$

και άρα η f δεν είναι παραγωγίσιμη στα άκρα του πεδίου ορισμού της (παρουσιάζει κατακόρυφη εφαπτομένη στα σημεία αυτά). Στο εσωτερικό του πεδίου ορισμού της όμως είναι παραγωγίσιμη . Θα προσδιορίσουμε την παράγωγό της:

$$y = \text{τοξημ}x,\ x \in (-1, 1) \iff x = \text{ημ}y,\ y \in (-\pi/2, \pi/2).$$

Παραγωγίζουμε πεπλεγμένα (ως προς τη μεταβλητή x):

$$\begin{aligned} x = \text{ημ}y \quad &\Rightarrow \quad \frac{dx}{dx} = \frac{d(\text{ημ}y)}{dx} \\ &\Rightarrow \quad 1 = y' \cdot \text{συν}y \\ &\Rightarrow \quad y' = \frac{1}{\text{συν}y} \quad \text{αφού } y \in (-\pi/2, \pi/2) \Rightarrow \text{συν}y > 0. \end{aligned}$$

Τώρα,

$$\text{ημ}^2y + \text{συν}^2y = 1 \Rightarrow \text{συν}^2y = 1 - \text{ημ}^2y$$

και αφού $y \in (-\pi/2, \pi/2) \Rightarrow$ συν$y > 0$, λαμβάνουμε τη θετική ρίζα:

$$\text{συν}y = \sqrt{1 - \text{ημ}^2y} = \sqrt{1 - x^2}.$$

Συνεπώς,

$$\boxed{y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad x \in (-1,1)}.$$

(ii) Η συνάρτηση $y = \textbf{τοξσυν}x,\ x \in [-1,1]$.

Η f δεν είναι παραγωγίσιμη στα άκρα του πεδίου ορισμού της. Στο εσωτερικό του πεδίου ορισμού της όμως είναι παραγωγίσιμη. Θα προσδιορίσουμε την παράγωγό της:

$$y = \text{τοξσυν}x,\ x \in (-1,1) \iff x = \text{συν}y,\ y \in (0,\pi).$$

Παραγωγίζουμε πεπλεγμένα (ως προς τη μεταβλητή x):

$$\begin{aligned} x = \text{συν}y \quad &\Rightarrow \quad \frac{dx}{dx} = \frac{d(\text{συν}y)}{dx} \\ &\Rightarrow \quad 1 = -y' \cdot \text{ημ}y \\ &\Rightarrow \quad y' = -\frac{1}{\text{ημ}y} \quad \text{αφού } y \in (0,\pi) \Rightarrow \text{ημ}y > 0. \end{aligned}$$

Τώρα,

$$\text{ημ}^2 y + \text{συν}^2 y = 1 \Rightarrow \text{ημ}^2 y = 1 - \text{συν}^2 y$$

και αφού $y \in (0,\pi) \Rightarrow \text{ημ}y > 0$, λαμβάνουμε τη θετική ρίζα:

$$\text{ημ}y = \sqrt{1-\text{συν}^2 y} = \sqrt{1-x^2}.$$

Συνεπώς,

$$\boxed{y' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad x \in (-1,1)}.$$

(iii) Η συνάρτηση $y = \textbf{τοξεφ}x,\ x \in \mathbb{R}$.

Είναι

$$y = \text{τοξεφ}x,\ x \in \mathbb{R} \iff x = \text{εφ}y,\ y \in (-\pi/2, \pi/2).$$

Είναι $y \in (-\pi/2,\pi/2) \Rightarrow \text{συν}y \neq 0$.

Παραγωγίζουμε πεπλεγμένα (ως προς τη μεταβλητή x):

$$\begin{aligned} x = \text{εφ}y \quad &\Rightarrow \quad \frac{dx}{dx} = \frac{d(\text{εφ}y)}{dx} \\ &\Rightarrow \quad 1 = y' \cdot \text{τεμ}^2 y \\ &\Rightarrow \quad y' = \frac{1}{\text{τεμ}^2 y}. \end{aligned}$$

