ΣΤΟΙΧΕΙΑ **ΘΕΩΡΙΑΣ**
Γ ΛΥΚΕΙΟΥ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ
2021 – 2022[1]

[1] Βασισμένο στην επίσημη (αναθεωρημένη) ύλη των Παγκυπρίων εξετάσεων

'Είναι, ομολογώ, απλή φαντασία.
Αλλά πόσο συχνά η φαντασία είναι η μητέρα της αλήθειας;'

— Sir Arthur Conan Doyle, The Valley of Fear

Ενότητα I -Εφαρμογές του Διαφορικού Λογισμού

• Υπενθύμιση: **Θεώρημα του Bolzano** •
Έστω f μια συνάρτηση συνεχής σε ένα (κλειστό και φραγμένο) διάστημα $[\alpha, \beta]$. Τότε, αν $f(\alpha) \cdot f(\beta) < 0$, υπάρχει (τουλάχιστον) ένα $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε $f(\xi) = 0$.

3. και 4. Θεώρημα Rolle/Θεώρημα Μέσης Τιμής του Διαφορικού Λογισμού.
Διατύπωση, γεωμετρική ερμηνεία

• Θεώρημα του Rolle •
Διατύπωση:
Έστω f μια συνάρτηση συνεχής σε ένα (κλειστό) διάστημα $[a, \beta]$ και παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του, δηλαδή στο (a, β) και τέτοια ώστε $f(a) = f(\beta)$. Τότε, υπάρχει $\xi \in (a, \beta)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi) = 0$.
Γεωμετρική ερμηνεία:
Αν για τη συνάρτηση $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ ικανοποιούνται οι υποθέσεις του Θεωρήματος του Rolle, τότε υπάρχει τουλάχιστον ένας αριθμός $\xi \in (a, \beta)$ για τον οποίο η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $(\xi, f(\xi))$ είναι παράλληλη με τον άξονα των τετμημένων ή να ταυτίζεται με αυτόν. (Τεύχος Α-σελ. 18)

• Θεώρημα Μέσης Τιμής του Διαφορικού Λογισμού (Lagrange) •
Διατύπωση:
Έστω f μια συνάρτηση συνεχής σε ένα (κλειστό) διάστημα $[a, b]$ και παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του, δηλαδή στο (a, b). Τότε, υπάρχει (αριθμός) $\xi \in (a, b)$ τέτοιος ώστε

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Γεωμετρική ερμηνεία:
Αν για τη συνάρτηση $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ ικανοποιούνται οι υποθέσεις του Θεωρήματος Μέσης Τιμής του Διαφορικού Λογισμού, τότε υπάρχει τουλάχιστον ένας αριθμός $\xi \in (a, \beta)$ για τον οποίο η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $(\xi, f(\xi))$ είναι παράλληλη με την ευθεία που διέρχεται από τα σημεία $(a, f(a))$ και $(b, f(b))$. (Τεύχος Α-σελ. 24)

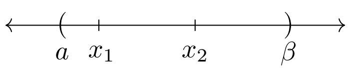
• Πόρισμα •
Έστω f μια συνάρτηση παραγωγίσιμη σε ένα ανοικτό διάστημα (a, β) τέτοια ώστε $f'(x) = 0, \forall x \in (a, \beta)$. Τότε, υπάρχει πραγματική σταθερά c τέτοια ώστε $f(x) = c, \forall x \in (a, \beta)$. Δηλαδή η συνάρτηση f είναι σταθερή[a] στο (a, β).

[a] Μια συνάρτηση $f : A \to \mathbb{R}$ είναι σταθερή αν και μόνο αν $f(x_1) = f(x_2)$ για κάθε $x_1, x_2 \in A$.

Απόδειξη. Έστω $x_1, x_2 \in (a, \beta)$ με $x_1 < x_2$. Αφού η f είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα (a, β), έπεται ότι θα είναι συνεχής στο $[x_1, x_2]$ και παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του, δηλαδή στο διάστημα (x_1, x_2). Συνεπώς, από το ΘΜΤΔΛ, υπάρχει $\xi \in (x_1, x_2)$ τέτοιο ώστε

$$f'(\xi) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = 0,$$

από υπόθεση και άρα $f(x_2) = f(x_1)$. Αφού τα x_1, x_2 είναι τυχόντα, η f είναι σταθερή συνάρτηση.



