ΣΤΟΙΧΕΙΑ **ΘΕΩΡΙΑΣ**
Γ ΛΥΚΕΙΟΥ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ
2021 – 2022[1]

[1]Βασισμένο στην επίσημη (αναθεωρημένη) ύλη των Παγκυπρίων εξετάσεων

'Είναι, ομολογώ, απλή φαντασία.
Αλλά πόσο συχνά η φαντασία είναι η μητέρα της αλήθειας;'

— Sir Arthur Conan Doyle, The Valley of Fear

Ενότητα Ι -Εφαρμογές του Διαφορικού Λογισμού

• Υπενθύμιση: **Θεώρημα του Bolzano** •
Έστω f μια συνάρτηση συνεχής σε ένα (κλειστό και φραγμένο) διάστημα $[\alpha, \beta]$. Τότε, αν $f(\alpha) \cdot f(\beta) < 0$, υπάρχει (τουλάχιστον) ένα $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε $f(\xi) = 0$.

3. και 4. Θεώρημα Rolle/Θεώρημα Μέσης Τιμής του Διαφορικού Λογισμού.
Διατύπωση, γεωμετρική ερμηνεία

• Θεώρημα του Rolle •
Διατύπωση:
Έστω f μια συνάρτηση συνεχής σε ένα (κλειστό) διάστημα $[a, \beta]$ και παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του, δηλαδή στο (a, β) και τέτοια ώστε $f(a) = f(\beta)$. Τότε, υπάρχει $\xi \in (a, \beta)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi) = 0$.
Γεωμετρική ερμηνεία:
Αν για τη συνάρτηση $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ ικανοποιούνται οι υποθέσεις του Θεωρήματος του Rolle, τότε υπάρχει τουλάχιστον ένας αριθμός $\xi \in (a, \beta)$ για τον οποίο η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $(\xi, f(\xi))$ είναι παράλληλη με τον άξονα των τετμημένων ή να ταυτίζεται με αυτόν. (Τεύχος Α-σελ. 18)

• Θεώρημα Μέσης Τιμής του Διαφορικού Λογισμού (Lagrange) •
Διατύπωση:
Έστω f μια συνάρτηση συνεχής σε ένα (κλειστό) διάστημα $[a, b]$ και παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του, δηλαδή στο (a, b). Τότε, υπάρχει (αριθμός) $\xi \in (a, b)$ τέτοιος ώστε

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Γεωμετρική ερμηνεία:
Αν για τη συνάρτηση $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ ικανοποιούνται οι υποθέσεις του Θεωρήματος Μέσης Τιμής του Διαφορικού Λογισμού, τότε υπάρχει τουλάχιστον ένας αριθμός $\xi \in (a, \beta)$ για τον οποίο η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $(\xi, f(\xi))$ είναι παράλληλη με την ευθεία που διέρχεται από τα σημεία $(a, f(a))$ και $(b, f(b))$. (Τεύχος Α-σελ. 24)

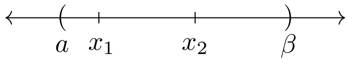
• Πόρισμα •
Έστω f μια συνάρτηση παραγωγίσιμη σε ένα ανοικτό διάστημα (a, β) τέτοια ώστε $f'(x) = 0, \forall x \in (a, \beta)$. Τότε, υπάρχει πραγματική σταθερά c τέτοια ώστε $f(x) = c, \forall x \in (a, \beta)$. Δηλαδή η συνάρτηση f είναι σταθερή[α΄] στο (a, β).

[α΄] Μια συνάρτηση $f : A \to \mathbb{R}$ είναι σταθερή αν και μόνο αν $f(x_1) = f(x_2)$ για κάθε $x_1, x_2 \in A$.

Απόδειξη. Έστω $x_1, x_2 \in (a, \beta)$ με $x_1 < x_2$. Αφού η f είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα (a, β), έπεται ότι θα είναι συνεχής στο $[x_1, x_2]$ και παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του, δηλαδή στο διάστημα (x_1, x_2). Συνεπώς, από το ΘΜΤΔΛ, υπάρχει $\xi \in (x_1, x_2)$ τέτοιο ώστε

$$f'(\xi) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = 0,$$

από υπόθεση και άρα $f(x_2) = f(x_1)$. Αφού τα x_1, x_2 είναι τυχόντα, η f είναι σταθερή συνάρτηση.