Τώρα, $\text{εφ}^2 y + 1 = \text{τεμ}^2 y$ και άρα

$$\boxed{y' = \frac{1}{1+x^2}, \quad x \in \mathbb{R}}.$$

(iv) Η συνάρτηση $y = \text{τοξσφ}x,\ x \in \mathbb{R}$.
Είναι
$$y = \text{τοξσφ}x,\ x \in \mathbb{R} \iff x = \text{σφ}y,\ y \in (0, \pi).$$
Είναι $y \in (0, \pi) \Rightarrow \text{ημ}y \neq 0$.
Παραγωγίζουμε πεπλεγμένα (ως προς τη μεταβλητή x):
$$\begin{aligned} x = \text{σφ}y \quad &\Rightarrow \quad \frac{dx}{dx} = \frac{d(\text{σφ}y)}{dx} \\ &\Rightarrow \quad 1 = -y' \cdot \text{στεμ}^2 y \\ &\Rightarrow \quad y' = -\frac{1}{\text{στεμ}^2 y}. \end{aligned}$$
Τώρα, $\text{σφ}^2 y + 1 = \text{στεμ}^2 y$ και άρα
$$\boxed{y' = -\frac{1}{1+x^2},\quad x \in \mathbb{R}}\ .$$

Πρόταση

(i) Έστω συνάρτηση f τέτοια ώστε το σύνολο τιμών της περιέχεται στο διάστημα $(-1, 1)$. Τότε η $y = \text{τοξημ}(f(x))$ είναι πάραγωγίσιμη και
$$(\text{τοξημ}(f(x)))' = \frac{f'(x)}{\sqrt{1 - f^2(x)}}.$$

(ii) Έστω συνάρτηση f τέτοια ώστε το σύνολο τιμών της περιέχεται στο διάστημα $(-1, 1)$. Τότε η $y = \text{τοξσυν}(f(x))$ είναι πάραγωγίσιμη και
$$(\text{τοξσυν}(f(x)))' = -\frac{f'(x)}{\sqrt{1 - f^2(x)}}.$$

(iii) Έστω συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Τότε η $y = \text{τοξεφ}(f(x))$ είναι πάραγωγίσιμη και
$$(\text{τοξεφ}(f(x)))' = \frac{f'(x)}{1 + f^2(x)}.$$

(iv) Έστω συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Τότε η $y = \text{τοξσφ}(f(x))$ είναι πάραγωγίσιμη και
$$(\text{τοξσφ}(f(x)))' = -\frac{f'(x)}{1 + f^2(x)}.$$

Απόδειξη. Αφήνεται ως άσκηση. □

Η παραγώγιση των αντίστροφων τριγωνομετρικών συναρτήσεων μπορεί να μελετηθεί μέσα από τη σκοπιά του *Θεωρήματος παραγώγισης αντίστροφης συνάρτησης:*

Θεώρημα (Παράγωγος αντίστροφης συνάρτησης)
Έστω $f : A \to B$ μια αντιστρέψιμη και παραγωγίσιμη συνάρτηση τέτοια ώστε $f'(x) \neq 0,\ \forall x \in A$. Τότε, η f^{-1} είναι παραγωγίσιμη και μάλιστα
$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}, \qquad \forall y \in B. \tag{1}$$

Για **παράδειγμα**, θα δείξουμε ότι $(\text{τοξεφ}x)' = \frac{1}{1+x^2}$ με χρήση του πιο πάνω Θεωρήματος:

Η συνάρτηση $f : (-\pi/2, \pi/2) \to \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = \text{εφ}x$ είναι 1-1, άρα αντιστρέψιμη.
Είναι για $x \in (-\pi/2, \pi/2)$,

$$f'(x) = \text{τεμ}^2 x = \frac{1}{\text{συν}^2 x} \neq 0$$

και άρα για κάθε $y = \text{εφ}x \in \mathbb{R}$, είναι $f^{-1}(y) = x$ και

$$f'(f^{-1}(y)) = \text{τεμ}^2(f^{-1}(y)),$$

δηλαδή

$$\text{τεμ}^2(f^{-1}(y)) = \text{τεμ}^2 x = y^2 + 1$$

και έτσι

$$f'(f^{-1}(y)) = y^2 + 1,$$

Τώρα,

$$\text{τεμ}^2 x = \text{εφ}^2 x + 1 = y^2 + 1$$

και άρα από το πιο πάνω Θεώρημα,

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))} = \frac{1}{y^2+1}.$$

Αντιστρέφοντας το ρόλο του x και y και συμβολίζοντας την εφ^{-1} με τοξεφ,

$$(\text{τοξεφ}x)' = \frac{1}{1+x^2}, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

► Γ. Μετατροπή τριγωνομετρικής παράστασης σε αλγεβρική παράσταση του x

Μπορούμε να εκφράσουμε τις αντίστροφες τριγωνομετρικές παραστάσεις, όσο και τους τριγωνομετρικούς τους αριθμούς συναρτήσει της μεταβλητής x. Αυτό γίνεται είτε με τη βοήθεια των τριγωνομετρικών ταυτοτήτων είτε με την κατασκευή ορθογωνίου τριγώνου.

