ΓΡΑΠΤΗ ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗ Α΄ ΤΕΤΡΑΜΗΝΟΥ [26/01/2022]
[Γ ΛΥΚΕΙΟΥ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ]
-ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΛΥΣΕΙΣ-

(1) Τί μπορώ να γνωρίζω;
(2) Τί πρέπει να κάνω;
(3) Σε τί μπορώ να ελπίζω;

-- Ιμμάνουελ Κάντ (1724-1804) - *Κριτική του καθαρού Λόγου*

ΓΡΑΠΤΗ ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗ Α΄ ΤΕΤΡΑΜΗΝΟΥ 26/01/2022
[Γ ΛΥΚΕΙΟΥ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ]
-ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΛΥΣΕΙΣ-

Μέρος Α

Α1

Να βρείτε το ολοκλήρωμα:

$$\int \left(5x + e^{3x} + \text{ημ}2x\right)\, dx.$$

Απάντηση

$$\begin{aligned} \int \left(5x + e^{3x} + \text{ημ}2x\right)\, dx &= 5\int x\, dx + \int e^{3x}\, dx + \int \text{ημ}2x\, dx \\ &= 5 \cdot \frac{x^2}{2} + \frac{1}{3} \cdot e^{3x} - \frac{1}{2} \cdot \text{συν}2x + c \\ &= \frac{5x^2}{2} + \frac{e^{3x}}{3} - \frac{\text{συν}2x}{2} + c. \end{aligned}$$ ■

Α2

Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου ο οποίος έχει διάμετρο το ευθύγραμμο τμήμα AB, αν δίνονται τα σημεία $A(1, -5)$ και $B(9, 1)$.

Απάντηση

Το μήκος της ακτίνας του κύκλου είναι το μισό του μήκους της διαμέτρου AB :

$$\begin{aligned} (AB) &= \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_A - y_B)^2} = \sqrt{(1+5)^2 + (9-1)^2} \\ &= \sqrt{6^2 + 8^2} \;=\; \sqrt{36 + 64} \\ &= \sqrt{100} \;=\; 10. \end{aligned}$$

Άρα, $\boxed{R = 5}$.

Για να βρούμε τις συντεταγμένες του κέντρου K του κύκλου, αρκεί να βρούμε τις συντεταγμένες του μέσου του ευθυγράμμου τμήματος AB :

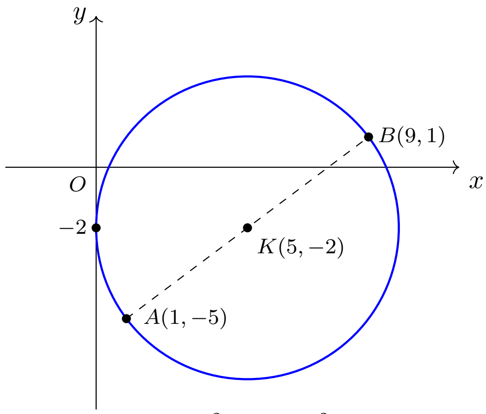
$$x_K = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{1+9}{2} = 5, \quad y_K = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{-5+1}{2} = -2.$$

Συνεπώς, ο κύκλος που ψάχνουμε έχει εξίσωση

$$(x-5)^2 + (y+2)^2 = 25,$$

ή αλλιώς

$$x^2 + y^2 - 10x + 4y + 4 = 0.$$



$(x-5)^2+(y+2)^2=25$

■

A3

(α΄) Να διατυπώσετε το Θεώρημα Μέσης Τιμής του Διαφορικού Λογισμού.

(β΄) Αν η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη (στο $\mathbb{R}$) και η γραφική της παράσταση διέρχεται από τα σημεία $A(-1,2)$ και $B(1,3)$, να δείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα σημείο $\Gamma(\xi, f(\xi))$ με $\xi\in(-1,1)$ στο οποίο η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f να είναι κάθετη στην ευθεία $(\epsilon):\ 2x+y-5=0$.