• Πόρισμα •
Έστω f, g συναρτήσεις παραγωγίσιμες σε ένα ανοικτό διάστημα (a, β) τέτοιες ώστε $f'(x) = 0$, $\forall x \in (a, \beta)$ και $g'(x) = 0$, $\forall x \in (a, \beta)$. Τότε, υπάρχει πραγματική σταθερά c τέτοια ώστε $f(x) = g(x) + c$, $\forall x \in (a, \beta)$. Δηλαδή οι συναρτήσεις f και g διαφέρουν (στο (a, β)) κατά μια (πραγματική) σταθερά.

5. Ορισμοί (Μονοτονία Συνάρτησης): Γνησίως Αύξουσα, Αύξουσα, Γνησίως Φθίνουσα, Φθίνουσα, Σταθερή, Γνησίως Μονότονη και Μονότονη συνάρτηση.

• Ορισμός (Μονοτονία Συνάρτησης) (Τεύχος Α-σελ. 31,33)
Μια συνάρτηση $f : A \to \mathbb{R}$ λέγεται:

(i) **αύξουσα** στο $\Delta \subseteq A$ $(\Delta \neq \emptyset)$ αν $\forall x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ ισχύει $f(x_1) \leq f(x_2)$,

(ii) **φθίνουσα** στο $\Delta \subseteq A$ $(\Delta \neq \emptyset)$ αν $\forall x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ ισχύει $f(x_1) \geq f(x_2)$,

(iii) **γνησίως αύξουσα** στο $\Delta \subseteq A$ $(\Delta \neq \emptyset)$ αν $\forall x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 \leq x_2$ ισχύει $f(x_1) < f(x_2)$,

(iv) **γνησίως φθίνουσα** στο $\Delta \subseteq A$ $(\Delta \neq \emptyset)$ αν $\forall x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ ισχύει $f(x_2) < f(x_1)$.

(v) **σταθερή** στο $\Delta \subseteq A$ $(\Delta \neq \emptyset)$ αν $\forall x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ ισχύει $f(x_1) = f(x_2)$,

(vi) **μονότονη** στο $\Delta \subseteq A$ $(\Delta \neq \emptyset)$ αν είναι είτε αύξουσα είτε φθίνουσα και **γνησίως μονότονη** στο $\Delta \subseteq A$ $(\Delta \neq \emptyset)$ αν είναι είτε γνησίως αύξουσα είτε γνησίως φθίνουσα.

6. Ορισμοί (Ακρότατα Συνάρτησης): Τοπικά μέγιστη τιμή συνάρτησης, Τοπικά ελάχιστη τιμή συνάρτησης, Ολικά μέγιστη τιμή και Ολικά ελάχιστη τιμή συνάρτησης.

• Ορισμός (Ολικά Ακρότατα Συνάρτησης) (Τεύχος Α-σελ. 38)
Έστω συνάρτηση $f : A \to \mathbb{R}$. Θα λέμε ότι:

(i) Η συνάρτηση f παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ **ολικό μέγιστο**, το $f(x_0)$, όταν

$$f(x) \leq f(x_0), \quad \forall x \in A,$$

(ii) Η συνάρτηση f παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ **ολικό ελάχιστο**, το $f(x_0)$, όταν

$$f(x) \geq f(x_0), \quad \forall x \in A.$$

Το ολικό ελάχιστο και το ολικό μέγιστο της f ονομάζονται **ολικά ακρότατα** (της f).

• **Ορισμός** (Τοπικά Ακρότατα Συνάρτησης) (Τεύχος Α-σελ. 40)
Έστω συνάρτηση $f : A \to \mathbb{R}$. Θα λέμε ότι:

(i) Η συνάρτηση f παρουσιάζει **τοπικό μέγιστο** στο $x_0 \in A$, όταν υπάρχει $\delta > 0$, τέτοιο ώστε να ισχύει

$$f(x_0) \geq f(x), \quad \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap A.$$

Το x_0 λέγεται **θέση (ή σημείο) τοπικού μεγίστου**, ενώ το $f(x_0)$ **τοπικό μέγιστο** της f.

(ii) Η συνάρτηση f παρουσιάζει **τοπικό ελάχιστο** στο $x_0 \in A$, όταν υπάρχει $\delta > 0$, τέτοιο ώστε να ισχύει

$$f(x_0) \leq f(x), \quad \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap A.$$

Το x_0 λέγεται **θέση (ή σημείο) τοπικού ελαχίστου**, ενώ το $f(x_0)$ **τοπικό ελάχιστο** της f.

Τα τοπικά ελάχιστα και τοπικά μέγιστα (μπορεί να υπάρξουν περισσότερα του ενός) της συνάρτησης f είναι τα τοπικά ακρότατά της.

