Προτεινόμενη λύση Άσκησης 3 (2019)
Λίγα σχόλια πρίν τη λύση
Οι ισχυρισμοί των δύο μαθητών μπορεί να θεωρηθούν σε τελείως ανεξάρτητο πλαίσιο από τη μελέτη της συγκεκριμένης συνάρτησης, υπο την έννοια ότι μπορεί να δωθεί αντιπαράδειγμα και για τις δύο περιπτώσεις **ανεξάρτητα με την ασυμπτωτική συμπεριφορά του γραφήματος της συγκεκριμένης συνάρτησης**. Για παράδειγμα, θα μπορούσε να απαντήσει ο καθηγητής στο Μαθητή Α ότι ο ισχυρισμός του είναι (γενικά) λάθος με ένα απλό αντιπαράδειγμα, π.χ. η συνάρτηση $x \mapsto x/(x^2+1)$, ή η $x \mapsto e^x$.
Για τους ισχυρισμούς του μαθητή Β μπορεί να δοθεί (αντι)παράδειγμα συνάρτησης που να ικανοποιεί τους ισχυρισμούς του αλλά το γράφημά της να έχει ασύμπτωτες (π.χ. κατακόρυφη-π.χ. η $x \mapsto x^2 - 1/x$).

Επίσης, δεδομένου ότι η συγκεκριμένη συνάρτηση δίνεται στο σχολικό βιβλίο της Γ′ Λυκείου κατεύθυνσης (Α τεύχος-άσκηση 4 (γ)-Δραστηριότητες σελ. 83-84), όπου εκεί **ζητείται** να βρεθεί η πλάγια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης, οδηγούμαστε στο συμπέρασμα πως ο σκοπός της άσκησης είναι ο έλεγχος αν ο εξετζόμενος είναι σε θέση να αντιλαμβάνεται ότι το γράφημα της συγκεκριμένης συνάρτησης έχει πλάγια ασύμπτωτη.
Σχετικά, ξέρουμε το πολύ βασικό Θεώρημα:

Θεώρημα 0.0.1. *Αν είτε*

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = a \in \mathbb{R} \quad \textbf{\textit{και}} \quad \lim_{x\to+\infty} [f(x) - ax] = b \in \mathbb{R},$$

είτε

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = a \in \mathbb{R} \quad \textbf{\textit{και}} \quad \lim_{x\to-\infty} [f(x) - ax] = b \in \mathbb{R},$$

τότε η ευθεία με εξίσωση $y = ax + b$ είναι (πλάγια) ασύμπτωτη του γραφήματος της συνάρτησης f.

Η ιδέα στη συγκεκριμένη συνάρτηση είναι ότι το πηλίκο $f(x)/x$ είναι τάξης 1 ως προς τη δύναμη του x (και ως προς τα δύο πρόσημα). Συνεπώς, ασυμπτωτικά, σύμφωνα με το πιο πάνω Θεώρημα, το γράφημά της έχει πλάγια ασύμπτωτη καθώς $x \to \pm\infty$.

Λύση
Όπως εύκολα μπορούμε να αποδείξουμε,

$$\lim_{x\to\pm\infty} \sqrt{x^2+x+1} = +\infty.$$

Το πεδίο ορισμού της f είναι το $\mathbb{R}$ και είναι συνεχής. Ψάχνουμε λοιπόν αν το γράφημα της f έχει πλάγια/ες ασύμπτωτη/ες.
Έχουμε:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} &= \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^2+x+1}}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}}{x} \\
&\overset{x>>}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{x\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}}{x} = \lim_{x\to+\infty} \sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}} \;=\; 1.
\end{aligned}$$

Ακολούθως, υπολογίζουμε

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to+\infty}[f(x)-1\cdot x] &= \lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+x+1}-x)\\
&= \lim_{x\to+\infty}\frac{(\sqrt{x^2+x+1}-x)\cdot(\sqrt{x^2+x+1}+x)}{\sqrt{x^2+x+1}+x}\\
&= \lim_{x\to+\infty}\frac{x+1}{\sqrt{x^2+x+1}+x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x\left(1+\frac{1}{x}\right)}{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+x}\\
&\overset{x>>}{=} \lim_{x\to+\infty}\frac{x\left(1+\frac{1}{x}\right)}{x\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+1\right)} = \lim_{x\to+\infty}\frac{1+\frac{1}{x}}{\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+1}\\
&= \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Συνεπώς, η ευθεία με εξίσωση $y=x+\frac{1}{2}$ είναι **πλάγια ασύμπτωτη** του γραφήματος της f σε μια περιοχή του $+\infty$.
Εντελώς όμοια (ή λόγω συμμετρίας, αφού $x^2+x+1=(x+1/2x)^2+3/4$) βρίσκουμε ότι η ευθεία με εξίσωση $y=-x-\frac{1}{2}$ είναι **πλάγια ασύμπτωτη** του γραφήματος της f σε μια περιοχή του $-\infty$.