Απάντηση

(α΄) • **Θεώρημα Μέσης Τιμής του Διαφορικού Λογισμού (Lagrange)** • **Διατύπωση:**
Έστω f μια συνάρτηση συνεχής σε ένα (κλειστό) διάστημα $[a,b]$ και παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του, δηλαδή στο (a,b). Τότε, υπάρχει (αριθμός) $\xi\in(a,b)$ τέτοιος ώστε

$$f'(\xi)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

(β΄) Από τα δεδομένα του προβλήματος έχουμε: $f(-1)=2$ και $f(1)=3$. Αφού η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, τότε θα είναι συνεχής στο (κλειστό) διάστημα $[-1,1]$ και παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του, δηλαδή στο (ανοικτό) διάστημα $(-1,1)$. Εφαρμόζεται λοιπόν το Θεώρημα Μέσης Τιμής του Διαφορικού Λογισμού για την f στο διάστημα $[-1,1]$:

$$\exists\,\xi\in(-1,1)\ :\ f'(\xi)=\frac{\overbrace{f(1)}^{=3}-\overbrace{f(-1)}^{=2}}{1-(-1)}=\frac{1}{2}.$$

Αλλά, ο (παράγωγος) αριθμός $f'(\xi)$ είναι η κλίση $\lambda_{(\text{εφ.})}$ της εφαπτομένης (εφ.) της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $\Gamma(\xi, f(\xi))$.
Επίσης,

$$(\epsilon):\ 2x+y-5=0 \Leftrightarrow (\epsilon):\ y=5-2x$$

και άρα $\lambda_{(\epsilon)}=-2$. Τότε,

$$\lambda_{(\text{εφ.})}\cdot\lambda_{(\epsilon)}=\frac{1}{2}\cdot(-2)=-1\Rightarrow(\epsilon)\perp(\text{εφ.}).$$

■

A4

Να βρείτε τα ολοκληρώματα:

(α) $\displaystyle\int \text{εφ}^9 x \text{τεμ}^2 x\, dx$ και (β) $\displaystyle\int \frac{x}{(x+1)^2}\, dx$.

Απάντηση

Νάτα, τα **βρήκαμε**, εδώ είναι:

(α) $\displaystyle\int \text{εφ}^9 x \text{τεμ}^2 x\, dx$ και (β) $\displaystyle\int \frac{x}{(x+1)^2}\, dx$.

Ας σοβαρευτούμε. Θα **υπολογίσουμε** τα ολοκληρώματα:

(α) $\displaystyle\int \text{εφ}^9 x \text{τεμ}^2 x\, dx = \int \text{εφ}^9 x (\text{εφ}x)'\, dx$.
Θεωρούμε λοιπόν την αντικατάσταση

$$u = \text{εφ}x \Rightarrow du = \text{τεμ}^2 x\, dx$$

και τότε

$$\int \text{εφ}^9 \text{τεμ}^2 x\, dx = \int u^9\, du = \frac{u^{10}}{10} + c = \frac{\text{εφ}^{10} x}{10} + c.$$

(β) $\displaystyle\int \frac{x}{(x+1)^2}\, dx$.

Θεωρούμε την αντικατάσταση[1]

$$u = x+1 \Rightarrow x = u-1 \quad \text{και} \quad du = dx$$

και τότε

$$\begin{aligned}
\int \frac{x}{(x+1)^2}\, dx &= \int \frac{u-1}{u^2}\, du = \int \left(\frac{1}{u} - \frac{1}{u^2}\right) du \\
&= \int \frac{1}{u}\, du + \int \left(-\frac{1}{u^2}\right) du \\
&= \ln|u| + \frac{1}{u} + c \\
&= \ln|x+1| + \frac{1}{x+1} + c.
\end{aligned}$$

Εναλλακτικά,

$$\begin{aligned}
\int \frac{x}{(x+1)^2}\, dx &= \int \frac{x+1-1}{(x+1)^2}\, dx = \int \frac{x+1}{(x+1)^2}\, dx - \int \frac{1}{(x+1)^2}\, dx \\
&= \int \frac{1}{x+1}\, dx - \int \frac{1}{(x+1)^2}\, dx
\end{aligned}$$

και προχωράμε κατά τα γνωστά. ∎

[1] Πρόκειται για έναν **γραμμικό μετασχηματισμό** (τον $u = x+1$) όπως μπορεί να θυμηθεί κανείς από τη θεωρία.

A5

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο:

$$f(x) = \frac{\ln x}{x}.$$

(α) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα τοπικά ακρότατα.

(β) Χρησιμοποιώντας το ερώτημα (α), να συγκρίνετε τους αριθμούς 3^{π} και π^3.

Απάντηση

Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f είναι το διάστημα $(0, +\infty)$.