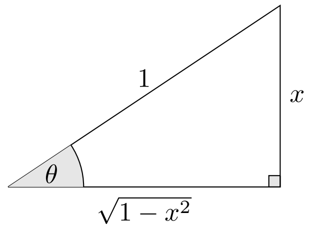
Έχουμε ήδη δεί μια τέτοια διαδικασία, όταν υπολογίζαμε τις παραγώγους των αντίστροφων τριγωνομετρικών συναρτήσεων. Για παράδειγμα για τη συνάρτηση $y = \text{τοξημ}x$, είχαμε βρεί ότι $y' = \frac{1}{\text{συν}x}$.
Είναι

$$\text{συν}x = \text{συν}(\text{τοξημ}x)$$

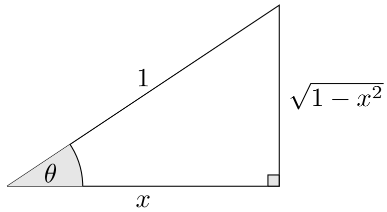
και χρησιμοποιώντας την τριγωνομετρική ταυτότητα $\text{συν}^2 x + \text{ημ}^2 x = 1$, βρήκαμε ότι

$$\text{συν}x = \text{συν}(\text{τοξημ}x) = \frac{\sqrt{1-x^2}}{1} = \sqrt{1-x^2}.$$

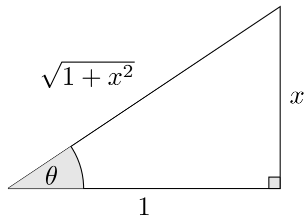
αυτό μμπορεί να γίνει και με την κατασκευή του αντίστοιχου ορθογωνίου τριγώνου ($\theta = \text{τοξημ}x$):



Στην περίπτωση που $\theta = \text{τοξεφ}x$, έχουμε το ακόλουθο ορθογώνιο τρίγωνο



και στην περίπτωση που $\theta =$ τοξσφx, έχουμε το



Στον πιο κάτω πίνακα δίνονται οι αναπαραστάσεις τριών αντίστροφων τριγωνομετρικών παραστάσεων και των τριγωνομετρικών αριθμών ημιτόνου, συνημιτόνου και εφαπτομένης αυτών ως προς x:

θ	ημθ	συνθ	εφθ
τοξημx	x	$\sqrt{1-x^2}$	$\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$
τοξσυνx	$\sqrt{1-x^2}$	x	$\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x}$
τοξεφx	$\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$	$\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$	x

▶ Δ. Μελέτη κυρτότητας και ύπαρξης σημείων καμπής των αντίστροφων τριγωνομετρικών συναρτήσεων

(i) Η συνάρτηση $f(x) =$ τοξημx, $x \in [-1, 1]$.
Είναι για $x \in (-1, 1)$,

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad \Rightarrow \quad f''(x) = \frac{x}{(1-x^2)^{3/2}}.$$

Τότε $f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$. Κατασκευάζοντας τον πίνακα προσήμου της f'' έχουμε:
$\forall x \in (-1, 0), \quad f''(x) < 0 \Rightarrow \ f$ κοίλη στο $(-1, 0)$
$\forall x \in (0, 1), \quad f''(x) > 0 \Rightarrow \ f$ κυρτή στο $(-1, 0)$
και αφού $f''(0) = 0$, το σημείο $(0, f(0)) = (0, 0)$ είναι σημείο καμπής της γραφικής παράστασης της f.