• **Πόρισμα** •
Έστω f, g συναρτήσεις παραγωγίσιμες σε ένα ανοικτό διάστημα (a, β) τέτοιες ώστε $f'(x) = 0$, $\forall x \in (a, \beta)$ και $g'(x) = 0$, $\forall x \in (a, \beta)$. Τότε, υπάρχει πραγματική σταθερά c τέτοια ώστε $f(x) = g(x) + c$, $\forall x \in (a, \beta)$. Δηλαδή οι συναρτήσεις f και g διαφέρουν (στο (a, β)) κατά μια (πραγματική) σταθερά.

5. Ορισμοί (Μονοτονία Συνάρτησης): Γνησίως Αύξουσα, Αύξουσα, Γνησίως Φθίνουσα, Φθίνουσα, Σταθερή, Γνησίως Μονότονη και Μονότονη συνάρτηση.

• **Ορισμός** (Μονοτονία Συνάρτησης) (Τεύχος Α-σελ. 31,33)
Μια συνάρτηση $f : A \to \mathbb{R}$ λέγεται:

(i) **αύξουσα** στο $\Delta \subseteq A$ $(\Delta \neq \emptyset)$ αν $\forall x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ ισχύει $f(x_1) \leq f(x_2)$,

(ii) **φθίνουσα** στο $\Delta \subseteq A$ $(\Delta \neq \emptyset)$ αν $\forall x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ ισχύει $f(x_1) \geq f(x_2)$,

(iii) **γνησίως αύξουσα** στο $\Delta \subseteq A$ $(\Delta \neq \emptyset)$ αν $\forall x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 \leq x_2$ ισχύει $f(x_1) < f(x_2)$,

(iv) **γνησίως φθίνουσα** στο $\Delta \subseteq A$ $(\Delta \neq \emptyset)$ αν $\forall x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ ισχύει $f(x_2) < f(x_1)$.

(v) **σταθερή** στο $\Delta \subseteq A$ $(\Delta \neq \emptyset)$ αν $\forall x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ ισχύει $f(x_1) = f(x_2)$,

(vi) **μονότονη** στο $\Delta \subseteq A$ $(\Delta \neq \emptyset)$ αν είναι είτε αύξουσα είτε φθίνουσα και **γνησίως μονότονη** στο $\Delta \subseteq A$ $(\Delta \neq \emptyset)$ αν είναι είτε γνησίως αύξουσα είτε γνησίως φθίνουσα.

6. Ορισμοί (Ακρότατα Συνάρτησης): Τοπικά μέγιστη τιμή συνάρτησης, Τοπικά ελάχιστη τιμή συνάρτησης, Ολικά μέγιστη τιμή και Ολικά ελάχιστη τιμή συνάρτησης.

• **Ορισμός** (Ολικά Ακρότατα Συνάρτησης) (Τεύχος Α-σελ. 38)
Έστω συνάρτηση $f : A \to \mathbb{R}$. Θα λέμε ότι:

(i) Η συνάρτηση f παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ **ολικό μέγιστο**, το $f(x_0)$, όταν

$$f(x) \leq f(x_0), \quad \forall x \in A,$$

(ii) Η συνάρτηση f παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ **ολικό ελάχιστο**, το $f(x_0)$, όταν

$$f(x) \geq f(x_0), \quad \forall x \in A.$$

Το ολικό ελάχιστο και το ολικό μέγιστο της f ονομάζονται **ολικά ακρότατα** (της f).

• **Ορισμός** (Τοπικά Ακρότατα Συνάρτησης) (Τεύχος Α-σελ. 40)
Έστω συνάρτηση $f : A \to \mathbb{R}$. Θα λέμε ότι:

(i) Η συνάρτηση f παρουσιάζει **τοπικό μέγιστο** στο $x_0 \in A$, όταν υπάρχει $\delta > 0$, τέτοιο ώστε να ισχύει
$$f(x_0) \geq f(x), \quad \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap A.$$
Το x_0 λέγεται **θέση (ή σημείο) τοπικού μεγίστου**, ενώ το $f(x_0)$ **τοπικό μέγιστο** της f.