(α) Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο πεδίο ορισμού της. Συνεπώς, θα μελετήσουμε τη μονοτονία της και την ύπαρξη ακρότατων τιμών μέσω της παραγώγου:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(\ln x)' \cdot x - \ln x \cdot x'}{x^2} = \frac{\frac{1}{x} \cdot x - \ln x}{x^2} \\ &= \frac{1 - \ln x}{x^2} \quad (x > 0). \end{aligned}$$

Είναι $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 1 - \ln x = 0 \Leftrightarrow 1 = \ln x \Leftrightarrow x = e$.
Για $x \in (0, e)$ είναι $f'(x) > 0$ και άρα η f είναι **γνησίως αύξουσα** στο διάστημα αυτό και για $x \in (e, +\infty)$ είναι $f'(x) < 0$ και άρα η f είναι **γνησίως φθίνουσα** στο διάστημα αυτό.
Επιπλέον, αφού $f'(e) = 0$, από το **Κριτήριο Πρώτης Παραγώγου για τοπικά ακρότατα**, η f παρουσιάζει **τοπικό μέγιστο** στο $x = e$, το $f(e) = \frac{\ln e}{e} = \frac{1}{e}$, το οποίο όμως είναι και ολικό μέγιστο για τη συνάρτηση.

(β) Αφού $e < 3 < \pi$ και η συνάρτηση $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(e, +\infty)$, (από το ερώτημα (α)), έχουμε:

$$f(\pi) < f(3) \Rightarrow \frac{\ln \pi}{\pi} < \frac{\ln 3}{3} \Rightarrow 3 \ln \pi < \pi \ln 3 \Rightarrow \ln \pi^3 < \ln 3^{\pi}$$

και αφού η συνάρτηση $g(x) = \ln x$ είναι γνησίως αύξουσα, έχουμε ότι

$$\pi^3 < 3^{\pi}.$$

■

A6

Δίνεται η συνάρτηση g με τύπο:

$$g(x) = \text{τοξεφ}x, \quad x \in \mathbb{R}.$$

(α) Να μελετήσετε τη συνάρτηση g ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμπής.

(β) Να δείξετε ότι η εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από τα σημεία $A(-1, g(-1))$ και $B(0, g(0))$ είναι η $(\epsilon):\ y = \frac{\pi}{4}x$ και στη συνέχεια να δείξετε ότι

$$4\text{τοξεφ}x < \pi x, \quad \forall x \in (-1, 0).$$

Απάντηση

(α) Είναι

$$g'(x) = (\text{τοξεφ}x)' = \frac{1}{1+x^2} \;\Rightarrow\; g''(x) = -\frac{2x}{(1+x^2)^2}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Είναι $g''(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$.
Είναι: $\forall x < 0,\ g''(x) > 0$ και άρα η g είναι **κυρτή** στο διάστημα $(-\infty, 0)$
και
$\forall x > 0,\ g''(x) < 0$ και άρα η g είναι **κοίλη** στο διάστημα $(0, +\infty)$.
Επιπλέον, το σημείο $g(0, g(0)) = (0, \text{τοξεφ}0) = (0, 0)$ είναι **σημείο καμπής** της γραφικής παράστασης της g.

(β) Είναι

$$g(-1) = \arctan(-1) = -\frac{\pi}{4},$$

αφού $\text{εφ}(-\pi/4) = -1$.
Άρα $A(-1, -\pi/4)$ και $B(0,0)$.
Η κλίση της ευθείας που διέρχεται από τα σημεία A και B είναι

$$\lambda = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{\pi}{4}$$

και άρα η εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από τα σημεία A και B είναι

$$(\epsilon):\ y - y_A = \lambda(x - x_A) \Leftrightarrow (\epsilon):\ y - 0 = \frac{\pi}{4}(x - 0) \Leftrightarrow (\epsilon):\ y = \frac{\pi}{4}x.$$

