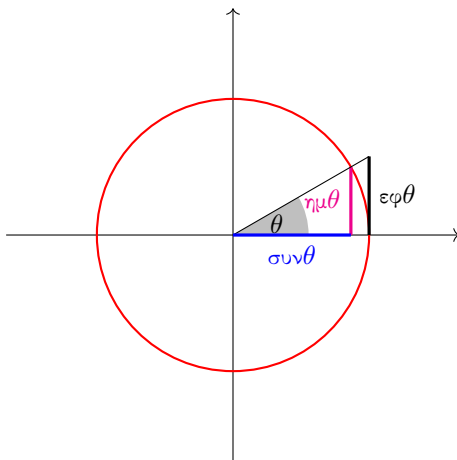


Ενότητα II - Αντίστροφες τριγωνομετρικές συναρτήσεις



Πίνακας 1: Πίνακας βασικών τριγωνομετρικών αριθμών

| | 0 | $\frac{\pi}{6}$ | $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{\pi}{2}$ |
|-----------------------|---|----------------------|----------------------|----------------------|-----------------|
| $\eta\mu x$ | 0 | $\frac{1}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | 1 |
| $\sigma\upsilon\nu x$ | 1 | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | 0 |
| $\epsilon\varphi x$ | 0 | $\frac{\sqrt{3}}{3}$ | 1 | $\sqrt{3}$ | – |
| $\sigma\varphi x$ | – | $\sqrt{3}$ | 1 | $\frac{\sqrt{3}}{3}$ | 0 |

► Τριγωνομετρικές ταυτότητες

$$\begin{aligned} \eta\mu^2\theta + \sigma\upsilon\nu^2\theta &= 1 \\ \epsilon\varphi^2\theta + 1 &= \tau\epsilon\mu^2\theta \\ \sigma\varphi^2\theta + 1 &= \sigma\tau\epsilon\mu^2\theta \\ \eta\mu(\theta \pm \phi) &= \eta\mu\theta\sigma\upsilon\nu\phi \pm \sigma\upsilon\nu\theta\eta\mu\phi \\ \sigma\upsilon\nu(\theta \pm \phi) &= \sigma\upsilon\nu\theta\sigma\upsilon\nu\phi \mp \eta\mu\theta\eta\mu\phi \\ \epsilon\varphi(\theta \pm \phi) &= \frac{\epsilon\varphi\theta \pm \epsilon\varphi\phi}{1 \mp \epsilon\varphi\theta\epsilon\varphi\phi} \\ \sigma\varphi(\theta \pm \phi) &= \frac{\sigma\varphi\theta\sigma\varphi\phi \mp 1}{\sigma\varphi\theta \pm \sigma\varphi\phi} \\ \eta\mu^2\theta &= \frac{\epsilon\varphi^2\theta}{1 + \epsilon\varphi^2\theta}. \end{aligned}$$

► Ορισμός των αντίστροφων τριγωνομετρικών συναρτήσεων

$$\begin{aligned} y = \text{τοξ}\eta\mu x, x \in [-1, 1] &\iff x = \eta\mu y, y \in [-\pi/2, \pi/2] \\ y = \text{τοξ}\sigma\upsilon\nu x, x \in [-1, 1] &\iff x = \sigma\upsilon\nu y, y \in [0, \pi] \\ y = \text{τοξ}\epsilon\varphi x, x \in \mathbb{R} &\iff x = \epsilon\varphi y, y \in (-\pi/2, \pi/2) \\ y = \text{τοξ}\sigma\varphi x, x \in \mathbb{R} &\iff x = \sigma\varphi y, y \in (0, \pi) \end{aligned}$$

Λύσεις των ασκήσεων

(1) Να υπολογίσετε τις ακόλουθες παραστάσεις:

- | | | |
|---|---|---|
| (i) τοξημ $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ | (iii) τοξσυν $\left(\frac{1}{2}\right)$ | (vi) τοξεφ $\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$ |
| (ii) τοξημ $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ | (iv) τοξσυν (-1) | (vii) τοξσφ (-1) |
| | (v) τοξεφ (1) | (viii) τοξσφ $(\sqrt{3})$ |

Απάντηση.

