Ασκήσεις Επανάληψης

Γ′ Λυκείου Κατεύθυνσης

2021 – 2022

Πηγή:
https://mathm.schools.ac.cy/index.php/el/yliko/endeiktiko-yliko

Σε μερικές από τις ασκήσεις, έχουν τροποποιηθεί οι εκφωνήσεις ούτως ώστε να μην υπάρχουν ασάφειες ή έτσι ώστε να αναδεικνύεται ο γενικότερος σκοπός της άσκησης.

Ιωάννης Ι. Ιωακείμ

http://ioakimioannis.com

Η μεγαλύτερη απόδειξη περί της καλοσύνης της θεότητας, για μένα,
είναι τα λουλούδια.

Όλα τα άλλα, οι δυνατότητες ή οι επιθυμίες μας,
το φαγητό, αποτελούν πρωταρχικές ανάγκες. Αυτό το λουλούδι όμως,
είναι κάτι παραπάνω, Η ωριμότητα, το άρωμά του, είναι στολίδια της ζωής,
όχι προϋπόθεσή της. Μόνο μια θεότητα μπορεί να δώσει κάτι περισσότερο
από τη ζωή και γι΄ αυτό, το ξαναλέω, έχουμε κάτι στο οποίο να ελπίζουμε
χάρη στα λουλούδια.'

– Sir Arthur Conan Doyle

Προτεινόμενες λύσεις των επίσημων ασκήσεων προετοιμασίας για τις εξετάσεις τετραμήνων,
Γ΄ Λυκείου κατεύθυνσης
LaTeX typesetting: Ioannis Ioakim

Λευκωσία, Κύπρος, Ιανουάριος 2022

Ενότητα I -Εφαρμογές του Διαφορικού Λογισμού

(1) **(i)** Να βρείτε την εξίσωση της κάθετης της καμπύλης με εξίσωση $y = x \ln x$ η οποία είναι παράλληλη στην ευθεία με εξίσωση $2x - 2y + 3 = 0$.

(ii) Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτόμενων της καμπύλης με εξίσωση $\dfrac{x^2}{2} - \dfrac{y^2}{7} = 1$, που είναι κάθετες στην ευθεία με εξίσωση $2x + 4y - 3 = 0$.

Απάντηση.

Υπενθύμιση:

> **Ορισμός** δες Β΄ Λυκείου κατ., Τεύχος Δ/κεφάλαιο 10, σελ. 106
> Έστω ότι η **συνάρτηση** f ορίζεται σε ένα ανοικτό διάστημα $\Delta \subseteq \mathbb{R}$, το οποίο περιέχει το x_0. Αν το όριο
> $$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$
> (δηλαδή ο παράγωγος αριθμός $f'(x_0)$) υπάρχει και είναι πραγματικός αριθμός, τότε η ευθεία που διέρχεται από το σημείο $A(x_0, f(x_0))$ της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f και έχει κλίση $\lambda = f'(x_0)$, ονομάζεται **εφαπτομένη ευθεία** της συνάρτησης f στο σημείο A.

Άρα, η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο $A(x_0, f(x_0))$ είναι η

$$\boxed{y - y_0 = f'(x_0) \cdot (x - x_0)}\ .$$

Στην περίπτωση που η εξίσωση της καμπύλης είναι σε πεπλεγμένη μορφή[1], για να βρούμε την κλίση της εφαπτομένης της καμπύλης στο σημείο $A(x_0, y_0)$, παραγωγίζουμε πεπλεγμένα την εξίσωσή της και λύνουμε ως προς y'.

(i) Η καμπύλη εδώ καθορίζεται από τη **συνάρτηση** $y = x \ln x,\ x > 0$. Είναι

$$y' = (x \ln x)' = x' \ln x + x(\ln x)' = \ln x + x \cdot \frac{1}{x} = \ln x + 1, \quad x > 0.$$

Είναι

$$2x - 2y + 3 = 0 \Leftrightarrow y = x + \frac{3}{2}$$

και άρα η κλίση της πιο πάνω ευθείας είναι $\lambda_{(\epsilon)} = 1$. Αλλά η εφαπτομένη που ψάχνουμε είναι παράλληλη με την ευθεία αυτή, άρα $\lambda_{(\epsilon)} = \lambda_{\epsilon\phi.} = 1$, δηλαδή (αν (x_0, y_0) το σημείο επαφής)

$$y'(x_0) = \lambda_{\epsilon\phi.} = 1 \Leftrightarrow \ln x_0 + 1 = 1 \Leftrightarrow x_0 = 1.$$