(ii) Η συνάρτηση $f(x) = \textbf{τοξσυν}x,\ x \in [-1,1]$.
Είναι για $x \in (-1,1)$,

$$f'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad \Rightarrow \quad f''(x) = -\frac{x}{(1-x^2)^{3/2}}.$$

Τότε $f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$. Κατασκευάζοντας τον πίνακα προσήμου της f'' έχουμε:
$\forall x \in (-1,0),\ \ f''(x) > 0 \Rightarrow\ f$ κυρτή στο $(-1,0)$
$\forall x \in (0,1),\ \ f''(x) < 0 \Rightarrow\ f$ κοίλη στο $(-1,0)$
και αφού $f''(0) = 0$, το σημείο $(0, f(0)) = (0, \pi/2)$ είναι σημείο καμπής της γραφικής παράστασης της f.

(iii) Η συνάρτηση $y = \textbf{τοξεφ}x,\ x \in \mathbb{R}$.
Είναι για $x \in \mathbb{R}$,

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} \quad \Rightarrow \quad f''(x) = -\frac{2x}{(1+x^2)^2}.$$

Τότε $f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$. Κατασκευάζοντας τον πίνακα προσήμου της f'' έχουμε:
$\forall x \in (-\infty,0),\ \ f''(x) > 0 \Rightarrow\ f$ κυρτή στο $(-\infty,0)$
$\forall x \in (0,+\infty),\ \ f''(x) < 0 \Rightarrow\ f$ κοίλη στο $(0,+\infty)$
και αφού $f''(0) = 0$, το σημείο $(0, f(0)) = (0,0)$ είναι σημείο καμπής της γραφικής παράστασης της f.

(iv) Η συνάρτηση $y = \textbf{τοξσφ}x,\ x \in \mathbb{R}$.
Είναι για $x \in \mathbb{R}$,

$$f'(x) = -\frac{1}{1+x^2} \quad \Rightarrow \quad f''(x) = \frac{2x}{(1+x^2)^2}.$$

Τότε $f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$. Κατασκευάζοντας τον πίνακα προσήμου της f'' έχουμε:
$\forall x \in (-\infty,0),\ \ f''(x) < 0 \Rightarrow\ f$ κοίλη στο $(-\infty,0)$
$\forall x \in (0,+\infty),\ \ f''(x) > 0 \Rightarrow\ f$ κυρτή στο $(0,+\infty)$
και αφού $f''(0) = 0$, το σημείο $(0, f(0)) = (0, \pi/2)$ είναι σημείο καμπής της γραφικής παράστασης της f.

▶ Ασκήσεις

(1) Να υπολογίσετε τις παρακάτω παραστάσεις:

(i) $\text{ημ}\left(\text{τοξεφ}\left(\frac{4}{3}\right)\right)$, **(ii)** $\text{ημ}\left(\text{τοξεφ}\left(-\frac{8}{15}\right)\right)$.

(2) Να μετατρέψετε τις παρακάτω τριγωνομετρικές παραστάσεις σε αλγεβρικές παραστάσεις του x :

(i) $\text{ημ}(\text{τοξσυν}(2x)),\ \ 0 \le x \le \frac{1}{2}$. **(ii)** $\text{εφ}(\text{τοξημ}(2x)),\ \ 0 \le x < \frac{1}{2}$.

(3) (**Παγκύπριες εξετάσεις 2021-Ερώτηση Α3**)
Να μετατρέψετε την πιο κάτω τριγωνομετρική παράσταση σε αλγεβρική παράσταση του x :

$$\text{συν}(\text{τοξημ}(4x)), \quad 0 \le x \le \frac{1}{4}.$$

(4) Αφού προσδιορίσετε το πεδίο ορισμού των πιο κάτω συναρτήσεων, να βρεθεί η παράγωγός τους:

(i) $y = f(x) = \text{τοξημ}(x/3)$. **(ii)** $y = f(x) = \dfrac{1}{\text{τοξημ}(4x)}$.

(5) (Παγκύπριες εξετάσεις 2019-Ερώτηση Β5 (β))
Να βρείτε τα τοπικά ακρότατα, τα διαστήματα μονοτονίας της συνάρτησης f με τύπο $f(x) = \text{τοξεφ}(x^2)$ και να αποδείξετε ότι $f(x) \geq 0, \ \forall x \in \mathbb{R}$.