(ii) Η συνάρτηση f παρουσιάζει **τοπικό ελάχιστο** στο $x_0 \in A$, όταν υπάρχει $\delta > 0$, τέτοιο ώστε να ισχύει
$$f(x_0) \leq f(x), \quad \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap A.$$
Το x_0 λέγεται **θέση (ή σημείο) τοπικού ελαχίστου**, ενώ το $f(x_0)$ **τοπικό ελάχιστο** της f.

Τα τοπικά ελάχιστα και τοπικά μέγιστα (μπορεί να υπάρξουν περισσότερα του ενός) της συνάρτησης f είναι τα τοπικά ακρότατά της.

7. Θεωρήματα μονοτονίας συνάρτησης (Κριτήρια Μονοτονίας). Γνησίως αύξουσα, Αύξουσα, Γνησίως φθίνουσα, Φθίνουσα, Σταθερή συνάρτηση. Διατύπωση, απόδειξη και εφαρμογή τους στην επίλυση προβλήματος.

• **Θεώρημα** (Κριτήριο Μονοτονίας) (Τεύχος Α-σελ. 45)
Έστω συνάρτηση $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ συνεχής και παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του πεδίου ορισμού της (δηλαδή στο (a, b)). Τότε, ισχύουν τα ακόλουθα:

(i) Αν $f'(x) > 0, \ \forall x \in [a, b]$, τότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[a, b]$.

(ii) Αν $f'(x) \geq 0, \ \forall x \in [a, b]$, τότε η f είναι αύξουσα στο $[a, b]$.

(iii) Αν $f'(x) < 0, \ \forall x \in [a, b]$, τότε η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[a, b]$.

(iv) Αν $f'(x) \leq 0, \ \forall x \in [a, b]$, τότε η f είναι φθίνουσα στο $[a, b]$.

Υπενθυμίζεται ότι αν $f'(x) = 0, \ \forall x \in (a, b)$, τότε η f είναι σταθερή συνάρτηση (στο (a, b)) και αφού υποθέτουμε τη συνέχεια της f σε όλο το διάστημα $[a, b]$, έπεται ότι $f(a) = f(b)$ και αρα η f είναι σταθερή στο $[a, b]$.

Απόδειξη. Δίνεται απόδειξη μόνο για το (i). Τα υπόλοιπα αποδεικνύονται ομοίως.

Έστω $x_1, x_2 \in (a, b)$ **τυχαία** με $x_1 < x_2$.
Πληρούνται οι υποθέσεις του Θεωρήματος μέσης τιμής του Διαφορικού Λογισμού για την f στο διάστημα $[x_1, x_2]$:
$$\exists \ \xi \in (x_1, x_2) \ : \ f'(\xi) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}.$$
Από υπόθεση, είναι $f'(\xi) > 0$. Συνεπώς, η πιο πάνω δίνει
$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} > 0.$$
Αλλά, $x_1 < x_2 \Rightarrow x_2 - x_1$ και αρα $f(x_2) - f(x_1) > 0$, δηλαδή $f(x_2) > f(x_1)$.
Αφού τα x_1 και x_2 ήταν τυχαία, έχουμε ότι $f(y) > f(x)$ **για κάθε** ζεύγος σημείων $x, y \in (a, b)$ με

$x < y$. Άρα, f γνησίως αύξουσα στο διάστημα (a, b).
Όμως, λόγω της συνέχειας της f στα άκρα του διαστήματος $[a, b]$, έπεται ότι η f είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το διάστημα $[a, b]$. □

8. Θεώρημα του Fermat. Διατύπωση, απόδειξη, γεωμετρική ερμηνεία και εφαρμογή του στην επίλυση προβλήματος.