Τότε, $y_0 = y(x_0) = 1 \ln 1 = 0$. Έτσι, η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης στο σημείο της $(1, 0)$ είναι η $y - 0 = 1 \cdot (x - 1)$, δηλαδή η

$$\boxed{y = x - 1}\ .$$

(ii) Εδώ η καμπύλη καθορίζεται από την πεπλεγμένη εξίσωση $\dfrac{x^2}{2} - \dfrac{y^2}{7} = 1$, την οποία παραγωγίζουμε (πεπλεγμένα):

$$\begin{aligned} \frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{7} = 1 \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{2x}{2} - \frac{2yy'}{7} = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad y' = \frac{7x}{2y}, \end{aligned}$$

[1] Μια εξίσωση της μορφής $F(x, y) = 0$, όπου F μια συνάρτηση 2 μεταβλητών, λέγεται **πεπλεγμένη**.
Πεπλεγμένη συνάρτηση λέγεται μια συνάρτηση f η οποία καθορίζεται από μια πεπλεγμένη εξίσωση, δηλαδή τέτοια ώστε να ικανοποιεί μια εξίσωση της μορφής $F(x.f(x)) = 0$.

φυσικά για $y \neq 0$ (όπου το γράφημα της καμπύλης έχει κατακόρυφη εφαπτομένη).
Είναι
$$2x + 4y - 3 = 0 \Leftrightarrow y = 3 - \frac{x}{2}$$
και άρα η κλίση της πιο πάνω ευθείας είναι $\lambda_{(\epsilon)} = -\frac{1}{2}$. Αλλά η εφαπτομένη που ψάχνουμε είναι κάθετη στην ευθεία αυτή, άρα $\lambda_{(\kappa\alpha\theta.)} = -\frac{1}{\lambda_\epsilon} = 2$, δηλαδή (αν (x_0, y_0), $y_0 \neq 0$ το σημείο επαφής), τότε
$$\frac{7x_0}{2y_0} = 2 \Leftrightarrow y_0 = \frac{7x_0}{4}.$$
Αλλά, το σημείο αυτό ανήκει στην καμπύλη, άρα επαληθεύει την εξίσωσή της:
$$y_0 = \pm\sqrt{\frac{7x_0^2}{2} - 1}$$
και αντιθιστώντας το y_0 βρίσκουμε $x_02 = 16 \Rightarrow x_0 = \pm 4$. Στα σημεία αυτά αντιστοιχούν τα $y_0 = 7$ και $y_0 = -7$ αντίστοιχα.
Άρα, έχουμε δύο εφαπτομένες, τις
$$(\epsilon\phi.1):\ y - 7 = 2(x - 4) \Leftrightarrow \boxed{y - 2x = -1}$$
και
$$(\epsilon\phi.2):\ y + 7 = 2(x + 4) \Leftrightarrow \boxed{y - 2x = 1}\ .$$

◀

(2) Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς α και β έτσι ώστε
$$\lim_{x\to 2} \frac{x^3 + \alpha e^{2-x} + \beta x}{x^2 - 4} = \frac{1}{2}.$$

Απάντηση.

Είναι $\lim\limits_{x\to 2}(x^2 - 4) = 4 - 4 = 0$. **ΑΝ** επιπλέον είναι $\lim\limits_{x\to 2}(x^3 + \alpha e^{2-x} + \beta x) = 0$, δηλαδή $8 + \alpha e^0 + 2\beta = 0$, δηλαδή
$$\alpha + 2\beta = -8, \tag{1}$$
τότε το όριο αποτελεί απροσδιοριστία τύπου $\frac{0}{0}$. Έχουμε
$$\lim_{x\to 2} \frac{(x^3 + \alpha e^{2-x} + \beta x)'}{(x^2 - 4)'} = \lim_{x\to 2} \frac{3x^2 - \alpha e^{2-x} + \beta}{2x} = \frac{12 - \alpha + \beta}{4} \in \overline{\mathbb{R}}.$$
Τότε, από κανόνα του De L' Hopital,
$$\lim_{x\to 2} \frac{x^3 + \alpha e^{2-x} + \beta x}{x^2 - 4} = \lim_{x\to 2} \frac{(x^3 + \alpha e^{2-x} + \beta x)'}{(x^2 - 4)'},$$
δηλαδή
$$\frac{1}{2} = \frac{12 - \alpha + \beta}{4},$$
δηλαδή
$$\alpha - \beta = 10. \tag{2}$$
Από τις (1) και (2), έχουμε $\boxed{\alpha = 4, \quad \beta = -6}$.

