## Δραστηριότητες σελ. 81 (Ενότητας)

**1.** Είναι για $\nu \in \mathbb{N}$ σταθεροποιημένο,

$$\sum_{k=1}^{\nu}(\kappa+3)^2=\sum_{k=1}^{\nu}(\kappa^2+6\kappa+9)=\sum_{k=1}^{\nu}\kappa^2+6\sum_{k=1}^{\nu}\kappa+9\sum_{k=1}^{\nu}1$$
$$=\frac{\nu(\nu+1)(2\nu+1)}{6}+6\frac{\nu(\nu+1)}{2}+9\nu$$
$$=\frac{1}{6}\nu\left[(\nu+1)(2\nu+1)+2\nu(\nu+1)+\frac{3}{2}\nu\right]=\frac{1}{6}\nu(2\nu^2+21\nu+73)$$

Το πιο πάνω δίνει:

$$\sum_{k=10}^{30}(\kappa+3)^2=\sum_{k=1}^{30}(\kappa+3)^2-\sum_{k=1}^{9}(\kappa+3)^2=\frac{1}{6}30(2\cdot 30^2+21\cdot 30+73)-\frac{1}{6}9(2\cdot 9^2+21\cdot 9+73)$$
$$=\mathbf{11879}$$

**2.** Έχουμε

$$1\cdot 2+2\cdot 3+\cdots+\nu(\nu+1)=\sum_{\kappa=1}^{\nu}\kappa(\kappa+1)=\sum_{\kappa=1}^{\nu}(\kappa^2+\kappa)=\sum_{\kappa=1}^{\nu}\kappa^2+\sum_{\kappa=1}^{\nu}\kappa$$
$$=\frac{\nu(\nu+1)(2\nu+1)}{6}+\frac{\nu(\nu+1)}{2}=\frac{\nu(\nu+1)}{2}\left(\frac{2\nu+1}{3}+1\right)$$
$$=\frac{\nu(\nu+1)}{2}\frac{2\nu+4}{3}=\boldsymbol{\nu(\nu+1)(\nu+2)}$$

**3.** Δες παράδειγμα 1(β)/σελ.77

**4.** Έχουμε:

$$\sum_{i=1}^{5}\left(\sum_{j=1}^{6}(2i+j)\right)=\sum_{i=1}^{5}\left(2\sum_{j=1}^{6}i+\sum_{j=1}^{6}j\right)=\sum_{i=1}^{5}\left(2i\sum_{j=1}^{6}1+\frac{6(6+1)}{2}\right)$$
$$=\sum_{i=1}^{5}(2i\cdot 6+21)=12\sum_{i=1}^{5}i+21\sum_{i=1}^{5}1$$
$$=12\frac{5(5+1)}{2}+21\cdot 5=\mathbf{285}$$

**5.** **(α)** Έχουμε

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\kappa(\kappa+2)}=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+2}\right)$$

Είναι
$$S_\nu=\sum_{\kappa=1}^{\nu}\frac{1}{\kappa(\kappa+2)}=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\nu}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+2}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(\left(1-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{6}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{\nu-3}-\frac{1}{\nu-1}\right)+\left(\frac{1}{\nu-2}-\frac{1}{\nu}\right)+\left(\frac{1}{\nu-1}-\frac{1}{\nu+1}\right)+\left(\frac{1}{\nu}-\frac{1}{\nu+2}\right)\right)=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{\nu+2}\right)$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to+\infty} S_\nu=\frac{1}{2}\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{3}{2}-\frac{1}{\nu+1}\right)=\frac{3}{4}$$