7. Θεωρήματα μονοτονίας συνάρτησης (Κριτήρια Μονοτονίας). Γνησίως αύξουσα, Αύξουσα, Γνησίως φθίνουσα, Φθίνουσα, Σταθερή συνάρτηση. Διατύπωση, απόδειξη και εφαρμογή τους στην επίλυση προβλήματος.

• **Θεώρημα** (Κριτήριο Μονοτονίας) (Τεύχος Α-σελ. 45)
Έστω συνάρτηση $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ συνεχής και παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του πεδίου ορισμού της (δηλαδή στο (a, b)). Τότε, ισχύουν τα ακόλουθα:

(i) Αν $f'(x) > 0,\ \forall x \in [a, b]$, τότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[a, b]$.

(ii) Αν $f'(x) \geq 0,\ \forall x \in [a, b]$, τότε η f είναι αύξουσα στο $[a, b]$.

(iii) Αν $f'(x) < 0,\ \forall x \in [a, b]$, τότε η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[a, b]$.

(iv) Αν $f'(x) \leq 0,\ \forall x \in [a, b]$, τότε η f είναι φθίνουσα στο $[a, b]$.

Υπενθυμίζεται ότι αν $f'(x) = 0,\ \forall x \in (a, b)$, τότε η f είναι σταθερή συνάρτηση (στο (a, b)) και αφού υποθέτουμε τη συνέχεια της f σε όλο το διάστημα $[a, b]$, έπεται ότι $f(a) = f(b)$ και αρα η f είναι σταθερή στο $[a, b]$.

Απόδειξη. Δίνεται απόδειξη μόνο για το (i). Τα υπόλοιπα αποδεικνύονται ομοίως.

Έστω $x_1, x_2 \in (a, b)$ **τυχαία** με $x_1 < x_2$.
Πληρούνται οι υποθέσεις του Θεωρήματος μέσης τιμής του Διαφορικού Λογισμού για την f στο διάστημα $[x_1, x_2]$:

$$\exists\ \xi \in (x_1, x_2)\ :\ f'(\xi) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}.$$

Από υπόθεση, είναι $f'(\xi) > 0$. Συνεπώς, η πιο πάνω δίνει

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} > 0.$$

Αλλά, $x_1 < x_2 \Rightarrow x_2 - x_1$ και αρα $f(x_2) - f(x_1) > 0$, δηλαδή $f(x_2) > f(x_1)$.
Αφού τα x_1 και x_2 ήταν τυχαία, έχουμε ότι $f(y) > f(x)$ **για κάθε** ζεύγος σημείων $x, y \in (a, b)$ με

$x < y$. Άρα, f γνησίως αύξουσα στο διάστημα (a, b).
Όμως, λόγω της συνέχειας της f στα άκρα του διαστήματος $[a, b]$, έπεται ότι η f είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το διάστημα $[a, b]$. $\square$

8. Θεώρημα του Fermat. Διατύπωση, απόδειξη, γεωμετρική ερμηνεία και εφαρμογή του στην επίλυση προβλήματος.

• **Θεώρημα** του Fermat • (Τεύχος Α-σελ. 47)
Έστω συνάρτηση $f : \Delta \to \mathbb{R}$, όπου $\Delta \subseteq \mathbb{R}$ **διάστημα** και έστω x_0 εσωτερικό σημείο του Δ. **Αν** η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο x_0 **και** είναι παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό, τότε

$$f'(x_0) = 0.$$

Απόδειξη. (Δίνεται η απόδειξη που υπάρχει στο Τεύχος Α-σελ. 47)
Έστω ότι η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο x_0. Αφού το x_0 είναι εσωτερικό σημείο του Δ και η η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο σημείο αυτό, τότε υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε το διάστημα $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ περιέχεται στο Δ, δηλαδή $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subseteq \Delta$ και

$$f(x_0) \geq f(x), \quad \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta).$$

Επειδή όμως η f είναι παραγωγίσιμη στο σημείο x_0, τότε

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Αν $x \in (x_0 - \delta, x_0)$, τότε $f(x) - f(x_0) \leq 0$ και άρα αφού $x - x_0 < 0$,

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0,$$

οπόταν

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0.$$

Αν $x \in (x_0, x_0 - \delta)$, τότε $f(x) - f(x_0) \leq 0$ και άρα αφού $x - x_0 > 0$,

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0,$$

οπόταν

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0.$$

Άρα,

$$\begin{cases} f'(x_0) \leq 0 \\ f'(x_0) \geq 0 \end{cases} \implies f'(x_0) = 0.$$

Ομοίως η περίπτωση που η f παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στο x_0. $\square$

Γεωμετρική Ερμηνεία του Θεωρήματος του Fermat.
Το Θεώρημα του Fermat δηλώνει ότι η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $(x_0, f(x_0))$ είναι παράλληλη προς τον άξονα των τετμημένων (τον άξονα $x'x$).