Όμως, αφού το όριο υπάρχει και ισούται με 1/2, οι τιμές αυτές των α και β είναι και οι μοναδικές. Πράγματι, μπορούμε εύκολα να δούμε (π.χ. με χρήση κανόνα του De L' Hopital) ότι
$$\lim_{x\to 2} \frac{x^3 + 4e^{2-x} - 6x}{x^2 - 4} = \frac{1}{2}.$$

(3) Να δείξετε ότι
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}=1.$$

Απάντηση.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x-\frac{1}{e^x}}{e^x+\frac{1}{e^x}}$$

και άρα αφού $\lim\limits_{x\to+\infty}e^x=+\infty$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{e^x}=0$, το πιο πάνω όριο αποτελεί απροσδιοριστία τύπου $\frac{+\infty}{+\infty}$.
Εφαρμόζοντας στο πιο πάνω όριο, όπως είναι, κανόνα του De L' Hopital, οδηγούμαστε σε μια ατέρμονη ακολουθία απροσδιόριστων μορφών $\frac{+\infty}{+\infty}$.
Αν όμως, έχοντας ως οδηγό το ότι $\dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}=\dfrac{e^x-\frac{1}{e^x}}{e^x+\frac{1}{e^x}}$, αντιλαμβανόμαστε ότι μπορούμε να 'διώξουμε' τον όρο e^x, πολλαπλασιάζοντας αριθμητή και παρονομαστή με αυτόν:
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x-\frac{1}{e^x}}{e^x+\frac{1}{e^x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x\left(e^x-\frac{1}{e^x}\right)}{e^x\left(e^x+\frac{1}{e^x}\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}.$$
Το τελευταίο όριο είναι απροσδιοριστία τύπου $\frac{+\infty}{+\infty}$. Έχουμε:
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{(e^{2x}-1)'}{(e^{2x}+1)'}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2e^{2x}}{2e^{2x}}=1$$
και άρα από κανόνα του De L' Hopital,
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{(e^{2x}-1)'}{(e^{2x}+1)'}=1.$$
Αυτό είναι ισοδύναμο με το να θέσουμε $w=e^x$: το όριο που θα προκύψει είναι το
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{w-\frac{1}{w}}{w+\frac{1}{w}}$$
το οποίο με μια εφαρμογή κανόνα του De L' Hopital, είναι ίσο με 1.
Το πιο πάνω μας λέει και κάτι άλλο: αν 'διώξουμε' τον όρο e^{-x}, θα οδηγηθούμε πάλι σε μια ατέρμονη ακολουθία απροσδιόριστων μορφών. ◀

Υπενθύμιση: Βασικά όρια

$$\lim_{x\to+\infty}e^{ax}=\begin{cases}+\infty, & \text{αν } a>0\\ 0, & \text{αν } a<0\end{cases}.$$
Για παράδειγμα,
$$\lim_{x\to+\infty}e^{-2x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{e^{2x}}=0,$$
αφού $\lim\limits_{x\to+\infty}e^{2x}=+\infty$.
$$\lim_{x\to-\infty}e^{ax}=\begin{cases}+\infty, & \text{αν } a<0\\ 0, & \text{αν } a>0\end{cases}.$$
Για παράδειγμα,
$$\lim_{x\to-\infty}e^{2x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{e^{-2x}}=0,$$
αφού $\lim\limits_{x\to-\infty}e^{-2x}=+\infty$.
$$\lim_{x\to0^+}\ln x=-\infty,\qquad \lim_{x\to+\infty}\ln x=+\infty.$$

(4) Να υπολογίσετε τα πιο κάτω όρια:

(i) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln^2 x}{x}$. **(ii)** $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - e^{\varepsilon\varphi x}}{\ln(x+1)}$. **(iii)** $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{e^{-3x}}{x^2}$.

Απάντηση.