(6) Να δειχθεί ότι
$$\text{τοξεφ}\left(\frac{1}{11}\right) + \text{τοξεφ}\left(\frac{5}{6}\right) = \frac{\pi}{4}.$$
Υπόδειξη: Χρησιμοποιήστε την τριγωνομετρική ταυτότητα
$$\text{εφ}(x+y) = \frac{\text{εφ}x + \text{εφ}y}{1 - \text{εφ}x \cdot \text{εφ}y}.$$

(7) Να δειχθεί ότι
$$\text{τοξημ}x + \text{τοξσυν}x = \frac{\pi}{2}, \quad \forall x \in [-1, 1].$$
Υπόδειξη: Θεωρήστε τη συνάρτηση $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ με τύπο
$$f(x) = \text{τοξημ}x + \text{τοξσυν}x$$
και δείξτε ότι είναι σταθερή.

▶▶ Απαντήσεις

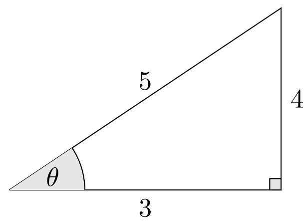
(1) **(i)** $\eta\mu\left(\tau o\xi\epsilon\varphi\left(\dfrac{4}{3}\right)\right)$.

Θέτουμε $\theta = \tau o\xi\epsilon\varphi\left(\frac{4}{3}\right)$. Τότε $\epsilon\varphi\theta = \frac{4}{3} > 0$ και άρα $\theta \in (0, \pi/2) \Rightarrow \eta\mu\theta > 0$.

Θέλουμε να υπολογίσουμε το $\eta\mu\theta = \eta\mu\left(\tau o\xi\epsilon\varphi\left(\dfrac{4}{3}\right)\right)$.

Είναι

$$\begin{aligned} \epsilon\varphi\theta = \frac{4}{3} \quad &\Rightarrow \quad \epsilon\varphi^2\theta = \frac{16}{9} \Rightarrow \frac{\eta\mu^2\theta}{\sigma\upsilon\nu^2\theta} = \frac{16}{9} \\ &\Rightarrow \quad 9\eta\mu^2\theta = 16\sigma\upsilon\nu^2\theta \\ &\Rightarrow \quad 9\eta\mu^2\theta = 16(1 - \eta\mu^2\theta) \\ &\Rightarrow \quad \eta\mu^2\theta = \frac{16}{25} \\ &\Rightarrow \quad \eta\mu\theta = \frac{4}{5}, \quad \alpha\varphi o\acute{\upsilon}\ \eta\mu\theta > 0. \end{aligned}$$



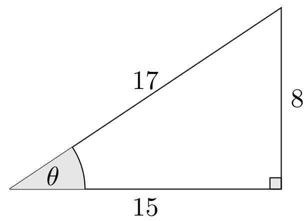
Σημείωση: Πυθαγόρεια τριάδα $(3, 4, 5)$.

(ii) $\eta\mu\left(\tau o\xi\epsilon\varphi\left(-\dfrac{8}{15}\right)\right)$.

Θέτουμε $\theta = \tau o\xi\epsilon\varphi\left(-\dfrac{8}{15}\right)$. Τότε $\epsilon\varphi\theta = -\frac{8}{15} < 0 \Rightarrow \theta \in (-\pi/2, 0) \Rightarrow \eta\mu\theta < 0$.

Θέλουμε να υπολογίσουμε το $\eta\mu\theta = \eta\mu\left(\tau o\xi\epsilon\varphi\left(-\dfrac{8}{15}\right)\right)$. Είναι

$$\begin{aligned} \epsilon\varphi\theta = -\frac{8}{15} \quad &\Rightarrow \quad \epsilon\varphi^2\theta = \frac{64}{225} \Rightarrow \frac{\eta\mu^2\theta}{\sigma\upsilon\nu^2\theta} = \frac{64}{225} \\ &\Rightarrow \quad 225\eta\mu^2\theta = 64\sigma\upsilon\nu^2\theta \\ &\Rightarrow \quad 225\eta\mu^2\theta = 64(1 - \eta\mu^2\theta) \\ &\Rightarrow \quad \eta\mu^2\theta = \frac{64}{289} \\ &\Rightarrow \quad \eta\mu\theta = -\frac{8}{17}, \quad \alpha\varphi o\acute{\upsilon}\ \eta\mu\theta < 0. \end{aligned}$$



Σημείωση: Πυθαγόρεια τριάδα $(8, 15, 17)$.

(2) **(i)** Θέτουμε $\theta = \tau o\xi\sigma\upsilon\nu(2x)$. Τότε $\sigma\upsilon\nu\theta = 2x$, όπου $0 \le x \le \frac{1}{2}$ και $0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$.