- (i) τοξημ $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\pi}{3}$, αφού $\eta\mu\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$.
- (ii) τοξημ $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\frac{\pi}{4}$, αφού $\eta\mu\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.
- (iii) τοξσυν $\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{3}$, αφού $\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$.
- (iv) τοξσυν $(-1) = \pi$, αφού $\sigma\upsilon\nu(\pi) = -1$.
- (v) τοξεφ $(1) = \frac{\pi}{4}$, αφού $\tan\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$.
- (vi) τοξεφ $\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = -\frac{\pi}{6}$, αφού $\tan\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\tan\left(\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{3}$.
- (vii) τοξσφ $(-1) = \frac{3\pi}{4}$, αφού $\sigma\varphi\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \sigma\varphi\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) = -\sigma\varphi\left(\frac{\pi}{4}\right) = -1$.
- (viii) τοξσφ $(\sqrt{3}) = \frac{\pi}{6}$, αφού $\sigma\varphi\left(\frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{3}$. ◀

(2) Να μετατρέψετε σε αλγεβρικές παραστάσεις του x τις πιο κάτω τριγωνομετρικές παραστάσεις:

- (i) $\eta\mu(\text{τοξεφ}(3x))$, $0 \leq x \leq \frac{1}{3}$. (ii) $\epsilon\varphi(\text{τοξσυν}(4x))$, $0 \leq x \leq \frac{1}{4}$.

Απάντηση.

- (i) Θέτουμε $\theta = \text{τοξεφ}(3x)$. Τότε $\epsilon\varphi\theta = 3x$, όπου $0 \leq x \leq \frac{1}{3}$ και $0 \leq \theta < \frac{\pi}{2}$.
Θέλουμε να υπολογίσουμε την $\eta\mu(\text{τοξεφ}(3x)) = \eta\mu\theta$. Έχουμε:

$$\begin{aligned} \epsilon\varphi\theta = 3x &\Rightarrow \epsilon\varphi^2\theta = 9x^2 \Rightarrow \frac{\eta\mu^2\theta}{\sigma\upsilon\nu^2\theta} = 9x^2 \\ &\Rightarrow \eta\mu^2\theta = 9x^2\sigma\upsilon\nu^2\theta \\ &\Rightarrow \eta\mu^2\theta = 9x^2(1 - \eta\mu^2\theta) \\ &\Rightarrow \eta\mu^2\theta = \frac{9x^2}{1 + 9x^2} \\ &\Rightarrow \eta\mu\theta = \frac{3x}{\sqrt{1 + 9x^2}}, \text{ αφού } \eta\mu\theta > 0. \end{aligned}$$

Εναλλακτικά,

$$\begin{aligned} \eta\mu^2\theta &= \frac{\epsilon\varphi^2\theta}{1 + \epsilon\varphi^2\theta} = \frac{9x^2}{1 + 9x^2} \\ (\text{αφού } \eta\mu\theta > 0) &\Rightarrow \eta\mu\theta = \sqrt{\frac{9x^2}{1 + 9x^2}} = \frac{3|x|}{\sqrt{1 + 9x^2}} \\ &= \frac{3x}{\sqrt{1 + 9x^2}}, \text{ αφού } x \geq 0. \end{aligned}$$

- (ii) Θέτουμε $\theta = \text{τοξσυν}(4x)$. Τότε $\text{συν}\theta = 4x$, όπου $0 \leq x \leq \frac{1}{4}$ και $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$.
Θέλουμε να υπολογίσουμε την $\varepsilon\varphi(\text{τοξσυν}(4x)) = \varepsilon\varphi\theta$.
Έχουμε:

$$\begin{aligned} \eta\mu^2\theta + \text{συν}^2\theta &= 1 \Rightarrow \eta\mu^2\theta = 1 - \text{συν}^2\theta = 1 - 16x^2 \\ (\text{αφού } \eta\mu\theta > 0) &\Rightarrow \eta\mu\theta = \sqrt{1 - 16x^2}. \end{aligned}$$

Συνεπώς,

$$\varepsilon\varphi\theta = \varepsilon\varphi(\text{τοξσυν}(4x)) = \frac{\eta\mu\theta}{\text{συν}\theta} = \frac{\sqrt{1 - 16x^2}}{4x}, \quad x \in [-1, 1].$$

- (3) Να υπολογίσετε την παράσταση

$$A = \eta\mu \left(\text{τοξσυν} \left(\frac{4}{5} \right) + \text{τοξε}\varphi \left(\frac{5}{12} \right) \right).$$

Απάντηση.

Έχουμε:

$$\begin{cases} \text{τοξσυν} \left(\frac{4}{5} \right) = \theta \\ \text{τοξε}\varphi \left(\frac{5}{12} \right) = \phi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \text{συν}\theta = \frac{4}{5}, \theta \in \left(0, \frac{\pi}{2} \right) \\ \varepsilon\varphi\phi = \frac{5}{12}, \phi \in \left(0, \frac{\pi}{2} \right) \end{cases}.$$

Θέλουμε να υπολογίσουμε την παράσταση:

$$\begin{aligned} A &= \eta\mu \left(\text{τοξσυν} \left(\frac{4}{5} \right) + \text{τοξε}\varphi \left(\frac{5}{12} \right) \right) \\ &= \eta\mu(\theta + \phi) \\ &= \eta\mu\theta\text{συν}\phi + \text{συν}\theta\eta\mu\phi. \end{aligned}$$