(i) Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln^2 x = \left(\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x\right)^2 = +\infty$, αφού $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$ και $\lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$. Συνεπώς, το όριο αποτελεί απροσδιοριστία τύπου $\frac{+\infty}{+\infty}$.
Έχουμε:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{(\ln^2 x)'}{x'} = \lim_{x\to+\infty} \left(2\ln x \cdot \frac{1}{x}\right) = 2 \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x}.$$

Αλλά και πάλι, το τελευταίο όριο αποτελεί απροσδιοριστία τύπου $\frac{+\infty}{+\infty}$. Έχουμε:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{(\ln x)'}{x'} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0.$$

Άρα, από κανόνα του De L' Hopital,

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln^2 x}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{(\ln^2 x)'}{x'} = \lim_{x\to+\infty} \frac{(2\ln x)'}{x'} = 0.$$

(ii) Είναι $\lim\limits_{x\to 0}(e^x - e^{\varepsilon\varphi x}) = e^0 - e^{\varepsilon\varphi 0} = 1 - e^0 = 1 - 1 = 0$ και $\lim\limits_{x\to 0} \ln(x+1) = \ln\left(\lim\limits_{x\to 0}(x+1)\right) = \ln(0+1) = \ln 1 = 0$ και άρα το όριο αποτελεί απροσδιοριστία τύπου $\frac{0}{0}$.
Έχουμε:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{(e^x - e^{\varepsilon\varphi x})'}{(\ln(x+1))'} &= \lim_{x\to 0} \frac{e^x - (\varepsilon\varphi x)' e^{\varepsilon\varphi x}}{\frac{1}{x+1}} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x - \tau\varepsilon\mu^2 x e^{\varepsilon\varphi x}}{\frac{1}{x+1}} \\
&= \frac{e^0 - \tau\varepsilon\mu^2 0 e^{\varepsilon\varphi 0}}{\frac{1}{0+1}} = \frac{1 - 1\cdot e^0}{1} = 1 - 1 \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Άρα, από κανόνα του De L' Hopital,

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - e^{\varepsilon\varphi x}}{\ln(x+1)} = \lim_{x\to 0} \frac{(e^x - e^{\varepsilon\varphi x})'}{(\ln(x+1))'} = 0.$$

(iii) Είναι $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{-3x} = +\infty$ και $\lim\limits_{x\to-\infty} x^2 = +\infty$ και άρα το όριο αποτελεί απροσδιοριστία τύπου $\frac{+\infty}{+\infty}$. Έχουμε:

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{(e^{-3x})'}{(x^2)'} = \lim_{x\to-\infty} \frac{-3e^{-3x}}{2x} = -\frac{3}{2} \lim_{x\to-\infty} \frac{e^{-3x}}{x}.$$

Εύκολα βλέπουμε ότι το τελευταίο όριο είναι απροσδιοριστία τύπου $\frac{+\infty}{-\infty}$. Έχουμε:

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{(e^{-3x})'}{x'} = -3 \lim_{x\to-\infty} e^{-3x} = +\infty \in \overline{\mathbb{R}}.$$

Άρα, από κανόνα του De L' Hopital,

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{e^{-3x}}{x^2} = \lim_{x\to-\infty} \frac{(e^{-3x})'}{(x^2)'} = \lim_{x\to-\infty} \frac{(e^{-3x})''}{(x^2)''} = +\infty.$$

◀

(5) Να βρείτε τα τοπικά ακρότατα και τα σημεία καμπής (αν υπάρχουν) των πιο κάτω συναρτήσεων:

(i) $f(x) = x + \dfrac{1}{x}$ **(ii)** $g(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 10.$

Απάντηση.

(i) $f(x) = x + \dfrac{1}{x}$. Είναι $D(f) = \mathbb{R} - \{0\}$. Η f είναι παραγωγίσιμη παντού στο πεδίο ορισμού της με

$$f'(x) = \left(x + \frac{1}{x}\right)' = 1 - \frac{1}{x^2} = \frac{x^2 - 1}{x^2}, \quad \forall x \neq 0.$$

Είναι

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x+1) = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1.$$

Τα κρίσιμα σημεία της f είναι τα $x = 0, \pm 1$.
Κάνουμε τον πίνακα μεταβολών της f' και παρατηρούμε ότι:
$\forall x \in (-\infty, -1) \Rightarrow f'(x) > 0 \Rightarrow f$ γνησίως αύξουσα,
$\forall x \in (-1, 0) \Rightarrow f'(x) < 0 \Rightarrow f$ γνησίως φθίνουσα
και αφού $f'(-1) = 0$, από το Κριτήριο Πρώτης Παραγώγου για τοπικά ακρότατα, η f παρουσιάζει **τοπικό μέγιστο** στο σημείο $(-1, f(-1)) = (-1, -2)$,
$\forall x \in (0, 1) \Rightarrow f'(x) < 0 \Rightarrow f$ γνησίως φθίνουσα,
$\forall x \in (1, +\infty) \Rightarrow f'(x) > 0 \Rightarrow f$ γνησίως αύξουσα
και αφού $f'(1) = 0$, από το Κριτήριο Πρώτης Παραγώγου για τοπικά ακρότατα, η f παρουσιάζει **τοπικό ελάχιστο** στο σημείο $(1, f(1)) = (1, 2)$.