Θέλουμε να υπολογίστουμε το $\eta\mu(\tau o\xi\sigma\upsilon\nu(2x)) = \eta\mu\theta$.

Έχουμε:

$$\sigma\upsilon\nu^2\theta + \eta\mu^2\theta = 1 \Rightarrow \eta\mu^2\theta + (2x)^2 = 1 \Rightarrow \eta\mu^2\theta = 1 - 4x^2$$

και αφού $0 \le \theta \le \frac{\pi}{2} \Rightarrow \eta\mu\theta \ge 0$,

$$\eta\mu(\tau o\xi\sigma\upsilon\nu(2x)) = \eta\mu\theta = \sqrt{1 - 4x^2}.$$

(ii) $\epsilon\varphi(\tau o\xi\eta\mu(2x)), \quad 0 \le x < \dfrac{1}{2}$.

Θέτουμε $\theta = $ τοξημ$(2x)$. Τότε ημ$\theta = 2x$, όπου $0 \le x < \frac{1}{2}$ και $0 \le \theta < \frac{\pi}{2}$.
Θέλουμε να υπολογίστουμε την εφ(τοξημ$(2x)) = $ εφθ.
Έχουμε:

$$\text{εφ}\theta = \frac{\text{ημ}\theta}{\text{συν}\theta} = \frac{2x}{\text{συν}\theta}.$$

Θα υπολογίσουμε το συνθ :

$$\text{συν}^2\theta + \text{ημ}^2\theta = 1 \Rightarrow \text{συν}^2\theta + (2x)^2 = 1 \Rightarrow \text{συν}^2\theta = 1 - 4x^2$$

και αφού $0 \le \theta < \frac{\pi}{2} \Rightarrow$ συν$\theta > 0$,

$$\text{συν}\theta = \sqrt{1 - 4x^2}.$$

Άρα,

$$\text{εφ}\theta = \frac{2x}{\sqrt{1 - 4x^2}}.$$

(3) $0 \le x \le \frac{1}{4} \Rightarrow 0 \le 4x \le 1$ και άρα ο αριθμός (η γωνιά) $\theta = $ τοξημ$(4x)$ ανήκει στο διάστημα $[0, \pi/2]$.
Επίσης, από τον ορισμό της συνάρτηση $y = $ τοξημx,

$$\theta = \text{τοξημ}(4x),\ x \in [0, 1/4] \quad \Leftrightarrow \quad \text{ημ}\theta = 4x,\ \theta \in [0, \pi/2].$$

Είναι

$$\text{ημ}^2\theta + \text{συν}^2\theta = 1 \Rightarrow \text{συν}^2\theta = 1 - 16x^2$$

και αφού $\theta \in [0, \pi/2] \Rightarrow$ συν$\theta \ge 0$ και η πιο πάνω δίνει

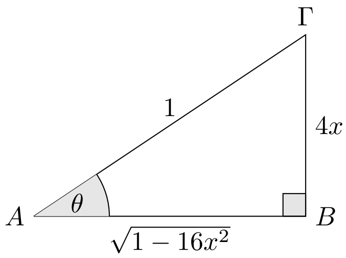
$$\text{συν}(\text{τοξημ}(4x)) = \text{συν}\theta = \sqrt{1 - 16x^2}.$$

Εναλλακτικά, θεωρούμε ορθογώνιο τρίγωνο με μιά από τις οξείες του γωνίες τη $\theta = $ συν(τοξημ$(4x)$).
Τότε,

$$\text{ημ}\theta = \frac{4x}{1} = \frac{\text{απέναντι}}{\text{υποτείνουσα}}$$

και το Πυθαγόρειο Θεώρημα δίνει ότι η προσκείμενη πλευρά της θ έχει μήκος $\sqrt{1 - 16x^2}$ (παίρνω τη θετική ρίζα για το λόγο που αναφέραμε πρίν). Συνεπώς,

$$\text{συν}\theta = \frac{\sqrt{1 - 16x^2}}{1} = \sqrt{1 - 16x^2}.$$



(4) **(i)** Είναι

$$-1 \le \frac{x}{3} \le 1 \Leftrightarrow -3 \le x \le 3$$

και άρα το πεδίο ορισμού της f είναι το διάστημα $[-3, 3]$. Στο εσωτερικό του, η f είναι παραγωγίσιμη. Είναι

$$y = \text{τοξημ}(x/3) \Leftrightarrow \frac{x}{3} = \text{ημ}y.$$

Έχουμε για $x \in (-3,3)$:

$$\begin{aligned} \frac{x}{3} = \text{ημ}y \quad &\Rightarrow \quad \frac{d(x/3)}{dx} = \frac{d(\text{ημ}y)}{dx} \\ &\Rightarrow \quad \frac{1}{3} = y' \cdot \text{συν}y \\ &\Rightarrow \quad y' = \frac{1}{3\text{συν}y} \quad \text{αφού } y \in (-\pi/2, \pi/2) \Rightarrow \text{συν}y > 0. \end{aligned}$$