• **Θεώρημα** του Fermat • (Τεύχος Α-σελ. 47)
Έστω συνάρτηση $f : \Delta \to \mathbb{R}$, όπου $\Delta \subseteq \mathbb{R}$ **διάστημα** και έστω x_0 εσωτερικό σημείο του Δ. **Αν** η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο x_0 **και** είναι παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό, τότε

$$f'(x_0) = 0.$$

Απόδειξη. (Δίνεται η απόδειξη που υπάρχει στο Τεύχος Α-σελ. 47)
Έστω ότι η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο x_0. Αφού το x_0 είναι εσωτερικό σημείο του Δ και η η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο σημείο αυτό, τότε υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε το διάστημα $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ περιέχεται στο Δ, δηλαδή $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subseteq \Delta$ και

$$f(x_0) \geq f(x), \quad \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta).$$

Επειδή όμως η f είναι παραγωγίσιμη στο σημείο x_0, τότε

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Αν $x \in (x_0 - \delta, x_0)$, τότε $f(x) - f(x_0) \leq 0$ και άρα αφού $x - x_0 < 0$,

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0,$$

οπόταν

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0.$$

Αν $x \in (x_0, x_0 - \delta)$, τότε $f(x) - f(x_0) \leq 0$ και άρα αφού $x - x_0 > 0$,

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0,$$

οπόταν

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0.$$

Άρα,

$$\begin{cases} f'(x_0) \leq 0 \\ f'(x_0) \geq 0 \end{cases} \implies f'(x_0) = 0.$$

Ομοίως η περίπτωση που η f παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στο x_0. □

Γεωμετρική Ερμηνεία του Θεωρήματος του Fermat.
Το Θεώρημα του Fermat δηλώνει ότι η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $(x_0, f(x_0))$ είναι παράλληλη προς τον άξονα των τετμημένων (τον άξονα $x'x$).

Συνέπειες του Θεωρήματος του Fermat
Θα πρέπει να έχουμε αντιληφθεί πιά πως το Θεώρημα μέσης τιμής του Διαφορικού Λογισμού (άρα και το θεώρημα του Rolle) σκοπό έχουν να ρίξουν φως στο σύνολο λύσεων της εξίσωσης

$$f' = 0.$$

Οι λύσεις της πιο πάνω εξίσωσης καλούνται **στάσιμα σημεία**, ακριβώς διότι στα σημεία εκεί η συνάρτηση 'σταματά να αυξάνεται' ή 'να μειώνεται'.

Το Θεώρημα του Fermat μας δίνει μια **αναγκαία** συνθήκη έτσι ώστε το γράφημα μιας παραγωγίσιμης συνάρτησης $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ να παρουσιάζει ακρότατη τιμή.
Το αναγκαία μεταφράζεται στο ότι αν $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη και $x_0 \in (a, b)$ τέτοιο ώστε $f'(x_0) \neq 0$, τότε (**αναγκαστικά**) η συνάρτηση f δεν παρουσιάζει ακρότατο στο x_0 (αυτή είναι και η αντιθετοαντίστροφη διατύπωση του Θεωρήματος), αλλά αν $x_0 \in (a, b)$ τέτοιο ώστε $f'(x_0) = 0$, τότε δεν ισχύει ότι στο x_0 η συνάρτηση f παρουσιάζει ακρότατο, δηλαδή μπορεί να έχει ή μπορεί και όχι.
Ένα κλασικό παράδειγμα είναι η συνάρτηση $f(x) = x^3$, για την οποία είναι $f'(0) = 0$, αλλά η συνάρτηση είναι παντού γνησίως αύξουσα.

Με τη βοήθεια του Θεωρήματος του Fermat και τις γνώσεις που αποκτήσαμε μέχρι τώρα, τα **κρίσιμα σημεία**, δηλαδή τα σημεία στα οποία η συνάρτηση ενδέχεται να λαμβάνει ακρότατη τιμή είναι τριών ειδών και μόνο:

- τα **συνοριακά σημεία**, δηλαδή τα άκρα του πεδίου ορισμού της συνάρτησης (αν ανήκουν στο πεδίο ορισμού της)
- τα **στάσιμα σημεία**
- τα σημεία στα οποία η συνάρτηση **δεν είναι παραγωγίσιμη**.

9. Θεώρημα (Κριτήριο Πρώτης Παραγώγου για τοπικά ακρότατα). Διατύπωση και εφαρμογή του στην επίλυση προβλήματος.