Τώρα,

$$f''(x) = \frac{2}{x^3} \neq 0, \quad \forall x \neq 0$$

και άρα το γράφημα της f **δεν παρουσιάζει πουθενά καμπή** (δεν υπάρχουν σημεία καμπής). ◀

(ii) $g(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 10$. Είναι $D(f) = \mathbb{R}$, αφού η g είναι πολυωνυμική συνάρτηση. Η g είναι παραγωγίσιμη παντού στο πεδίο ορισμού της με

$$\begin{aligned} g'(x) &= (x^3 - 3x^2 - 9x + 10)' = 3x^2 - 6x - 9 \\ &= 3(x^2 - 2x + 3), \ = \ 3(x-3)(x+1) \quad \forall x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Είναι

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow (x-3)(x+1) = 0 \Leftrightarrow x = -1, 3.$$

Τα κρίσιμα σημεία της g είναι τα $x = -1, 3$.
Κάνουμε τον πίνακα μεταβολών της g' και παρατηρούμε ότι:
$\forall x \in (-\infty, -1) \Rightarrow g'(x) > 0 \Rightarrow g$ γνησίως αύξουσα,
$\forall x \in (-1, 3) \Rightarrow g'(x) < 0 \Rightarrow g$ γνησίως φθίνουσα
$\forall x \in (3, +\infty) \Rightarrow g'(x) > 0 \Rightarrow g$ γνησίως αύξουσα
και συνεπώς, αφού $g'(-1) = 0$ και $g'(3) = 0$, από το Κριτήριο Πρώτης Παραγώγου για τοπικά ακρότατα, η g παρουσιάζει στα σημεία $(-1, g(-1)) = (-1, 15)$ και $(3, g(3)) = (3, -17)$ **τοπικό μέγιστο** και **τοπικό ελάχιστο** αντίστοιχα.

Είναι

$$g''(x) = 6x^2 - 6 = 6(x-1), \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

και άρα $g''(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$. Αφού $\forall x < 1$ είναι $g''(x) < 0$, άρα η g κοίλη στο $(-\infty, 1)$ και αφού $\forall x > 1$ είναι $g''(x) > 0$, άρα η g κυρτή στο $(1, +\infty)$. Έτσι, αφού η κυρτότητα αλλάζει στο $x = 1$ και $g''(1) = 0$, το γράφημα της g παρουσιάζει **σημείο καμπής**, το $(1, g(1)) = (1, -1)$.

(6) Να βρείτε τα τοπικά ακρότατα της συνάρτησης f με τύπο

$$f(x) = \frac{\text{ημ}x}{2 - \text{συν}x}$$

στο διάστημα $[0, 2\pi]$ και ακολούθως να εξετάσετε αν εφαρμόζεται το Θεώρημα του Rolle για την f στο εν λόγω διάστημα.

Απάντηση.

Κατ΄ αρχάς, η συνάρτηση που μας δίνεται έχει νόημα, αφού ο παρονομαστής δεν μπορεί ποτέ να μηδενιστεί, αφού όπως ξέρουμε, $-1 \leq \text{συν}x \leq 1,\ \forall x \in \mathbb{R}$.
Η f είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα $[0, 2\pi]$ (στα άκρα του διαστήματος υπάρχουν οι πλευρικές παράγωγοι) με

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{(\text{ημ}x)'(2-\text{συν}x) - (\text{ημ}x)(2-\text{συν}x)'}{(2-\text{συν}x)^2} \\
&= \frac{\text{συν}x(2-\text{συν}x) - (\text{ημ}x)(\text{ημ}x)}{(2-\text{συν}x)^2} \\
&= \frac{2\text{συν}x - \text{συν}^2x - \text{ημ}^2x}{(2-\text{συν}x)^2} \\
&= \frac{2\text{συν}x - (\text{συν}^2x + \text{ημ}^2x)}{(2-\text{συν}x)^2} \\
&= \frac{2\text{συν}x - 1}{(2-\text{συν}x)^2}.
\end{aligned}$$