Τώρα, $\text{ημ}^2 y + \text{συν}^2 y = 1 \Rightarrow \text{συν}^2 y = 1 - \text{ημ}^2 y$ και αφού $y \in (-\pi/2, \pi/2) \Rightarrow \text{συν}y > 0$, λαμβάνουμε τη θετική ρίζα:

$$\text{συν}y = \sqrt{1 - \text{ημ}^2 y} = \sqrt{1 - \frac{x^2}{9}}.$$

Συνεπώς,

$$\boxed{y' = \frac{1}{3\sqrt{1 - \frac{x^2}{9}}} = \frac{1}{\sqrt{9 - x^2}}, \quad x \in (-3,3)}\,.$$

(ii) Πρέπει $-1 \leq 4x \leq 1$, δηλαδή $-1/4 \leq x \leq 1/4$ αλλά και $\text{τοξημ}(4x) \neq 0$. Είναι $\text{τοξημ}(4x) = 0 \Leftrightarrow 4x = 0 \Leftrightarrow x = 0$. Άρα το πεδίο ορισμού της f είναι το σύνολο $[-1/4, 0) \cup (0, 1/4]$. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(-1/4, 0) \cup (0, 1/4)$. Είναι για x στο σύνολο αυτό

$$y = \frac{1}{\text{τοξημ}(4x)} \Rightarrow y' = -\frac{1}{(\text{τοξημ}(4x))^2} \cdot (\text{τοξημ}(4x))'.$$

Υπολογίζουμε εύκολα:

$$(\text{τοξημ}(4x))' = \frac{4}{\sqrt{1 - (4x)^2}} = \frac{4}{\sqrt{1 - 16x^2}}$$

και άρα

$$\boxed{y' = -\frac{4}{\text{τοξημ}^2(4x) \cdot \sqrt{1 - 16x^2}}, \quad x \in (-1/4, 0) \cup (0, 1/4)}\,.$$

(5) $x \in \mathbb{R} \Rightarrow x^2 \in \mathbb{R}$ και άρα $D(f) = \mathbb{R}$.
Η f είναι παντού παραγωγίσιμη:

$$f'(x) = \frac{(x^2)'}{1 + (x^2)^2} = \frac{2x}{1 + x^4}.$$

Είναι $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$. Από τον πίνακα μεταβολής του προσήμου της f' βρίσκουμε:
$\forall x < 0 \Rightarrow f'(x) < 0 \Rightarrow$ f γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, 0)$
$\forall x > 0 \Rightarrow f'(x) > 0 \Rightarrow$ f γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$
και αφού $f'(0) = 0$, η f παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στο $x = 0$, το οποίο είναι και ολικό (ελάχιστο). Συνεπώς,

$$f(x) \geq f(0) = 0, \ \forall x \in \mathbb{R}$$

με την ισότητα **μόνο** για $x = 0$.

(6) Θέτουμε τοξεφ$\left(\frac{1}{11}\right) = \theta$ και τότε εφ$\theta = \frac{1}{11}$, $\theta \in (0, \pi/4)$ και τοξεφ$\left(\frac{5}{6}\right) = \phi$ και τότε εφ$\phi = \frac{5}{6}$, $\phi \in (0, \pi/4)$. Τότε $(\theta + \phi) \in (0, \pi/2)$ και

$$\begin{aligned} \text{εφ}(\theta+\phi) &= \frac{\text{εφ}\theta + \text{εφ}\phi}{1 - \text{εφ}\theta \cdot \text{εφ}\phi} = \frac{\frac{1}{11} + \frac{5}{6}}{1 - \frac{1}{11} \cdot \frac{5}{6}} \\ &= \frac{\frac{61}{66}}{\frac{61}{66}} = 1 = \text{εφ}\left(\frac{\pi}{4}\right), \end{aligned}$$