- **Θεώρημα** (Κριτήριο Πρώτης Παραγώγου για τοπικά ακρότατα) (Τεύχος Α-σελ. 51)
Έστω **συνεχής** συνάρτηση $f : A \to \mathbb{R}$, όπου $A \subseteq \mathbb{R}$ **διάστημα** και x_0 σημείο του A. Έστω ότι η f είναι παραγωγίσιμη σε κάθε ένα από τα διαστήματα $(x_0 - \delta, x_0)$ και $(x_0, x_0 + \delta)$, όπου $\delta > 0$. Τότε:

(i) Αν $f'(x) > 0$, $\forall x \in (x_0 - \delta, x_0)$ και $f'(x) < 0$, $\forall x \in (x_0, x_0 + \delta)$, τότε η f παρουσιάζει **τοπικό μέγιστο** στο σημείο $x = x_0$.

(ii) Αν $f'(x) < 0$, $\forall x \in (x_0 - \delta, x_0)$ και $f'(x) > 0$, $\forall x \in (x_0, x_0 + \delta)$, τότε η f παρουσιάζει **τοπικό ελάχιστο** στο σημείο $x = x_0$.

(iii) Αν η f' διατηρεί σταθερό το πρόσημό της στην ένωση των διαστημάτων $(x_0 - \delta, x_0)$ και $(x_0, x_0 + \delta)$, τότε η f είναι γνησίως μονότονη στο διάστημα $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ και στο σημείο $x = x_0$ η f **δεν παρουσιάζει τοπικό ακρότατο**.

10. Θεώρημα (Κριτήριο Δεύτερης Παραγώγου για τοπικά ακρότατα). Διατύπωση, απόδειξη και εφαρμογή του στην επίλυση προβλήματος.

• **Θεώρημα** (Κριτήριο Δεύτερης Παραγώγου για τοπικά ακρότατα) (Τεύχος Α-σελ. 52)
Έστω $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ $(a<b)$ παραγωγίσιμη συνάρτηση και $x_0\in(a,b)$ τέτοιο ώστε $f'(x_0)=0$. Έστω ότι υπάρχει ο (αριθμός) $f''(x_0)$. Τότε:

(i) Αν $f''(x_0)>0$, η f παρουσιάζει **τοπικό ελάχιστο στο** $x=x_0$.

(ii) Αν $f''(x_0)<0$, η f παρουσιάζει **τοπικό μέγιστο στο** $x=x_0$.

Απόδειξη. Έστω ότι $f''(x_0)>0$. Από τον ορισμό του παράγωγου αριθμού,

$$f''(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)-\overbrace{f'(x_0)}^{=0}}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{x-x_0}$$

και άρα

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{x-x_0}>0.$$

Τότε[2] υπάρχει ανοικτή περιοχή $\pi(x_0)$ του σημείου x_0 έστω $(x_0-\delta,x_0+\delta)$ $(\delta>0)$ η οποία περιέχεται στο (a,b) με

$$\frac{f'(x)}{x-x_0}>0,\quad \forall x\in(x_0-\delta,x_0+\delta)-\{x_0\}.$$

(αφαιρούμε το x_0 διότι η περιοχή είναι τρύπια).
Τότε, αν $x\in(x_0-\delta,x_0)\Rightarrow f'(x)<0$ και άρα από το **κριτήριο Μονοτονίας**, η f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(x_0-\delta,x_0)$ (και λόγω συνέχειας της f στο σημείο $x=x_0$ έχουμε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(x_0-\delta,x_0])$ και αν $x\in(x_0,x_0+\delta)\Rightarrow f'(x)>0$ και άρα από το **κριτήριο Μονοτονίας**, η f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(x_0,x_0+\delta)$ (και λόγω συνέχειας της f στο σημείο $x=x_0$ έχουμε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[x_0,x_0+\delta)$).
Συνεπώς, από το **κριτήριο Πρώτης Παραγώγου**, η f παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στο σημείο $x=x_0$.
Ομοίως αποδεικνύεται και το αντίστοιχο αποτέλεσμα στην περίπτωση που $f''(x_0)<0$. □

[2]Ξέρουμε ότι αν $\lim_{x\to x_0} f(x)>0$,, τότε υπάρχει (ανοικτή) τρύπια περιοχή $\pi(x_0)$ του x_0 τέτοια ώστε οι τιμές της f να είναι >0 στην περιοχή αυτή, δηλαδή

$$f(x)>0,\ \forall x\in\pi(x_0).$$

11. Ορισμός κυρτής – κοίλης συνάρτησης. Γεωμετρική ερμηνεία.