Τώρα, αφού $g''(x) > 0,\ \forall x \in (-1, 0)$, η συνάρτηση g είναι κυρτή στο διάστημα $(-1, 0)$ και άρα

$$g(x) < \phi(x), \quad \forall x \in (-1, 0),$$

όπου $y = \phi(x)$ είναι η εξίσωση της ευθείας που ενώνει τα σημεία $A(-1, -\pi/4)$ και $B(0,0)$, η οποία όπως είδαμε πιο πάνω είναι η $y = \frac{\pi}{4}x$. Άρα, η πιο πάνω ανίσωση γράφεται:

$$\text{τοξεφ}x < \frac{\pi}{4}x, \quad \forall x \in (-1, 0),$$

δηλαδή

$$4\text{τοξεφ}x < \pi x, \quad \forall x \in (-1, 0).$$

■

-ΤΕΛΟΣ Α ΜΕΡΟΥΣ-

Μέρος Β

B1

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο:

$$f(x) = (x+1)e^{-x}.$$

Να βρείτε το πεδίο ορισμού της, τα σημεία τομής της με τους άξονες των συντεταγμένων, τα διαστήματα μονοτονίας, τα τοπικά ακρότατα, τις ασύμπτωτες της γραφικής της παράστασης και να την παραστήσετε γραφικά.

Απάντηση

• Εύρεση πεδίου ορισμού $D(f)$ της f :
Η συνάρτηση f είναι γινόμενο δύο συναρτήσεων με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$. Συνεπώς,

$$D(f) = \mathbb{R}.$$

• Εύρεση σημείων τομής με τους άξονες των συντεταγμένων:
$f(0) = (0+1)e^0 = 1$ και άρα το σημείο τομής με τον άξονα των τεταγμένων είναι το $(0,1)$.
$f(x) = 0 \Leftrightarrow x+1 = 0 \Leftrightarrow x = -1$ και άρα το σημείο τομής με τον άξονα των τετμημένων είναι το $(-1,0)$.

• Εύρεση διαστημάτων μονοτονίας και ακρότατων τιμών:
Η συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη στο πεδίο ορισμού της: για $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} f'(x) &= (x+1)'e^{-x} + (x+1)\left(e^{-x}\right)' \\ &= e^{-x} - (x+1)e^{-x} \\ &= -xe^{-x}. \end{aligned}$$

Συνεπώς, $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$. Το σημείο αυτό είναι **κρίσιμο σημείο** της f.
Κάνουμε τον πίνακα μεταβολών της f' :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
f'		$+$	0	$-$	
f		$\nearrow$	1	$\searrow$	

$\forall x \in (-\infty, 0) \Rightarrow f'(x) > 0 \Rightarrow f$ γνησίως αύξουσα,
$\forall x \in (0,1) \Rightarrow f'(x) < 0 \Rightarrow f$ γνησίως φθίνουσα. Αφού $f'(0) = 0$ και από το πιο πάνω, έπεται ότι στο σημείο $(0, f(0)) = (0,1)$ η γρ. παράσταση της f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο, το οποίο είναι μάλιστα και ολικό μέγιστο της συνάρτησης.

• Έλεγχος ύπαρξης ασυμπτώτων
Η συνάρτηση f είναι συνεχής.
Ελέγχουμε τη συμπεριφορά της f στα άκρα του πεδίου ορισμού της:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} xe^{-x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{e^x},$$

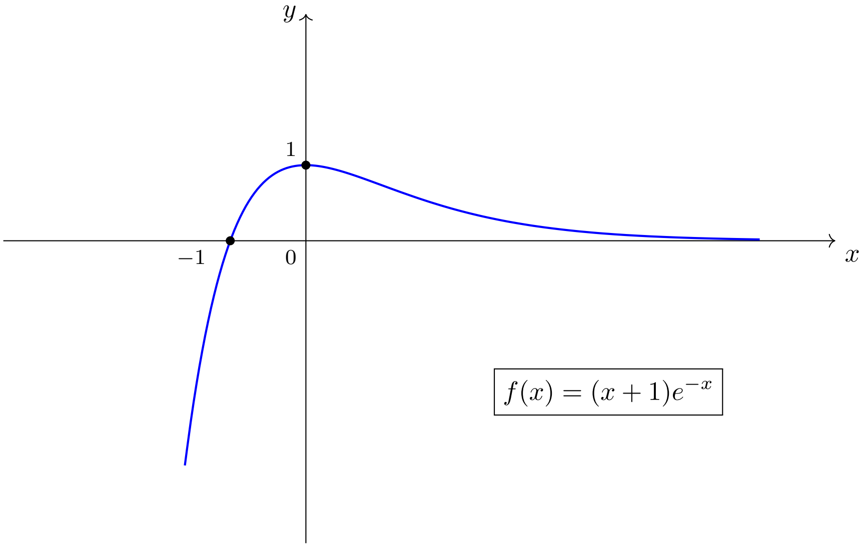
το οποίο είναι απροσδιόριστη μορφή τύπου $+\infty/+\infty$, αφού

$$\lim_{x\to+\infty} x = +\infty, \qquad \lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty.$$