9. Θεώρημα (Κριτήριο Πρώτης Παραγώγου για τοπικά ακρότατα). Διατύπωση και εφαρμογή του στην επίλυση προβλήματος.

> • **Θεώρημα** (Κριτήριο Πρώτης Παραγώγου για τοπικά ακρότατα) (Τεύχος Α-σελ. 51)
> Έστω **συνεχής** συνάρτηση $f : A \to \mathbb{R}$, όπου $A \subseteq \mathbb{R}$ **διάστημα** και x_0 σημείο του A. Έστω ότι η f είναι παραγωγίσιμη σε κάθε ένα από τα διαστήματα $(x_0 - \delta, x_0)$ και $(x_0, x_0 + \delta)$, όπου $\delta > 0$. Τότε:
>
> (i) Αν $f'(x) > 0,\ \forall x \in (x_0 - \delta, x_0)$ και $f'(x) < 0,\ \forall x \in (x_0, x_0 + \delta)$, τότε η f παρουσιάζει **τοπικό μέγιστο** στο σημείο $x = x_0$.
>
> (ii) Αν $f'(x) < 0,\ \forall x \in (x_0 - \delta, x_0)$ και $f'(x) > 0,\ \forall x \in (x_0, x_0 + \delta)$, τότε η f παρουσιάζει **τοπικό ελάχιστο** στο σημείο $x = x_0$.
>
> (iii) Αν η f' διατηρεί σταθερό το πρόσημό της στην ένωση των διαστημάτων $(x_0 - \delta, x_0)$ και $(x_0, x_0 + \delta)$, τότε η f είναι γνησίως μονότονη στο διάστημα $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ και στο σημείο $x = x_0$ η f **δεν παρουσιάζει τοπικό ακρότατο**.

10. Θεώρημα (Κριτήριο Δεύτερης Παραγώγου για τοπικά ακρότατα). Διατύπωση, απόδειξη και εφαρμογή του στην επίλυση προβλήματος.

> • **Θεώρημα** (Κριτήριο Δεύτερης Παραγώγου για τοπικά ακρότατα) (Τεύχος Α-σελ. 52)
> Έστω $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ $(a < b)$ παραγωγίσιμη συνάρτηση και $x_0 \in (a, b)$ τέτοιο ώστε $f'(x_0) = 0$. Έστω ότι υπάρχει ο (αριθμός) $f''(x_0)$. Τότε:
>
> (i) Αν $f''(x_0) > 0$, η f παρουσιάζει **τοπικό ελάχιστο στο** $x = x_0$.
>
> (ii) Αν $f''(x_0) < 0$, η f παρουσιάζει **τοπικό μέγιστο στο** $x = x_0$.

Απόδειξη. Έστω ότι $f''(x_0) > 0$. Από τον ορισμό του παράγωγου αριθμού,

$$f''(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x) - \overbrace{f'(x_0)}^{=0}}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{x - x_0}$$

και άρα

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{x - x_0} > 0.$$

Τότε[2] υπάρχει ανοικτή περιοχή $\pi(x_0)$ του σημείου x_0 έστω $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ $(\delta > 0)$ η οποία περιέχεται στο (a, b) με

$$\frac{f'(x)}{x - x_0} > 0, \quad \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) - \{x_0\}.$$

(αφαιρούμε το x_0 διότι η περιοχή είναι τρύπια).
Τότε, αν $x \in (x_0 - \delta, x_0) \Rightarrow f'(x) < 0$ και άρα από το **κριτήριο Μονοτονίας**, η f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(x_0 - \delta, x_0)$ (και λόγω συνέχειας της f στο σημείο $x = x_0$ έχουμε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(x_0 - \delta, x_0]$) και αν $x \in (x_0, x_0 + \delta) \Rightarrow f'(x) > 0$ και άρα από το **κριτήριο Μονοτονίας**, η f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(x_0, x_0 + \delta)$ (και λόγω συνέχειας