Είναι

$$\begin{aligned}
f'(x) = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad 2\text{συν}x - 1 \ \Leftrightarrow \ \text{συν}x = \frac{1}{2} \\
&\Leftrightarrow \quad \text{συν}x = \text{συν}\left(\frac{\pi}{3}\right) \\
&\Leftrightarrow \quad x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3}, \quad k \in \mathbb{Z}.
\end{aligned}$$

Βάζοντας τιμές στο $k \in \mathbb{Z}$, βρίσκουμε ότι οι μόνες λύσεις της πιο πάνω που ανήκουν στο διάστημα $[0, 2\pi]$ είναι οι $x = \frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}$.
Κάνουμε τον πίνακα μεταβολών της f' και παρατηρούμε ότι:
$\forall x \in (0, \pi/3) \Rightarrow f'(x) > 0 \Rightarrow f$ γνησίως αύξουσα,
$\forall x \in (\pi/3, 5\pi/3) \Rightarrow f'(x) < 0 \Rightarrow f$ γνησίως φθίνουσα
$\forall x \in (5\pi/3, 2\pi) \Rightarrow f'(x) > 0 \Rightarrow f$ γνησίως αύξουσα
και συνεπώς, αφού $f'(\pi/3) = 0$ και $f'(5\pi/3) = 0$, από το Κριτήριο Πρώτης Παραγώγου για τοπικά ακρότατα, η f παρουσιάζει στα σημεία $(\pi/3, f(\pi/3))$ και $(5\pi/3, f(5\pi/3))$ **τοπικό μέγιστο** και **τοπικό ελάχιστο** αντίστοιχα. Είναι

$$f(\pi/3) = \frac{\sin(\pi/3)}{2 - \text{συν}(\pi/3)} = \frac{\sqrt{3}/2}{2 - \frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{3}/2}{3/2} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

και

$$\begin{aligned}
f(5\pi/3) &= f(2\pi - \pi/3) = \frac{\sin(2\pi - \pi/3)}{2 - \text{συν}(2\pi - \pi/3)} \\
&= \frac{-\sin(\pi/3)}{2 - \text{συν}(\pi/3)} \ = \ -f(\pi/3) \\
&= -\frac{\sqrt{3}}{3}.
\end{aligned}$$

Επίσης, αφού η f είναι συνεχής σε κλειστό διάστημα, τα άκρα του πεδίου ορισμού της είναι τοπικά ακρότατα: από τον πίνακα μεταβολών της f' έχουμε ότι το $(0, f(0)) = (0, 0)$ είναι

τοπικό ελάχιστο και το $(2\pi, f(2\pi)) = (0,0)$ είναι **τοπικό μέγιστο**.
Τώρα,
• f συνεχής στο $[0, 2\pi]$ ως πηλίκο συνεχών συναρτήσεων,
• f παραγωγίσιμη στο $(0, 2\pi)$ ως πηλίκο παραγωγίσιμων συναρτήσεων,
• $f(0) = f(2\pi)$ $(= 0)$
και άρα εφαρμόζεται το Θεώρημα του Rolle για την f στο διάστημα $[0, 2\pi]$. ◀

(7) Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς α και β έτσι ώστε η γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = f(x) = \alpha x^3 + \beta x^2$ να έχει σημείο καμπής στο $A(1, 2)$.

Απάντηση.

Ξέρουμε ότι αν η γραφική παράσταση της συνάρτησης f παρουσιάζει σημείο καμπής στο σημείο $x = x_0$, είναι παραγωγίσιμη σε κάποια ανοικτή περιοχή του σημείου $x = x_0$ και υπάρχει ο $f''(x_0)$, τότε $f''(x_0) = 0$.

Εδώ πρόκειται για μια απλή περίπτωση (όπως και οι πλείστες συναρτήσεις που εμφανίζονται στα σχολικά πλαίσια) όπου η συνάρτηση είναι παντού παραγωγίσιμη στο πεδίο ορισμού της (είναι πολυωνυμική). Συνεπώς, αφού η γραφική παράσταση της συνάρτησης f παρουσιάζει σημείο καμπής στο $A(1, 2)$, τότε $f''(1) = 0$.
Είναι $f''(x) = 6\alpha x + 2\beta$ και άρα η πιο πάνω δίνει $6\alpha + 2\beta = 0$, δηλαδή

$$\beta = -3\alpha. \tag{3}$$

Επίσης, αφού η γραφική παράσταση της συνάρτησης f περνά από το σημείο $A(1, 2)$, έχουμε ότι $f(1) = 2$, δηλαδή

$$\alpha + \beta = 2. \tag{4}$$

Λύνοντας το σύστημα που προκύπτει από τις (3) και (4), βρίσκουμε

$$\alpha = -1 \quad \text{και} \quad \beta = 3.$$

◀

(8) Να εφαρμόσετε το Θεώρημα μέσης τιμής του Διαφορικού Λογισμού για τη συνάρτηση $f(x) = x^2 + x + 3$ στο διάστημα $[-2, 4]$ και να ερμηνεύσετε γεωμετρικά το αποτέλεσμα.