Έχουμε:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{e^x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x'}{(e^x)'} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{e^x} = 0,$$

αφού
$$\lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty$$
και άρα, από κανόνα το De L Hopital,
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{e^x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x'}{(e^x)'} = 0$$
και συνεπώς, η ευθεία με εξίσωση $y = 0$, δηλαδή ο άξονας των x είναι οριζόντια ασύμπτωτη της γρ. παράστασης της f στο $+\infty$.
Τώρα,
$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} xe^{-x} = (-\infty)\cdot(+\infty) = -\infty.$$



■

B2

Δίνονται οι κύκλοι $C_1 : x^2 + y^2 + 2x - 2y + 1 = 0$ και $C_2 : x^2 + y^2 + 2x - 3 = 0$.

(α΄) Να δείξετε ότι οι δύο κύκλοι C_1 και C_2 εφάπτονται εσωτερικά.

(β΄) Να βρείτε την εξίσωση (ε) της εφαπτομένης του κύκλου C_2 που άγεται προς αυτόν από το σημείο $\Sigma(0, -2)$ και έχει θετική κλίση.

(γ΄) Η εφαπτομένη[α΄] (ε) τέμνει την κοινή εφαπτομένη των κύκλων C_1 και C_2 στο σημείο A. Να δείξετε ότι το σημείο A είναι το $A(3, 2)$ και να βρείτε τις δυνάμεις του σημείου A ως προς τους δύο κύκλους.

(δ΄) Αν το σημείο $T(-1 + 2\text{συν}\theta, 2\text{ημ}\theta)$ με $\theta \in [0, 2\pi)$ είναι τυχαίο σημείο του κύκλου C_2, να βρείτε την εξίσωση της καμπύλης στην οποία ανήκει ο γεωμετρικός τόπος του μέσου M του ευθύγραμμου τμήματος AT.

[α΄] Υποθέτω εδω πως γίνεται αναφορά στην εφαπτομένη (ε) του προηγούμενου ερωτήματος.

Απάντηση

(α΄) Για τον κύκλο C_1 :

$$2 = 2g_1 \Rightarrow g_1 = 1, \quad -2 = 2f_1 \Rightarrow f_1 = -1, \quad c_1 = 1$$

και άρα $K_1(-g_1, -f_1) = K_1(-1, 1)$ και $R_1 = \sqrt{g_1^2 + f_1^2 - c_1} = 1$.

Για τον κύκλο C_2 :

$$2 = 2g_2 \Rightarrow g_2 = 1, \quad -0 = 2f_2 \Rightarrow f_2 = 0, \quad c_2 = -3$$

και άρα $K_2(-g_2, -f_2) = K_2(-1, 0)$ και $R_2 = \sqrt{g_2^2 + f_2^2 - c_2} = \sqrt{4} = 2$.

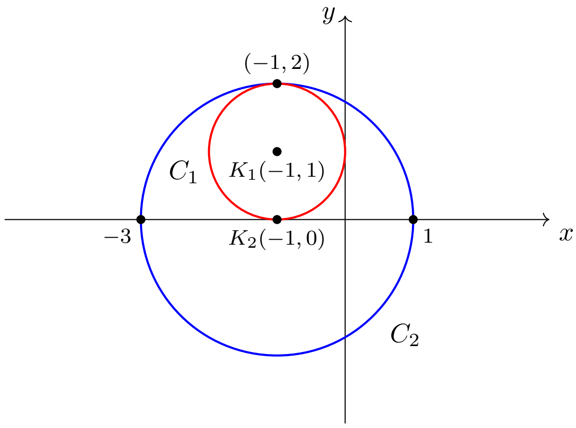
Αφαιρούμε κατά μέλη τις εξισώσεις των κύκλων C_1 και C_2 και βρίσκουμε:

