Προτεινόμενη λύση Άσκησης 5 (διορίσιμοι 2021)

(α) Έστω Ω ο δειγματικός χώρος του πειράματος ρίψη νομίσματος n φορές. Κάθε στοιχείο του Ω είναι μια διατεταγμένη $n-$άδα $(a_1, a_2, \dots, a_n)$, όπου κάθε $a_i \in \{K, \Gamma\}$. Τότε,

$$N(\Omega) = 2^n.$$

Θεωρούμε το ενδεχόμενο A_k =ο πρώτος παίκτης να φέρει k φορές 'Κεφαλή', $k = 0, 1, \dots, n$ και B=το ενδεχόμενο οι παίκτες να φέρουν τις ίδιες φορές 'Κεφαλή'. Κάθε στοιχείο του ενδεχομένου A_k σχηματίζεται αν επιλέξουμε k από τις n θέσεις στις οποίες θα εμφανιστεί η ένδειξη 'Κεφαλή' και αρα

$$N(A_k) = \binom{n}{k}, \quad \forall k \in \{0, 1, \dots, n\}.$$

Τότε, για κάθε $k \in \{0, 1, \dots, n\}$,

$$\mathbb{P}[A_k] = \frac{N(A_k)}{N(\Omega)} = \frac{\binom{n}{k}}{2^n}.$$

Επίσης, για κάθε $k \in \{0, 1, \dots, n\}$,

$$\mathbb{P}[B|A_k] = \frac{N(B_k)}{N(\Omega)} = \frac{\binom{n}{n-k}}{2^n} = \frac{\binom{n}{k}}{2^n}.$$

Από το **Θεώρημα ολικής πιθανότητας**[1]

$$\mathbb{P}[B] = \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}[A_k] \cdot \mathbb{P}[B|A_k] = \sum_{k=0}^{n} \frac{\binom{n}{k}}{2^n} \cdot \frac{\binom{n}{k}}{2^n} = \frac{1}{2^{2n}} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2.$$

Σημείωση 1: Ζητήθηκε ως θέμα εξετάσεων (2(β)) στην εξέταση του μαθήματος 'Πιθανότητες Ι' του τμήματος Μαθηματικών του ΕΚΠΑ το 2000.

Σημείωση 2:
Από το Θεώρημα του Newton, το οποίο αποδεικνύουμε αμέσως μετά,

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot \binom{n}{n-k} = \binom{2n}{n}$$

και αρα η ζητούμενη πιθανότητα γράφεται

$$\mathbb{P}[B] = \frac{1}{4^n} \binom{2n}{n}.$$

Θεώρημα 0.0.1. *(Newton) Έστω $r, s \in \mathbb{R}^+$ και $n \in \mathbb{N}$. Τότε*

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{r}{k} \cdot \binom{s}{n-k} = \binom{r+s}{n}.$$

[1] Θεώρημα (Ολικής πιθανότητας)
Έστω $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ χώρος πιθανότητας. Αν η οικογένεια $\{A_i : i \in \mathbb{N}\}$ ενδεχομένων αποτελεί **διαμέριση** του δειγματικού χώρου Ω, δηλαδή τα A_i είναι ανα δύο ξένα και $\cup_{i=1}^{\infty} A_i = \Omega$, τότε αν B ενδεχόμενο,

$$\mathbb{P}[B] = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}[A_k] \cdot \mathbb{P}[B|A_k].$$

Απόδειξη. $(x+1)^r \cdot (x+1)^s = (x+1)^{r+s}$ και αρα, από το διώνυμο του Newton,

$$\left(\sum_{k=0}^{r} \binom{r}{k} x^k\right) \cdot \left(\sum_{j=0}^{s} \binom{s}{j} x^j\right) = \sum_{r=0}^{r+s} \binom{r+s}{n} x^n,$$

δηλαδή

$$\sum_{k=0}^{r} \sum_{j=0}^{s} \binom{r}{k} \binom{s}{j} x^{k+j} = \sum_{r=0}^{r+s} \binom{r+s}{n} x^n.$$

Θεωρούμε την αλλαγή μεταβλητής $k+j=n \sim \{0,1,2,\ldots,r+s\} \Rightarrow j=n-k \geq 0 \Rightarrow k \leq n$ και η πιο πάνω γράφεται:

$$\sum_{k=0}^{r+s} \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{r}{k} \binom{s}{n-k}\right) x^n = \sum_{r=0}^{r+s} \binom{r+s}{n} x^n$$

και αρα

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{r}{k} \binom{s}{n-k} = \binom{r+s}{n}.$$

□