• **Ορισμός** (κυρτή συνάρτηση) (Τεύχος Α-σελ. 62)
Μια **συνεχής** συνάρτηση $f : \Delta \to \mathbb{R}$, όπου $\Delta \subseteq \mathbb{R}$ διάστημα, λέγεται **κυρτή** (στο Δ) αν για κάθε $x_1, x_2 \in \Delta$ ισχύει

$$\phi(\xi) \geq f(\xi), \quad \forall \xi \in (x_1, x_2),$$

όπου $y = \phi(x)$ είναι η εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από τα σημεία $A(x_1, f(x_1))$ και $B(x_2, f(x_2))$ του γραφήματος της f.

• **Ορισμός** (κοίλη συνάρτηση)
Μια **συνεχής** συνάρτηση $f : \Delta \to \mathbb{R}$, όπου $\Delta \subseteq \mathbb{R}$ διάστημα, λέγεται **κοίλη** (στο Δ) αν για κάθε $x_1, x_2 \in \Delta$ ισχύει

$$\phi(\xi) \leq f(\xi), \quad \forall \xi \in (x_1, x_2),$$

όπου $y = \phi(x)$ είναι η εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από τα σημεία $A(x_1, f(x_1))$ και $B(x_2, f(x_2))$ του γραφήματος της f.

Γεωμετρική ερμηνεία: Μια συνεχής συνάρτηση f είναι κυρτή (αντίστοιχα κοίλη) στο διάστημα Δ, αν για κάθε δύο σημεία $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$, η γραφική παράσταση της συνάρτησης στο διάστημα $[x_1, x_2]$ δεν έχει κανένα σημείο του πάνω (αντίστοιχα κάτω) από το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει τα σημεία $(x_1, f(x_1))$ και $(x_2, f(x_2))$ του γραφήματός της.

• **Ορισμός**[α΄] (Τεύχος Α-σελ. 63)
Έστω συνάρτηση f συνεχής στο διάστημα Δ και παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του. Λέμε ότι:

(i) Η f είναι **κυρτή** ή ότι **στρέφει τα κοίλα προς τα πάνω** (στο Δ) αν η f' είναι αύξουσα στο εσωτερικό του Δ.

(ii) Η f είναι **κοίλη** ή ότι **στρέφει τα κοίλα προς τα κάτω** (στο Δ) αν η f' είναι φθίνουσα στο εσωτερικό του Δ.

[α΄] Σημείωση: Μάλλον, εκ παραδρομής, στη σελ. 63 του σχολικού Α τεύχους, αντί η λέξη 'Ορισμός' μπήκε η λέξη 'Θεώρημα'.

12. Θεώρημα (Κριτήριο για την κυρτότητα συνάρτησης με τη βοήθεια της δεύτερης παραγώγου). Διατύπωση και εφαρμογή του στην επίλυση προβλήματος.

• **Θεώρημα** (Κριτήριο για την κυρτότητα συνάρτησης με τη βοήθεια της δεύτερης παραγώγου) (Τεύχος Α-σελ. 65)
Έστω συνάρτηση f συνεχής στο διάστημα Δ και παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του. Τότε:

(i) Ικανή και αναγκαία συνθήκη για να είναι η f κυρτή στο Δ είναι η $f''(x) \geq 0$, για κάθε x στο εσωτερικό του Δ.

(ii) Ικανή και αναγκαία συνθήκη για να είναι η f κοίλη στο Δ είναι η $f''(x) \leq 0$, για κάθε x στο εσωτερικό του Δ.

13. Ορισμός σημείου καμπής και εφαρμογή του στην επίλυση προβλήματος.