$$-2y + 1 + 3 = 0 \Rightarrow y = 2$$

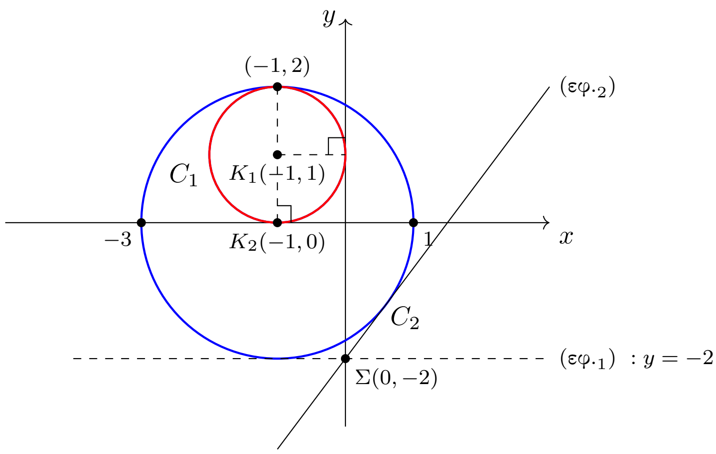
και αντικαθιστώντας την πιο πάνω τιμή π.χ. στον κύκλο C_1, βρίσκουμε $x = -1$. Άρα οι δύο κύκλοι τέμνονται σε ένα και μόνο σημείο, το $(-1, 2)$. Τώρα,

$$|R_1 - R_2| = |1 - 2| = |-1| = 1 < 3 = \delta$$

και άρα οι δύο κύκλοι τέμνονται εσωτερικά.
Στο σημείο αυτό, σοφό θα ήταν να κατασκευάζαμε ένα (πρόχειρο) σχήμα, με τη βοήθεια του διαβήτη:



(β΄) Συμπληρώνω τα νέα δεδομένα στο προηγούμενό μου σχήμα:



Βέβαια, επειδή έχουμε πλέον (ευελπιστώ) αφήσει πίσω μας προ πολλού τις παλιές εποχές όπου το σχήμα ήταν ο απόλυτος οδηγός για την αιτιολόγηση του συλλογισμού μας, θα πρέπει να βάλουμε τις συντεταγμένες του σημείου Σ στην εξίσωση του κύκλου C_2 και να διαπιστώσουμε ότι το αποτέλεσμα είναι αριθμός > 0, άρα το σημείο βρίσκεται έξωθεν του κύκλου C_2.
Από την κατασκευή του σχήματος, η μια εφαπτομένη που άγεται από το σημείο Σ στον κύκλο C_2 είναι η (εφ.$_1$) $: y = -2$ και αυτό θα διαφανεί από τις (αλγεβρικές) πράξεις στη συνέχεια.
Έστω $y = ax + b$ η εξίσωση της εφαπτομένης που άγεται από το σημείο $\Sigma(0, -2)$. Αντικαθιστούμε τις συντεταγμένες του σημείου αυτού στην εξίσωση της ευθείας: $-2 = b$ και άρα $y = ax - 2$.
Αντικαθιστούμε στην εξίσωση του κύκλου C_2 :

$$\begin{aligned} & x^2 + 2x + 1 + (ax-2)^2 - 3 = 0 \\ \Leftrightarrow\ & x^2 + 2x + a^2x^2 - 4ax + 4 - 3 = 0 \\ \Leftrightarrow\ & (1+a^2)x^2 + (2-4a)x + 1 = 0. \end{aligned}$$

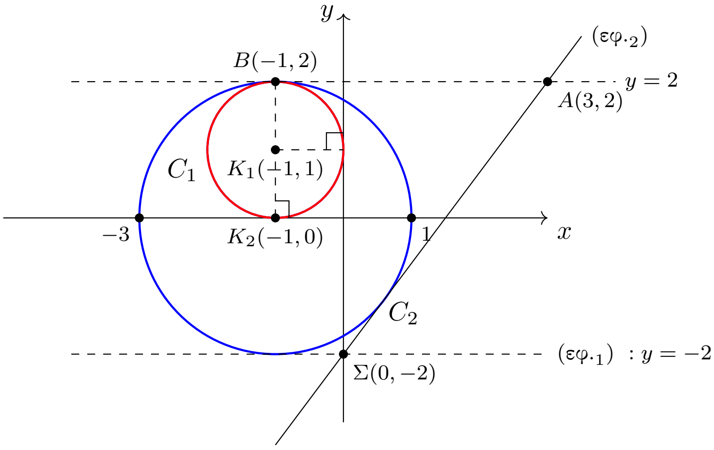
Για να έχει μοναδική λύση το πιο πάνω τριώνυμο (αφού θέλουμε ο κύκλος και η ευθεία να έχουν ένα σημείο επαφής) πρέπει και αρκεί η διακρίνουσά του να είναι ίση με 0:

$$\begin{aligned} \Delta = 0 \quad \Leftrightarrow\ & [2(1-2a)]^2 - 4(1+a^2)\cdot 1 = 0 \\ \Leftrightarrow\ & 4(1-4a+4a^2) - 4(1+a^2) = 0 \\ \Leftrightarrow\ & 1 - 4a + 4a^2 - (1+a^2) = 0 \\ \Leftrightarrow\ & 3a^2 - 4a = 0 \ \Leftrightarrow\ a(3a-4) = 0 \\ \Leftrightarrow\ & a = 0, \quad a = \frac{4}{3}. \end{aligned}$$

Άρα $a = \frac{4}{3}$ και τότε

$$(\text{εφ.}_2):\ y = \frac{4}{3}x - 2.$$

(γ΄) Συμπληρώνω το σχήμα με τα νέα δεδομένα:



Η κοινή εφαπτομένη έχει εξίσωση $y = 2$. Αντικαθιστώ $y = 2$ στην εξίσωση της εφαπτομένης που βρήκαμε πρίν:

$$2 = \frac{4}{3}x - 2 \Rightarrow x = 3$$

και άρα το σημείο τομής A έχει συντεταγμένες $x = 3$ και $y = 2$.
Τώρα θα βρούμε τις δυνάμεις του σημείου A ως προς τους δύο κύκλους.
Από το Πυθαγόρειο Θεώρημα στο τρίγωνο ABK_1, αφού $(AB) = 4$, βρίσκουμε

$(AK_1)=\sqrt{17}$ και $(AK_2)=\sqrt{20}$.
Τότε

$$\Delta_{C_1}(A)=(AK_1)^2-R_1^2=17-1=16$$

και

$$\Delta_{C_2}(A)=(AK_2)^2-R_2^2=20-4=16.$$

(δ΄) Έστω σημείο $T(-1+2\sigma\upsilon\nu\theta, 2\eta\mu\theta)$, $\theta\in[0,2\pi)$ του κύκλου C_2.. Τότε

$$x_M=\frac{x_A+x_T}{2}=\frac{3-1+2\sigma\upsilon\nu\theta}{2}=\frac{2+2\sigma\upsilon\nu\theta}{2}=1+\sigma\upsilon\nu\theta$$

και

$$y_M=\frac{y_A+y_T}{2}=\frac{2+2\eta\mu\theta}{2}=1+\eta\mu\theta.$$

Άρα,

$$\begin{cases} x_M=1+\sigma\upsilon\nu\theta \\ y_M=1+\eta\mu\theta \end{cases} \iff \begin{cases} x_M-1=\sigma\upsilon\nu\theta \\ y_M-1=\eta\mu\theta \end{cases} \iff \begin{cases} (x_M-1)^2=\sigma\upsilon\nu^2\theta \\ (y_M-1)^2=\eta\mu^2\theta \end{cases}$$

$$\iff \left\{ (x_M-1)^2+(y_M-1)^2=\sigma\upsilon\nu^2\theta+\eta\mu^2\theta=1 \right. .$$

Δηλαδή, ο γεωμετρικός τόπος του μέσου M του ευθύγραμμου τμήματος AT είναι κύκλος με κέντρο το σημείο $(1,1)$ και ακτίνα $R=1$. ■

B3

(α΄) Δείξτε ότι[α΄] για $x\in(0,\pi)$,

$$\int\sqrt{1-\sigma\upsilon\nu 2x}\,dx=-\sqrt{2}\sigma\upsilon\nu x+c.$$

(β΄) Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης $f:(0,\pi)\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει

$$f'(x)\eta\mu x-f(x)\sigma\upsilon\nu x=-\sqrt{2}\eta\mu^2 x\sqrt{1-\sigma\upsilon\nu 2x},\quad \forall x\in(0,\pi)$$

και της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από το σημείο $\left(\frac{\pi}{4},1\right)$.

(γ΄) Αν η πιο πάνω συνάρτηση f έχει τύπο $f(x)=\eta\mu 2x$, $x\in(0,\pi)$, να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου $P(x,y)$ της γραφικής παράστασης της f στο οποίο η κλίση της εφαπτομένης της είναι ελάχιστη.

[α΄] Φυσικά το c είναι μιά αυθαίρετη πραγματική σταθερά.