Απάντηση.

• f συνεχής στο $[-2, 4]$ ως πολυωνυμική,
• f παραγωγίσιμη στο $(-2, 4)$ ως πολυωνυμική
και άρα εφαρμόζεται το Θεώρημα μέσης τιμής του Διαφορικού Λογισμού για τη συνάρτηση f στο διάστημα $[-2, 4]$:

$$\exists\, \xi \in (-2, 4) \ : \ f'(\xi) = \frac{f(4) - f(-2)}{4 - (-2)} = \frac{23 - 5}{6} = \frac{18}{6} = 3.$$

Έχουμε $f'(x) = 2x + 1, \ \forall x \in \mathbb{R}$ και άρα η πιο πάνω δίνει

$$2\xi + 1 = 3 \Rightarrow \xi = 1 \in (-2, 4).$$

Γεωμετρική ερμηνεία:
Στο σημείο με $\xi = 1 \in (-2, 4)$, ο στιγμιαίος ρυθμός μεταβολής ισούται με το μέσο ρυθμό μεταβολής σε όλο το διάστημα $(-2, 4)$. Δηλαδή η εφαπτομένη στο σημείο $(1, f(1)) = (1, 5)$ είναι παράλληλη με το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει τα σημεία $(-2, f(-2)) = (-2, 5)$ και $(4, f(4)) = (4, 23)$.
Σημείωση: Είναι

$$f(x) = x^2 + x + 3 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{11}{4}$$

και άρα η γραφική παράσταση της f είναι παραβολή με κοορυφή $K\left(-\frac{1}{2}, \frac{11}{4}\right)$ στην οποία έχει ελάχιστο. ◀

(9) Για μια παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ισχύει $|f'(x)| \leq 2,\ \forall x \in \mathbb{R}$.
Αν $f(1) = 20$, να δείξετε ότι $18 \leq f(2) \leq 22$.

Απάντηση.

Είναι

$$|f'(x)| \leq 2,\ \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow -2 \leq f'(x) \leq 2,\ \forall x \in \mathbb{R}$$

και αφού μας δίνεται η τιμή της συνάρτησης f στο σημείο $x = 1$ και μας ζητείται να αποδείξουμε μια ανισοτική σχέση που ικανοποιεί η τιμή της συνάρτησης f στο σημείο $x = 2$, το μυαλό μας πηγαίνει στο Θεώρημα μέσης τιμής του Διαφορικού Λογισμού, αφού αυτό μας δίνει πληροφορία για την παράγωγο. Προφανώς θα το εφαρμόσουμε για την f στο διάστημα $[1, 2]$:

- f συνεχής στο $[1, 2]$ ως παραγωγίσιμη
- f παραγωγίσιμη στο $(1, 2)$ (δεδομένο)

και άρα εφαρμόζεται το Θεώρημα μέσης τιμής του Διαφορικού Λογισμού για τη συνάρτηση f στο διάστημα $[1, 2]$:

$$\exists\ \xi \in (1, 2)\ :\ f'(\xi) = \frac{f(2) - f(1)}{2 - 1} = f(2) - f(1) = f(2) - 20.$$

Αφού όμως $-2 \leq f'(x) \leq 2,\ \forall x \in \mathbb{R}$, τότε και $-2 \leq f'(\xi) \leq 2$, δηλαδή $-2 \leq f(2) - 20 \leq 2$, δηλαδή $-2 + 20 \leq f(2) \leq 2 + 20$, δηλαδή

$$18 \leq f(2) \leq 22.$$

◀

(10) **(i)** Να δείξετε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta$ $(\alpha \neq 0)$ έχει μοναδικό σημείο καμπής, του οποίου να προσδιορίσετε τις συντεταγμένες.