• **Ορισμός** (Τεύχος Α-σελ. 66)
Έστω συνάρτηση $f : \Delta \to \mathbb{R}$, όπου Δ διάστημα και $x_0 \in \Delta$.
Το σημείο $A(x_0, f(x_0))$ της γραφικής παράστασης της f λέγεται **σημείο καμπής** (της γραφικής παράστασης της f), αν ισχύουν τα πιο κάτω:

(i) η f είναι συνεχής στο σημείο $x = x_0$,

(ii) αν υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε η f είναι κοίλη στο διάστημα $(x_0 - \delta, x_0)$ και κυρτή στο διάστημα $(x_0, x_0 + \delta)$ ή αντιστρόφως,

(iii) σν η γραφική παράσταση της f έχει εφαπτομένη στο σημείο της A.

Αν σε ένα σημείο καμπής $A(x_0, f(x_0))$ της γραφικής παράστασης της f υπάρχει ο $f''(x_0)$, τότε $f''(x_0) = 0$.

14. Θεώρημα (Κριτήριο Δεύτερης Παραγώγου για την εύρεση των σημείων καμπής συνάρτησης). Εφαρμογή του στην επίλυση προβλήματος.

• **Θεώρημα** (Τεύχος Α-σελ. 68)
Αν η γραφική παράσταση της συνάρτησης f παρουσιάζει σημείο καμπής στο σημείο $x = x_0$, είναι παραγωγίσιμη σε κάποια ανοικτή περιοχή του σημείου $x = x_0$ και υπάρχει ο $f''(x_0)$, τότε

$$f''(x_0) = 0.$$

15. Ορισμός της Κατακόρυφης, Οριζόντιας και της Πλάγιας ασύμπτωτης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $y = f(x)$. Διατύπωση και εφαρμογή τους στην επίλυση προβλήματος.

Ορισμοί (Ασύμπτωτες συνάρτησης) (Τεύχος Α-75)

(i) Δίνεται η συνάρτηση $f : A \to \mathbb{R}$ και σημείο $x_0 \in A$ τέτοιο ώστε για κάθε (ανοικτή) περιοχή του $\pi(x_0)$ ισχύει ότι $\pi(x_0) \cap (A - \{x_0\}) \neq \emptyset$.
Αν τουλάχιστον ένα από τα όρια $\lim_{x\to x_0-} f(x)$ και $\lim_{x\to x_0+} f(x)$ είναι είτε $+\infty$ είτε $-\infty$, τότε η ευθεία με $x = x_0$ λέγεται **κατακόρυφη ασύμπτωτη** της γραφικής παράστασης της f.

(ii) Δίνεται η συνάρτηση $f : A \to \mathbb{R}$ όπου το A περιέχει ένα τουλάχιστον διάστημα της μορφής $(a, +\infty)$ ή διάστημα της μορφής $(-\infty, a)$, $a \in \mathbb{R}$.
Τότε:

(α΄) Αν $\lim_{x\to+\infty} f(x) = b \in \mathbb{R}$ (αντιστοίχως $\lim_{x\to-\infty} f(x) = b \in \mathbb{R}$), τότε η ευθεία $y = b$ λέγεται **οριζόντια ασύμπτωτη** της γραφικής παράστασης της f στο $+\infty$ (αντιστοίχως στο $-\infty$).

(β΄) Η ευθεία με εξίσωση $y = \lambda x + b$, όπου $\lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$, λέγεται **πλάγια ασύμπτωτη** της γραφικής παράστασης της f στο $+\infty$ (αντιστοίχως στο $-\infty$) όταν $\lim_{x\to+\infty}[f(x) - (\lambda x + b)] = 0$ (αντιστοίχως $\lim_{x\to-\infty}[f(x) - (\lambda x + b)] = 0$).

16. Θεώρημα της Πλάγιας ασύμπτωτης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $y = f(x)$. Διατύπωση και εφαρμογή του στην επίλυση προβλήματος.

Θεώρημα (Τεύχος Α-77)

Η ευθεία με εξίσωση $y = \lambda x + b$ είναι πλάγια ασύμπτωτη του γραφήματος της συνάρτησης f στο $+\infty$ (αντιστοίχως στο $-\infty$) αν και μόνο αν

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lambda \in \mathbb{R} \quad \textbf{και} \quad \lim_{x \to +\infty} [f(x) - \lambda x] = b \in \mathbb{R},$$

αντιστοίχως

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lambda \in \mathbb{R} \quad \textbf{και} \quad \lim_{x \to -\infty} [f(x) - \lambda x] = b \in \mathbb{R}.$$