Προτεινόμενη λύση Άσκησης 4 (διορίσιμοι 2019).

4.1. Μας δίνεται η ακόλουθη πρόταση και μας ζητείται να εξετάσουμε αν είναι αληθής ή ψευδής:

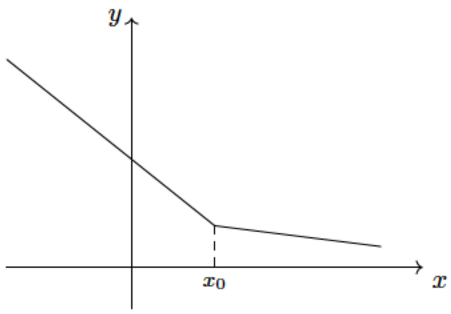
Έστω συνάρτηση f συνεχής στο διάστημα $[a, b]$, με $a < b$. Αν η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα σε όλο το διάστημα $[a, b]$, τότε υποχρεωτικά ισχύει $f'(x) < 0$, σε κάθε εσωτερικό σημείο x του διαστήματος $[a, b]$.

Η λύση που δίνει το ΥΠΠΑΝ είναι η ίδια με το αντιπαράδειγμα που δίνεται στην άσκηση 4.8 (σελ. 61) του βιβλίου

Sergiy Klymchuk - *Counterexamples in Calculus*, Mathematical assosiation of America, Inc., 2010

στην οποία ζητείται αντιπαράδειγμα για το πιο κάτω:

If a function is continuous and decreasing on (a, b), then its derivative is ***non positive*** *on (a, b).*



4.2. Το ερώτημα αυτό είναι μια κλασική εφαρμογή του πιο κάτω Θεωρήματος

> **Θεώρημα 0.0.1.** *Η εικόνα κλειστού και φραγμένου (συμπαγούς) διαστήματος μέσω συνεχούς συνάρτησης είναι επίσης κλειστό και φραγμένο (συμπαγές) διάστημα, δηλαδή αν $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ συνεχής, τότε $f([a, b]) = [m, M]$.*

σε συνδυασμό με το Θεώρημα ενδιάμεσης τιμής.

Συγκεκριμένα,

$$M = \max_{x\in[a,b]} f(x), \qquad m = \min_{x\in[a,b]} f(x).$$

Για την άσκηση τώρα: Έστω

$$A := \{f : [0, 1] \to \{1, 2\} \,|\, f \text{ συνεχής, επί}\}.$$

Έστω $f \in A$. Τότε, αφού f συνεχής και $[0, 1]$ κλειστό και φραγμένο διάστημα, από το πιο πάνω Θεώρημα, έπεται ότι είτε $f(x) = 1,\ \forall x \in [0, 1]$, είτε $f(x) = 2,\ \forall x \in [0, 1]$, $(f([0, 1]) = [m, M]$. Είναι $m \leq M$. Αν $m < M$, τότε $[m, M]$ διάστημα. Τότε, λόγω συνέχειας της f, (Θεώρημα ενδιάμεσης τιμής) η f θα λάμβανε όλες τις τιμές για $x \in [m, M]$, άτοπο, αφού $f([0, 1]) \subseteq \{1, 2\}$).
Αλλά καμία από αυτές δεν είναι επί. Άρα, $A = \emptyset$. ∎