[2] Ξέρουμε ότι αν $\lim_{x \to x_0} f(x) > 0$,, τότε υπάρχει (ανοικτή) τρύπια περιοχή $\pi(x_0)$ του x_0 τέτοια ώστε οι τιμές της f να είναι > 0 στην περιοχή αυτή, δηλαδή

$$f(x) > 0,\ \forall x \in \pi(x_0).$$

της f στο σημείο $x = x_0$ έχουμε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[x_0, x_0 + \delta))$.
Συνεπώς, από το **κριτήριο Πρώτης Παραγώγου**, η f παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στο σημείο $x = x_0$.
Ομοίως αποδεικνύεται και το αντίστοιχο αποτέλεσμα στην περίπτωση που $f''(x_0) < 0$. □

11. Ορισμός κυρτής – κοίλης συνάρτησης. Γεωμετρική ερμηνεία.

• **Ορισμός** (κυρτή συνάρτηση) (Τεύχος Α-σελ. 62)
Μια **συνεχής** συνάρτηση $f : \Delta \to \mathbb{R}$ στο Δ, όπου $\Delta \subseteq \mathbb{R}$ διάστημα, λέγεται **κυρτή** (στο Δ) αν για κάθε $x_1, x_2 \in \Delta$ ισχύει

$$\phi(\xi) \geq f(\xi), \quad \forall \xi \in (x_1, x_2),$$

όπου $y = \phi(x)$ είναι η εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από τα σημεία $A(x_1, f(x_1))$ και $B(x_2, f(x_2))$ του γραφήματος της f.

• **Ορισμός** (κοίλη συνάρτηση)
Μια **συνεχής** συνάρτηση $f : \Delta \to \mathbb{R}$ στο Δ, όπου $\Delta \subseteq \mathbb{R}$ διάστημα, λέγεται **κοίλη** (στο Δ) αν για κάθε $x_1, x_2 \in \Delta$ ισχύει

$$\phi(\xi) \leq f(\xi), \quad \forall \xi \in (x_1, x_2),$$

όπου $y = \phi(x)$ είναι η εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από τα σημεία $A(x_1, f(x_1))$ και $B(x_2, f(x_2))$ του γραφήματος της f.

Γεωμετρική ερμηνεία: Μια συνεχής συνάρτηση f είναι κυρτή (αντίστοιχα κοίλη) στο διάστημα Δ, αν για κάθε δύο σημεία $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$, η γραφική παράσταση της συνάρτησης στο διάστημα $[x_1, x_2]$ δεν έχει κανένα σημείο του πάνω (αντίστοιχα κάτω) από το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει τα σημεία $(x_1, f(x_1))$ και $(x_2, f(x_2))$ του γραφήματός της.

• **Ορισμός**[α΄] (Τεύχος Α-σελ. 63)
Έστω συνάρτηση f συνεχής στο διάστημα Δ και παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του. Λέμε ότι:

(i) Η f είναι **κυρτή** ή ότι **στρέφει τα κοίλα προς τα πάνω** (στο Δ) αν είναι αύξουσα στο εσωτερικό του Δ.

(ii) Η f είναι **κοίλη** ή ότι **στρέφει τα κοίλα προς τα κάτω** (στο Δ) αν είναι φθίνουσα στο εσωτερικό του Δ.

[α΄] Σημείωση: Μάλλον, εκ παραδρομής, στη σελ. 63 του σχολικού Α τεύχους, αντί η λέξη 'Ορισμός' μπήκε η λέξη 'Θεώρημα'.

12. Θεώρημα (Κριτήριο για την κυρτότητα συνάρτησης με τη βοήθεια της δεύτερης παραγώγου). Διατύπωση και εφαρμογή του στην επίλυση προβλήματος.

• **Θεώρημα** (Κριτήριο για την κυρτότητα συνάρτησης με τη βοήθεια της δεύτερης παραγώγου) (Τεύχος Α-σελ. 65)
Έστω συνάρτηση f συνεχής στο διάστημα Δ και παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του. Τότε:

(i) Ικανή και αναγκαία συνθήκη για να είναι η f κυρτή στο Δ είναι η $f''(x) \geq 0$, για κάθε x στο εσωτερικό του Δ.

(ii) Ικανή και αναγκαία συνθήκη για να είναι η f κοίλη στο Δ είναι η $f''(x) \leq 0$, για κάθε x στο εσωτερικό του Δ.

13. Ορισμός σημείου καμπής και εφαρμογή του στην επίλυση προβλήματος.