Από τις Πυθαγόρειες τριάδες $(3, 4, 5)$ και $(5, 12, 13)$, ή με χρήση βασικών τριγωνομετρικών ταυτοτήτων και αφού $\eta\mu\theta$, $\eta\mu\phi$, $\text{συν}\phi > 0$ βρίσκουμε:

$$\eta\mu\theta = \frac{3}{5}, \quad \eta\mu\phi = \frac{5}{13}, \quad \text{συν}\phi = \frac{12}{13}$$

και άρα

$$A = \frac{3}{5} \cdot \frac{12}{13} + \frac{4}{5} \cdot \frac{5}{13} = \frac{56}{65}.$$

- (4) Να βρείτε το πεδίο ορισμού και τις παραγώγους των πιο κάτω συναρτήσεων:

(i) $f(x) = \text{τοξσυν}(3x)$ (ii) $f(x) = \text{τοξε}\sigma\varphi \left(\frac{1}{x-1} \right)$ (iii) $f(x) = \text{τοξε}\eta\mu(x^2)$

Απάντηση.

- (i) Η f είναι σύνθεση της $g(x) = \text{τοξσυν}x$, η οποία έχει πεδίο ορισμού το σύνολο $[-1, 1]$ με την $h(x) = 3x$, η οποία έχει πεδίο ορισμού το \mathbb{R} . Έτσι,

$$-1 \leq 3x \leq 1 \Rightarrow -\frac{1}{3} \leq x \leq \frac{1}{3},$$

δηλαδή

$$D(f) = \left[-\frac{1}{3}, \frac{1}{3} \right].$$

Στο εσωτερικό του πεδίου ορισμού της, η f είναι παραγωγίσιμη με

$$f'(x) = \frac{(3x)'}{\sqrt{1-(3x)^2}} = \frac{3}{\sqrt{1-9x^2}}, \quad x \in \left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right).$$

(ii) Η f είναι σύνθεση της $g(x) = \text{τοξσφ}x$, η οποία έχει πεδίο ορισμού το \mathbb{R} με την $h(x) = \frac{1}{x-1}$, η οποία έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R} - \{1\}$. Έτσι,

$$D(f) = \mathbb{R} - \{1\}.$$

Είναι για κάθε $x \neq 1$,

$$f'(x) = -\frac{\left(\frac{1}{x-1}\right)'}{1 + \left(\frac{1}{x-1}\right)^2} = -\frac{-\frac{1}{(x-1)^2}}{1 + \frac{1}{(x-1)^2}} = \frac{1}{(x-1)^2 + 1}.$$

(iii) Η f είναι σύνθεση της $g(x) = \text{τοξημ}x$, η οποία έχει πεδίο ορισμού το $[-1, 1]$ με την $h(x) = x^2$, η οποία έχει πεδίο ορισμού το \mathbb{R} . Έτσι,

$$D(f) = [-1, 1].$$

Στο εσωτερικό του πεδίου ορισμού της, η f είναι παραγωγίσιμη με

$$f'(x) = \frac{(x^2)'}{\sqrt{1-(x^2)^2}} = \frac{2x}{\sqrt{1-x^4}}, \quad x \in (-1, 1).$$

(5) Να δείξετε ότι για κάθε $x > 0$,

$$\text{τοξσφ}x + \text{τοξσφ}\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}.$$

Βρείτε ανάλογο τύπο για $x < 0$.

Απάντηση.

1ος τρόπος. Θεωρούμε τη συνάρτηση f με τύπο

$$f(x) = \text{τοξσφ}x + \text{τοξσφ}\left(\frac{1}{x}\right).$$

Η f είναι το άθροισμα των συναρτήσεων $h(x) = \text{τοξσφ}x$ και $g(x) = \text{τοξσφ}\left(\frac{1}{x}\right)$ οι οποίες έχουν πεδίο ορισμού \mathbb{R} και $\mathbb{R} - \{0\}$ αντίστοιχα. Συνεπώς, $D(f) = \mathbb{R} - \{0\}$.

Για $x > 0$ είναι

$$\begin{aligned} f'(x) &= (\text{τοξσφ}x) + \left(\text{τοξσφ}\left(\frac{1}{x}\right)\right)' = -\frac{1}{1+x^2} - \frac{\left(\frac{1}{x}\right)'}{1 + \left(\frac{1}{x}\right)^2} \\ &= -\frac{1}{1+x^2} - \frac{-\frac{1}{x^2}}{1 + \frac{1}{x^2}} = -\frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{1+x^2} = 0 \end{aligned}$$

και άρα η f είναι σταθερή στο σύνολο $(0, +\infty)$. Αλλά,

$$f(1) = 2\text{τοξσφ}1 = 2\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$$

και άρα

$$f(x) = \frac{\pi}{2}, \quad \forall x \in (0, +\infty).$$