

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΛΥΣΕΙΣ

ΠΑΓΚΥΠΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ

13 Ιουνίου 2020

ΜΕΡΟΣ Α

Άσκηση Α1

Δίνονται τα σημεία $A(1, 1)$ και $B(7, 9)$. Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου που έχει διάμετρο το ευθύγραμμο τμήμα AB .

Λύση Το κέντρο $K(x_K, y_K)$ του κύκλου έχει συντεταγμένες

$$x_K = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{1 + 7}{2} = \frac{8}{2} = 4 \quad \text{και} \quad y_K = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{1 + 9}{2} = \frac{10}{2} = 5$$

δηλ. $K(4, 5)$. Η ακτίνα R του κύκλου είναι

$$\begin{aligned} R &= \frac{\delta}{2} = \frac{|AB|}{2} = \frac{1}{2} \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{(7 - 1)^2 + (9 - 1)^2} = \frac{1}{2} \sqrt{36 + 64} = \frac{1}{2} \sqrt{100} = 5 \end{aligned}$$

Έτσι, ο κύκλος που ψάχνουμε είναι ο

$$(C) : (x - 4)^2 + (y - 5)^2 = 25.$$

Άσκηση Α2

Να βρείτε συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, για την οποία ισχύει $f'(x) = 3x$, $\forall x \in \mathbb{R}$ και της οποίας η γραφική παράσταση περνά από το σημείο $A(2, 6)$.

Λύση Η f' είναι συνεχής συνάρτηση (ως πολυωνυμική). Τότε

$$\begin{aligned} f'(x) = 3x, \forall x \in \mathbb{R} &\implies \int f'(x) dx = \int 3x dx \\ &\implies f(x) = \frac{3}{2}x^2 + c \end{aligned}$$

όπου $c \in \mathbb{R}$ αυθαίρετη σταθερά. Αλλά $A(2, 6) \in C_f$ και άρα $f(2) = 6$. Αντικαθιστούμε στην πιο πάνω και παίρνουμε $c = 0$. Έτσι,

$$f(x) = \frac{3}{2}x^2, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Άσκηση Α3

Να βρείτε το αόριστο ολοκλήρωμα

$$\int (\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x)^2 dx.$$

Λύση

$$\begin{aligned} \int (\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x)^2 dx &= \int (\eta\mu^2 x + 2\eta\mu x \sigma\upsilon\nu x + \sigma\upsilon\nu^2 x) dx \\ & \quad (\eta\mu^2 x + \sigma\upsilon\nu^2 x = 1, \quad 2\eta\mu x \sigma\upsilon\nu x = \eta\mu(2x)) \\ &= \int (1 + \eta\mu(2x)) dx = x - \frac{1}{2} \sigma\upsilon\nu(2x) + c \\ &= \int (1 + \eta\mu(2x)) dx = x - \frac{1}{2} \sigma\upsilon\nu(2x) + c \end{aligned}$$

Διαφορετικά,

$$\begin{aligned} \int (\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x)^2 dx &= \int (\eta\mu^2 x + 2\eta\mu x \sigma\upsilon\nu x + \sigma\upsilon\nu^2 x) dx \\ & \quad (\eta\mu^2 x + \sigma\upsilon\nu^2 x = 1, \quad 2\eta\mu x \sigma\upsilon\nu x = \eta\mu(2x)) \\ &= \int (1 + \eta\mu(2x)) dx = x - 2 \int \sigma\upsilon\nu x d(\sigma\upsilon\nu x) \\ &= \int (1 + \eta\mu(2x)) dx = x - 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \sigma\upsilon\nu^2 x + c \\ &= x - \sigma\upsilon\nu^2 x + c \end{aligned}$$

όπου $c \in \mathbb{R}$ αυθαίρετη σταθερά. Τα δυο αποτελέσματα είναι ίδια, αφού

$$\sigma\upsilon\nu^2 x = \frac{1 + \sigma\upsilon\nu(2x)}{2}$$

και ο αριθμός $-1/2$ μπορεί να απορροφηθεί στη σταθερά ολοκλήρωσης.

Άσκηση A4

Η γραφική παράσταση C_f της συνάρτησης f έχει πλάγια ασύμπτωτη την ευθεία

$$y = 2x + \ln 2, \quad \text{στο } -\infty.$$

Να βρείτε τα όρια

$$(\alpha) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x) + 3x}{x} \quad (\beta) \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - 2x).$$

Λύση Αφού η γραφική παράσταση C_f της συνάρτησης f έχει πλάγια ασύμπτωτη την ευθεία $y = 2x + \ln 2$ στο $-\infty$, έπεται από γνωστό μας Θεώρημα ότι

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = 2 \quad \text{και} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - 2x) = \ln 2.$$

Τότε

$$(\alpha) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x) + 3x}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} + 3 = 2 + 3 = 5$$

και

$$(\beta) \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - 2x) = \ln 2$$

Άσκηση Α5

Δίνεται η εξίσωση $x^2 + y^2 - 4\lambda x + 2\lambda y + 16 + \lambda^2 = 0$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

(α) Να βρείτε όλες τις τιμές του λ έτσι ώστε η πιο πάνω εξίσωση να παριστάνει κύκλο.