Απάντηση

(α΄) Αν θυμόμαστε ότι[2]

$$\eta\mu^2 x=\frac{1-\sigma\upsilon\nu 2x}{2}\Rightarrow 2\eta\mu^2 x=1-\sigma\upsilon\nu 2x,$$

[2] ...ότι το τυπολόγιο μας σώζει στα δύσκολα!

τότε τα πράγματα είναι απλά:

$$\begin{aligned}\int \sqrt{1-\sigmaυν 2x}\,dx &= \int \sqrt{2ημ^2 x}\,dx \;=\; \int \sqrt{2}\cdot|ημ^2 x|\,dx\\ &\quad (x\in(0,\pi)\Rightarrow ημx>0)\\ &= \sqrt{2}\int ημx\,dx \;=\; -\sqrt{2}συνx + c.\end{aligned}$$

(β′) Πρόκειται για ένα **πρόβλημα αρχικών τιμών:**

$$\begin{cases} f'(x)ημx - f(x)συνx = -\sqrt{2}ημ^2x\sqrt{1-συν2x}, & x\in(0,\pi)\\ \\ f(\pi/4)=1 \end{cases}.$$

(η **αρχική συνθήκη** είναι η $f(\pi/4)=1$).

Εδώ μπορεί κανείς να παρασυρθεί και να σκεφτεί αυτό:

$$(f(x)ημx)' = f'(x)ημx + f(x)συνx$$

και φυσικά να την πατήσει, αφού το πρόσημο μεταξύ του $f'(x)ημx$ και του $f(x)συνx$ είναι πλήν και όχι σύν. Αν όμως **σκεφτεί κανείς πονηρά**, παρατηρά ότι το δεύτερο μέλος είναι το αποτέλεσμα του ολοκληρώματος στο προηγούμενο ερώτημα επί το $ημ^2x$. Συνεπώς, διαιρώντας με το $ημ^2x>0$,

$$\begin{aligned} & f'(x)\frac{ημx}{ημ^2x} - f(x)\frac{συνx}{ημ^2x} = -\sqrt{2}\sqrt{1-συν2x}\\ \Rightarrow\;& f'(x)στεμx - f(x)σφxστεμx = -\sqrt{2}\sqrt{1-συν2x}\\ & ((στεμx)' = -σφx\cdot στεμx)\\ \Rightarrow\;& (f(x)στεμx)' = -\sqrt{2}\sqrt{1-συν2x}\\ \Rightarrow\;& \int (f(x)στεμx)'\,dx = -\sqrt{2}\int\sqrt{1-συν2x}\,dx\\ \overset{(α)}{\Rightarrow}\;& f(x)στεμx = -\sqrt{2}\cdot(-\sqrt{2}συνx)+c\\ \Rightarrow\;& f(x)\cdot\frac{1}{ημx} = 2συνx + c\\ \Rightarrow\;& f(x) = 2συνxημx + cημx = ημ2x + cημx. \end{aligned}$$

Χρησιμοποιούμε την αρχική συνθήκη $f(\pi/4)=1:$

$$1 = ημ(\pi/2) + cημ(\pi/4) \Rightarrow 1 = 1 + c\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow c = 0$$

και έτσι

$$\boxed{f(x) = ημ2x,\quad \forall x\in(0,\pi)}\,.$$

(γ΄) Η κλίση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x) = \text{ημ}2x,\ \ \forall x \in (0, \pi)$ στο τυχόν σημείο της (x, y) είναι

$$f'(x) = 2\text{συν}2x, \quad \forall x \in (0, \pi).$$

Ξέρουμε ότι η συνάρτηση συνημίτονο ελαχιστοποιείται όταν το όρισμά της είναι πολλαπλάσιο του π. Εδώ το όρισμά της είναι το $2x$ και άρα η συνάρτηση $g(x) = \text{συν}2x$ ελαχιστοποιείται όταν το όρισμά της είναι πολλαπλάσιο του $\pi/2$ και αφού είμαστε στο διάστημα $(0, \pi)$, η μοναδική τιμή του x που αυτό γίνεται είναι το $x = \pi/2$.
Τότε, το σημείο που ψάχνουμε είναι το

$$P\left(\frac{\pi}{2}, f'\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) = P\left(\frac{\pi}{2}, -2\right).$$

■

-ΤΕΛΟΣ Β ΜΕΡΟΥΣ-