και άρα αφού $(\theta + \phi) \in (0, \pi/2)$, έχουμε ότι $\theta + \phi = \frac{\pi}{4}$, δηλαδή

$$\text{τοξεφ}\left(\frac{1}{11}\right) + \text{τοξεφ}\left(\frac{5}{6}\right) = \frac{\pi}{4}.$$

(7) Θεωρούμε τη συνάρτηση $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ με τύπο

$$f(x) = \text{τοξημ}x + \text{τοξσυν}x.$$

Είναι παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του πεδίου ορισμού της, δηλαδή στο διάστημα $(-1, 1)$ ως άθροισμα παραγωγίσιμων συναρτήσεων στο διάστημα αυτό με

$$f'(x) = (\text{τοξημ}x + \text{τοξσυν}x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 0$$

για κάθε $x \in (-1, 1)$ και άρα, από γνωστό μας Πόρισμα, η f είναι σταθερή στο $(-1, 1)$, δηλαδή $f(x) = c =$σταθερά, για κάθε $x \in (-1, 1)$. Αλλά, $f(0) = \text{τοξημ}0 + \text{τοξσυν}0 = 0 + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$ και άρα $c = \frac{\pi}{2}$, δηλαδή $f(x) = \frac{\pi}{2}$, $\forall x \in (-1, 1)$, δηλαδή

$$\text{τοξημ}x + \text{τοξσυν}x = \frac{\pi}{2}, \quad \forall x \in (-1, 1).$$

Τέλος,

$$f(-1) = \text{τοξημ}(-1) + \text{τοξσυν}(-1) = -\frac{\pi}{2} + \pi = \frac{\pi}{2},$$

αφού τοξημ$(-1) = -\frac{\pi}{2} \Leftrightarrow$ ημ$(-\pi/2) = -1$ και τοξσυν$(-1) = \pi \Leftrightarrow$ συν$(\pi) = -1$ και

$$f(1) = \text{τοξημ}1 + \text{τοξσυν}1 = \frac{\pi}{2} + 0 = \frac{\pi}{2},$$

αφού τοξημ$1 = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow$ ημ$(\pi/2) = 1$ και τοξσυν$1 = 0 \Leftrightarrow$ συν$0 = 1$.
Άρα,

$$\text{τοξημ}x + \text{τοξσυν}x = \frac{\pi}{2}, \quad \forall x \in [-1, 1].$$

▶ Ε. Παράρτημα-Συνέχεια των αντίστροφων τριγωνομετρικών συναρτήσεων
Οι αντίστροφες τριγωνομετρικές συναρτήσεις που ορίσαμε πιο πάνω είναι συνεχείς. Το γεγονός αυτό δικαιολογείται από το πιο κάτω Θεώρημα της Ανάλυσης:[3]

> **Θεώρημα**
> Αν η συνάρτηση f είναι 1-1 (αμφιμονοσήμαντη) και συνεχής (στο πεδίο ορισμού της), τότε η αντίστροφή της f^{-1} είναι επίσης συνεχής (στο πεδίο ορισμού της).

Στην περίπτωση όμως των συναρτήσεων $y = \text{τοξημ}x$ και $y = \text{τοξσυν}x$, λόγω του ότι έχουν πεδίο ορισμού (το $[-1,1]$) αλλά και σύνολο τιμών (το $[-\pi/2, \pi/2]$ και $[0,\pi]$ αντίστοιχα) ένα κλειστό και φραγμένο διάστημα, η συνέχειά τους δικαιολογείται και από την πιο κάτω εκδοχή του προηγούμενου Θεωρήματος:

> **Θεώρημα**
> Έστω συνάρτηση $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ $(a < b)$ συνεχής και γνησίως αύξουσα συνάρτηση. Τότε
>
> **(i)** Η f είναι 1-1 και επί του συνόλου $[f(a), f(b)]$.
>
> **(ii)** Η $f^{-1} : [f(a), f(b)] \to [a,b]$ είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα συνάρτηση.
>
> Ισχύει αντίστοιχο αποτέλεσμα στην περίπτωση της γνησίως φθίνουσας συνάρτησης.

[3] Βλ. Howard Anton, Irl C. Bivens, Stephen Davis, *Calculus: Late Transcendentals,* 11th Edition, 2016, John Wiley and sons.