(β) Για τις τιμές του λ για τις οποίες η πιο πάνω εξίσωση παριστάνει κύκλο C_λ , να βρείτε τη συγκεκριμένη τιμή του λ , έτσι ώστε η δύναμη του σημείου $A(4, 3)$ ως προς τον κύκλο C_λ , να είναι ίση με $\Delta_{C_\lambda}(A) = 32$.

Λύση (α) Είναι $a = -4\lambda$, $b = 2\lambda$ και $c = 16 + \lambda^2$. Έχουμε

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 - 4c &= 16\lambda^2 + 4\lambda^2 - 4(16 + \lambda^2) \\ &= 16(\lambda^2 - 4) \end{aligned}$$

και αρα η εξίσωση αυτή εκφράζει κύκλο αν και μόνο αν $\lambda^2 - 4 > 0$ δηλ. αν και μόνο αν $\lambda \in (-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$.

(β) Έστω $\lambda \in (-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$. Τότε, η εξίσωση $x^2 + y^2 - 4\lambda x + 2\lambda y + 16 + \lambda^2 = 0$ παριστάνει κύκλο. Θα βρούμε τη συγκεκριμένη τιμή του λ , έτσι ώστε η δύναμη του σημείου $A(4, 3)$ ως προς τον κύκλο C_λ , να είναι ίση με $\Delta_{C_\lambda}(A) = 32$. Είναι

$$\begin{aligned} \Delta_{C_\lambda}(A) = 32 &\iff 4^2 + 3^2 - 4\lambda \cdot 4 + 2\lambda \cdot 3 + 16 + \lambda^2 = 32 \\ &\iff \lambda^2 - 10\lambda + 9 = 0 \iff (\lambda - 9) \cdot (\lambda - 1) = 0 \end{aligned}$$

και αρα $\lambda = 9 \in (-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$

Άσκηση Α6

(α) Να αποδείξετε ότι η παραβολή με εστία το σημείο $E(a, 0)$, $a > 0$ και διευθετούσα την ευθεία $x + a = 0$, έχει εξίσωση $y^2 = 4ax$.

(β) Σε τυχαίο σημείο $M(at^2, 2at)$, $t \neq 0$ της παραβολής $y^2 = 4ax$, $a > 0$ με εστία E , φέρουμε την εφαπτομένη, η οποία τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο A . Να δείξετε ότι η γωνία EAM ισούται με 90° .

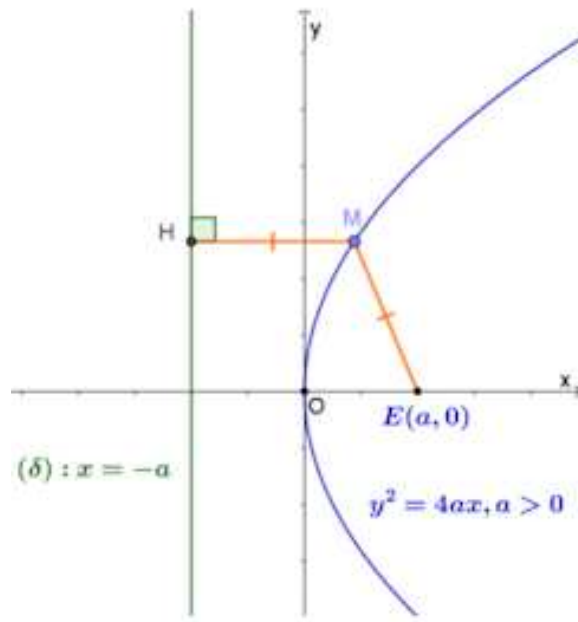
Λύση

(α) Αν $M(x, y)$ είναι τυχαίο σημείο της παραβολής, τότε $|ME| = |MH|$, όπου H η προβολή του M πάνω στην διευθετούσα¹ Είναι

$$|ME| = |MH| \iff |ME|^2 = |MH|^2 \iff (x - a)^2 + y^2 = (x + a)^2 \iff y^2 = 4ax.$$

(β) Η εστία της παραβολής είναι $E(a, 0)$. Θα βρούμε την εξίσωση της εφαπτομένης στο σημείο $M(at^2, 2at)$, $t \neq 0$ της παραβολής. Παραγωγίζουμε πεπλεγμένα την εξίσωσή της: $2yy' = 4a$ και αρα