> • **Ορισμός** (Τεύχος Α-σελ. 66)
> Έστω συνάρτηση $f : \Delta \to \mathbb{R}$, όπου Δ διάστημα και $x_0 \in \Delta$.
> Το σημείο $A(x_0, f(x_0))$ της γραφικής παράστασης της f λέγεται **σημείο καμπής** (της γραφικής παράστασης της f), αν ισχύουν τα πιο κάτω:
>
> (i) η f είναι συνεχής στο σημείο $x = x_0$,
>
> (ii) αν υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε η f είναι κοίλη στο διάστημα $(x_0 - \delta, x_0)$ και κυρτή στο διάστημα $(x_0, x_0 + \delta)$ ή αντιστρόφως,
>
> (iii) σν η γραφική παράσταση της f έχει εφαπτομένη στο σημείο της A.

Αν σε ένα σημείο καμπής $A(x_0, f(x_0))$ της γραφικής παράστασης της f υπάρχει ο $f''(x_0)$, τότε $f''(x_0) = 0$.

14. Θεώρημα (Κριτήριο Δεύτερης Παραγώγου για την εύρεση των σημείων καμπής συνάρτησης). Εφαρμογή του στην επίλυση προβλήματος.

> • **Θεώρημα** (Τεύχος Α-σελ. 68)
> Αν η γραφική παράσταση της συνάρτησης f παρουσιάζει σημείο καμπής στο σημείο $x = x_0$, είναι παραγωγίσιμη σε κάποια ανοικτή περιοχή του σημείου $x = x_0$ και υπάρχει ο $f''(x_0)$, τότε
>
> $$f''(x_0) = 0.$$

15. Ορισμός της Κατακόρυφης, Οριζόντιας και της Πλάγιας ασύμπτωτης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $y = f(x)$. Διατύπωση και εφαρμογή τους στην επίλυση προβλήματος.

> **Ορισμοί** (Ασύμπτωτες συνάρτησης) (Τεύχος Α-75)
>
> **(i)** Δίνεται η συνάρτηση $f : A \to \mathbb{R}$ και σημείο $x_0 \in A$ τέτοιο ώστε για κάθε (ανοικτή) περιοχή του $\pi(x_0)$ ισχύει ότι $\pi(x_0) \cap (A - \{x_0\}) \neq \emptyset$.
> Αν τουλάχιστον ένα από τα όρια $\lim\limits_{x \to x_0 -} f(x)$ και $\lim\limits_{x \to x_0 +} f(x)$ είναι είτε $+\infty$ είτε $-\infty$, τότε η ευθεία με $x = x_0$ λέγεται **κατακόρυφη ασύμπτωτη** της γραφικής παράστασης της f.
>
> **(ii)** Δίνεται η συνάρτηση $f : A \to \mathbb{R}$ όπου το A περιέχει ένα τουλάχιστον διάστημα της μορφής $(a, +\infty)$ ή διάστημα της μορφής $(-\infty, a)$, $a \in \mathbb{R}$.
> Τότε:
>
> **(α')** Αν $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = b \in \mathbb{R}$ (αντιστοίχως $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = b \in \mathbb{R}$), τότε η ευθεία $y = b$ λέγεται **οριζόντια ασύμπτωτη** της γραφικής παράστασης της f στο $+\infty$ (αντιστοίχως στο $-\infty$).
>
> **(β')** Η ευθεία με εξίσωση $y = \lambda x + b$, όπου $\lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$, λέγεται **πλάγια ασύμπτωτη** της γραφικής παράστασης της f στο $+\infty$ (αντιστοίχως στο $-\infty$) όταν $\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) - (\lambda x + b)] = 0$ (αντιστοίχως $\lim\limits_{x \to -\infty} [f(x) - (\lambda x + b)] = 0$).

16. Θεώρημα της Πλάγιας ασύμπτωτης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $y = f(x)$. Διατύπωση και εφαρμογή του στην επίλυση προβλήματος.

Θεώρημα (Τεύχος Α-77)
Η ευθεία με εξίσωση $y = \lambda x + b$ είναι πλάγια ασύμπτωτη του γραφήματος της συνάρτησης f στο $+\infty$ (αντιστοίχως στο $-\infty$) αν και μόνο αν

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = a \in \mathbb{R} \quad \textbf{και} \quad \lim_{x\to+\infty} [f(x) - ax] = b \in \mathbb{R},$$

αντιστοίχως

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = a \in \mathbb{R} \quad \textbf{και} \quad \lim_{x\to-\infty} [f(x) - ax] = b \in \mathbb{R}.$$