(ii) Αν επιπλέον υποθέσουμε ότι $\beta^2 = 3\alpha(\gamma - 2)$, να δείξετε ότι στο σημείο καμπής της γραφικής παράστασης της f η εφαπτόμενη είναι παράλληλη προς την ευθεία με εξίσωση $y = 2x + 7$.

Απάντηση.

(i) Η f είναι δις παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, ως πολυωνυμική. Είναι

$$\begin{aligned} f(x) &= \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta \\ \Rightarrow f'(x) &= 3\alpha x^2 + 2\beta x + \gamma \\ \Rightarrow f''(x) &= 6\alpha x + 2\beta. \end{aligned}$$

Είναι $f''(x) = 0 \Leftrightarrow 6\alpha x + 2\beta = 0 \Leftrightarrow x = -\dfrac{\beta}{3\alpha}$, αφού $\alpha \neq 0$. Είτε $\alpha < 0$ είτε $\alpha > 0$, η κυρτότητα στο γράφημα της f αλλάζει εκατέρωθεν του σημείου με $x = -\dfrac{\beta}{3\alpha}$, άρα έχει σημείο καμπής στο σημείο αυτό.

(ii) Είναι

$$\begin{aligned} f'\left(-\frac{\beta}{3\alpha}\right) &= 3\alpha\left(-\frac{\beta}{3\alpha}\right)^2 + 2b\left(-\frac{\beta}{3\alpha}\right) + \gamma \\ &= \frac{\beta^2}{3\alpha} - \frac{2\beta^2}{3\alpha} + \gamma \ = \ \frac{\beta^2}{3\alpha} + \gamma \\ &\overset{\beta^2 = 3\alpha(\gamma-2)}{=} \frac{3\alpha(\gamma - 2)}{3\alpha} + \gamma \ = \ 2. \end{aligned}$$

Άρα, η κλίση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο καμπής της έχει κλίση ίση με $f'\left(-\frac{\beta}{3\alpha}\right) = 2$ και άρα παράλληλη με την ευθεία με εξίσωση $y = 2x + 7$, αφού έχουν την ίδια κλίση.

(11) Χρησιμοποιώντας το Θεώρημα μέσης τιμής του Διαφορικού Λογισμού για τη συνάρτηση $f(x) = \ln x$ να δείξετε ότι αν $0 < \alpha < \beta$, τότε

$$1 - \frac{\alpha}{\beta} < \ln\left(\frac{\beta}{\alpha}\right) < \frac{\beta}{\alpha} - 1.$$

Απάντηση.

Γνωρίζουμε ότι (Θεωρία) η συνάρτηση f είναι παντού παραγωγίσιμη στο πεδίο ορισμού της, δηλαδή στο διάστημα $(0, +\infty)$, άρα **για κάθε** ζεύγος πραγματικών αριθμών α και β με $0 < \alpha < \beta$, η f είναι συνεχής στο **διάστημα** $[\alpha, \beta]$ και παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του. Συνεπώς, εφαρμόζεται το Θεώρημα μέσης τιμής του Διαφορικού Λογισμού για τη συνάρτηση f στο διάστημα $[\alpha, \beta]$:

$$\exists\, \xi \in (\alpha, \beta) \ : \ f'(\xi) = \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha} = \frac{\ln\beta - \ln\alpha}{\beta - \alpha} = \frac{\ln\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)}{\beta - \alpha}.$$

Αλλά, $f'(x) = 1/x,\ \forall x \in (\alpha, \beta) \Rightarrow f'(\xi) = 1/\xi$. Επίσης,

$$0 < \alpha < \xi < \beta \Rightarrow \frac{1}{\beta} < \frac{1}{\xi} < \frac{1}{\alpha}.$$

Από τα πιο πάνω έχουμε:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\beta} < \frac{\ln\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)}{\beta - \alpha} < \frac{1}{\beta} \quad &\overset{\beta-\alpha>0}{\Rightarrow} \quad \frac{\beta - \alpha}{\beta} < \ln\left(\frac{\beta}{\alpha}\right) < \frac{\beta - \alpha}{\alpha} \\
&\Rightarrow \quad \frac{\beta}{\beta} - \frac{\alpha}{\beta} < \ln\left(\frac{\beta}{\alpha}\right) < \frac{\beta}{\alpha} - \frac{\alpha}{\alpha} \\
&\Rightarrow \quad 1 - \frac{\alpha}{\beta} < \ln\left(\frac{\beta}{\alpha}\right) < \frac{\beta}{\alpha} - 1.
\end{aligned}$$

◄