¹το σχήμα είναι από το σχολικό Γ τεύχος στη σελ.76. Στην απόδειξη του βιβλίου υπάρχει τυπογραφικό λάθος (αντί (δ) αναγράφεται (ε))



Σχήμα 1: Άσκηση 6 (α)

$y' = \frac{2a}{y}$. Συνεπώς, η κλίση της εφ. της παραβολής στο σημείο M είναι $y'(at^2) = \frac{2a}{2at} = \frac{1}{t}$. Έτσι, η ξίσωση της εφαπτομένης είναι η

$$y - 2at = \frac{1}{t}(x - at^2)$$

δηλ. η

$$ty - x = at^2.$$

Για $x = 0$, η πιο πάνω δίνει $y = at$ και έτσι $A(0, at)$. Είναι

$$\lambda_{EA} = \frac{at - 0}{0 - a} = -t$$

Τότε $\lambda_{EA} \cdot \lambda_{εφ.} = \frac{1}{t} \cdot (-t) = -1$ και αρα $EA \perp εφ.$ Συνεπώς, $\hat{EAM} = \pi/2$.

Άσκηση A7

Δίνεται συνάρτηση $f : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$, όπου $\alpha > 0$. Αν η f είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$, παραγωγίσιμη στο (α, β) και ισχύει $f(\alpha) = f(\beta) = 0$, να δείξετε ότι:

(α) Η συνάρτηση $g(x) = \frac{f(x)}{x}$ ικανοποιεί τις υποθέσεις του Θεωρήματος του Rolle στο διάστημα $[\alpha, \beta]$.

(β) Υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε $\xi f'(\xi) = f(\xi)$.

Λύση (α) Η συνάρτηση g είναι καλά ορισμένη στο $[\alpha, \beta]$ αφού $\alpha > 0$. Επίσης, είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ (ως πηλίκο τέτοιων) και παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του (ως πηλίκο παραγωγίσιμων). Επίσης,

$$g(\alpha) = \frac{f(\alpha)}{\alpha} = \frac{0}{\alpha} = 0$$

και

$$g(\beta) = \frac{f(\beta)}{\beta} = \frac{0}{\beta} = 0$$

Ικανοποιούνται λοιπόν οι υποθέσεις του Θεωρήματος του Rolle για την g στο διάστημα $[\alpha, \beta]$.

(β) Από το Θεώρημα του Rolle για την g στο διάστημα $[\alpha, \beta]$, έχουμε ότι υπάρχει (τουλάχιστον) ένα $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε $g'(\xi) = 0$. Αλλά, για κάθε $x \in (\alpha, \beta)$ είναι

$$g'(x) = \left(\frac{f(x)}{x} \right)' = \frac{f'(x) \cdot x - f(x) \cdot x'}{x^2} = \frac{xf'(x) - f(x)}{x^2}$$

και άρα

$$g'(\xi) = 0 \iff \xi f'(\xi) - f(\xi) = 0 \iff \xi f'(\xi) = f(\xi).$$

Άσκηση Α8

Να αποδείξετε ότι

$$2 - \frac{e}{\pi} < \ln \pi < \frac{e}{\pi}.$$

Λύση Θεωρούμε τη συνάρτηση f με τύπο $f(x) = \ln x$, $x > 0$. Είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα (e, π) και συνεχής στα άκρα αυτού. Συνεπώς, από το Θεώρημα Μέσης Τιμής του Διαφορικού Λογισμού, έπεται ότι υπάρχει (τουλάχιστον) ένα $\xi \in (e, \pi)$ τέτοιο ώστε

$$f'(\xi) = \frac{f(\pi) - f(e)}{\pi - e}.$$

Αλλά, $f'(\xi) = \frac{1}{\xi}$ και

$$\xi \in (e, \pi) \implies \frac{1}{\pi} < \frac{1}{\xi} < \frac{1}{e}.$$

Τα πιο πάνω δίνουν

$$\frac{1}{\pi} < \frac{f(\pi) - f(e)}{\pi - e} < \frac{1}{e},$$

δηλ.

$$\frac{1}{\pi} < \frac{\ln(\pi) - \ln(e)}{\pi - e} < \frac{1}{e},$$

δηλ.

$$\frac{1}{\pi} < \frac{\ln(\pi) - 1}{\pi - e} < \frac{1}{e},$$

δηλ.

$$\frac{\pi - e}{\pi} < \ln(\pi) - 1 < \frac{\pi - e}{e},$$

δηλ.

$$1 - \frac{1}{e} < \ln(\pi) - 1 < \frac{\pi}{e} - 1,$$

δηλ.

$$2 - \frac{1}{e} < \ln(\pi) < \frac{\pi}{e}.$$

Άσκηση A9

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x \text{τοξεφ}x$, $x \in \mathbb{R}$.

(α) Να δείξετε ότι η f είναι κυρτή στο \mathbb{R} .