**(β)** Είναι

$$S_\nu=\sum_{\kappa=3}^{\nu}\frac{1}{(\kappa-2)(\kappa+2)}=\frac{1}{4}\sum_{k=3}^{\nu}\left(\frac{1}{k-2}-\frac{1}{k+2}\right)$$

$$=\frac{1}{4}\left(\left(1-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{6}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{7}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{8}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{9}\right)+\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{10}\right)+\left(\frac{1}{7}-\frac{1}{11}\right)\cdots+\left(\frac{1}{\nu-5}-\frac{1}{\nu-1}\right)+\left(\frac{1}{\nu-4}-\frac{1}{\nu}\right)+\left(\frac{1}{\nu-3}-\frac{1}{\nu+1}\right)+\left(\frac{1}{\nu-2}-\frac{1}{\nu+2}\right)\right)=\frac{1}{4}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\frac{1}{\nu+2}\right)$$

$$=\frac{1}{4}\left(\frac{25}{12}-\frac{1}{\nu+2}\right)$$

και αρα

$$\sum_{k=3}^{\infty}\frac{1}{(\kappa-2)(\kappa+2)}=\sum_{k=3}^{\infty}\left(\frac{1}{k-2}-\frac{1}{k+2}\right)=\lim_{x\to+\infty}S_\nu=\frac{1}{4}\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{25}{12}-\frac{1}{\nu+2}\right)=\frac{25}{48}$$

**(γ)** Έχουμε

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{3^{\kappa+1}}{7^\kappa}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{3^\kappa\cdot 3}{7^\kappa}=3\sum_{k=1}^{\infty}\frac{3^\kappa}{7^\kappa}=3\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{3}{7}\right)^\kappa$$

Η $\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{3}{7}\right)^\kappa$ είναι γεωμετρική σειρά (αφού $\left|\frac{3}{7}\right|<1$ η οποία συγκλίνει στον αριθμό $\frac{\frac{3}{7}}{1-\frac{3}{7}}=\frac{3}{4}$ και αρα

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{3^{\kappa+1}}{7^\kappa}=\frac{9}{4}$$

**(δ)** Έχουμε για $\nu\in\mathbb{N}$ σταθεροποιημένο

$$S_\nu=\sum_{\kappa=2}^{\nu}\frac{\kappa^2}{\kappa^2-1}=\sum_{\kappa=2}^{\nu}\left(1+\frac{1}{\kappa^2-1}\right)=\sum_{\kappa=2}^{\nu}\left(1+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\kappa-1}-\frac{1}{\kappa+1}\right)\right)=\sum_{\kappa=2}^{\nu}1+\frac{1}{2}\sum_{\kappa=2}^{\nu}\left(\frac{1}{\kappa-1}-\frac{1}{\kappa+1}\right)$$

Αλλά, $\sum_{\kappa=2}^{\nu}1=\nu-1$ και

$$\sum_{\kappa=2}^{\nu}\left(\frac{1}{\kappa-1}-\frac{1}{\kappa+1}\right)=\left(1-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{\nu-3}-\frac{1}{\nu-1}\right)+\left(\frac{1}{\nu-2}-\frac{1}{\nu}\right)+\left(\frac{1}{\nu-1}-\frac{1}{\nu}\right)=1-\frac{2}{\nu}$$

Τελικά $\boldsymbol{S_\nu=\sum_{\kappa=2}^{\nu}\frac{\kappa^2}{\kappa^2-1}=\nu-\frac{1}{2}-\frac{1}{\nu}}$ **και αρα η σειρά δε συγκλίνει.**

**6.** Είναι η άσκηση 2

**7.** Έχουμε

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{10}{\sum_{\kappa=1}^{\nu}\kappa}=\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{10}{\frac{\nu(\nu+1)}{2}}=\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{20}{\nu(\nu+1)}=20\sum_{\nu=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\nu}-\frac{1}{\nu+1}\right)$$

και αφού (κατα τα γνωστά)είναι $\sum_{\nu=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\nu}-\frac{1}{\nu+1}\right)=\lim_{\nu\to+\infty}\left(1-\frac{1}{\nu+1}\right)=1$ έπεται ότι $\boldsymbol{\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{10}{\sum_{\kappa=1}^{\nu}\kappa}=20}$.