(β) Αν $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ με $\alpha > \beta$, να δείξετε ότι ισχύει

$$\text{τοξεφ}\alpha - \text{τοξεφ}\beta > \frac{\beta}{1 + \beta^2} - \frac{\alpha}{1 + \alpha^2}.$$

Λύση (α) η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη (ως γινόμενο τέτοιων) με

$$\begin{aligned} f'(x) &= (x \text{τοξεφ}x)' = x' \text{τοξεφ}x + x \cdot (\text{τοξεφ}x)' \\ &= \text{τοξεφ}x + x \cdot \frac{1}{1 + x^2} = \text{τοξεφ}x + \frac{x}{1 + x^2} \end{aligned}$$

Η f' είναι παραγωγίσιμη με

$$\begin{aligned} f''(x) &= \left(\text{τοξεφ}x + \frac{x}{1 + x^2} \right)' = (\text{τοξεφ}x)' + \left(\frac{x}{1 + x^2} \right)' \\ &= \frac{1}{1 + x^2} + \frac{x' \cdot (1 + x^2) - 2x^2}{(1 + x^2)^2} = \frac{1}{1 + x^2} - \frac{x^2 - 1}{(1 + x^2)^2} \\ &= \frac{2}{(1 + x^2)^2}, \quad x \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Έτσι, αφού $f''(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$, έπεται ότι η f είναι παντού κυρτή (στο \mathbb{R}).

(β) Αφού η f είναι παντού κυρτή (στο \mathbb{R}), έπεται ότι η f' είναι γνησίως αύξουσα. Έτσι, αν $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ με $\alpha > \beta$, τότε $f'(\alpha) > f'(\beta)$. Είναι

$$\begin{aligned} f'(\alpha) > f'(\beta) &\iff \text{τοξεφ}\alpha + \frac{\alpha}{1 + \alpha^2} > \text{τοξεφ}\beta + \frac{\beta}{1 + \beta^2} \\ &\iff \text{τοξεφ}\alpha - \text{τοξεφ}\beta > \frac{\beta}{1 + \beta^2} - \frac{\alpha}{1 + \alpha^2} \end{aligned}$$

Άσκηση A10

Δίνεται συνάρτηση $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, η οποία έχει συνεχή δεύτερη παράγωγο στο ανοικτό διάστημα A .

(α) Να αποδείξετε ότι στο A ισχύει

$$\int [f(x) + f''(x)] \eta \mu x \, dx = f'(x) \eta \mu x - f(x) \sigma \upsilon \nu x + c.$$

(β) Να βρείτε το αόριστο ολοκλήρωμα

$$\int \left(\ln x - \frac{1}{x^2} \right) \eta \mu x \, dx.$$

Λύση (α)

$$\int [f(x) + f''(x)]\eta\mu x \, dx = \int f(x)\eta\mu x \, dx + \int f''(x)\eta\mu x \, dx.$$

Αλλά, αφού η f'' είναι συνεχής, ολοκλήρωση κατά μέρη δίνει:

$$\begin{aligned} \int f''(x)\eta\mu x \, dx &= \int [f'(x)]'\eta\mu x \, dx \\ &= f'(x)\eta\mu x - \int f'(x) \cdot (\eta\mu x)' \, dx \\ &= f'(x)\eta\mu x - \int f'(x) \cdot \sigma\upsilon\nu x \, dx \end{aligned}$$

Ολοκλήρωση κατα μέρη δίνει (πάλι)

$$\begin{aligned} \int f'(x) \cdot \sigma\upsilon\nu x \, dx &= f(x) \cdot \sigma\upsilon\nu x - \int f(x) \cdot (\sigma\upsilon\nu x)' \, dx \\ &= f(x) \cdot \sigma\upsilon\nu x + \int f(x) \cdot \eta\mu x \, dx \end{aligned}$$

Τα πιο πάνω δίνουν

$$\begin{aligned} \int [f(x) + f''(x)]\eta\mu x \, dx &= \int f(x)\eta\mu x \, dx + f'(x)\eta\mu x - \left(f(x) \cdot \sigma\upsilon\nu x + \int f(x) \cdot \eta\mu x \, dx \right) \\ &= f'(x)\eta\mu x - f(x) \cdot \sigma\upsilon\nu x + c \end{aligned}$$

(κρατήσαμε τη σταθερά ολοκλήρωσης για το τέλος)

(β) Εφαρμόζουμε το αποτέλεσμα του προηγούμενου ερωτήματος για $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = \ln x$. Είναι $f'(x) = 1/x$ και $f''(x) = -1/x^2$, $x > 0$. Τότε,

$$\int \left(\ln x - \frac{1}{x^2} \right) \eta\mu x \, dx = \frac{1}{x} \eta\mu x - \ln x \cdot \sigma\upsilon\nu x + c, \quad x > 0.$$