0.1. Ορισμένο Ολοκλήρωμα και Συμμετρία συναρτήσεων

Άσκηση (20-33 από το (ΝΓΓ))

1. Έστω $a > 0$ και $f : [-a, a] \to \mathbb{R}$ μια **συνεχής** και **περιττή** συνάρτηση. Τότε

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0.$$

2. Έστω $a > 0$ και $f : [-a, a] \to \mathbb{R}$ μια **συνεχής** και **άρτια** συνάρτηση. Τότε

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{a} f(x)\,dx.$$

Απόδειξη.
1. Θεωρούμε το μετασχηματισμό

$$g : [-a, 0] \to \mathbb{R} \quad \text{με} \quad g(x) = f(-x).$$

Η g είναι συνεχής άρα έχει νόημα το $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx$ και έτσι:

$$\begin{aligned} \int_{-a}^{0} f(x)\,dx &= \int_{0}^{a} g(x)\,dx = \int_{0}^{a} f(-x)\,dx \\ &= -\int_{0}^{a} f(x)\,dx \end{aligned}$$

αφού η f είναι περιττή συνάρτηση. Διαφορετικά,

$$\begin{aligned} \int_{-a}^{0} f(x)\,dx &= \int_{a}^{0} f(-x)\,d(-x) \\ &= -\int_{a}^{0} f(-x)\,dx \\ &= \int_{0}^{a} f(-x)\,dx = -\int_{0}^{a} f(x)\,dx \end{aligned}$$

όπου στην προτελευταία ισότητα χρησιμοποιήσαμε το ότι η f είναι περιττή συνάρτηση. Έτσι,

$$\begin{aligned} \int_{-a}^{a} f(x)\,dx &= \int_{-a}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{a} f(x)\,dx \\ &= \int_{0}^{a} f(x)\,dx - \int_{0}^{a} f(x)\,dx = 0 \end{aligned}$$

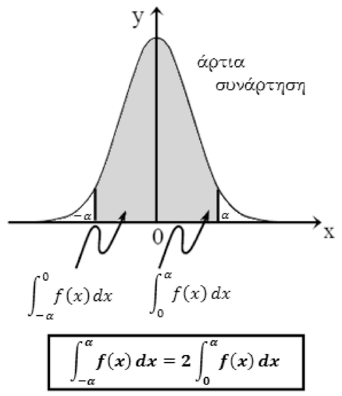
2. Θεωρούμε το μετασχηματισμό g όπως πριν. Τότε

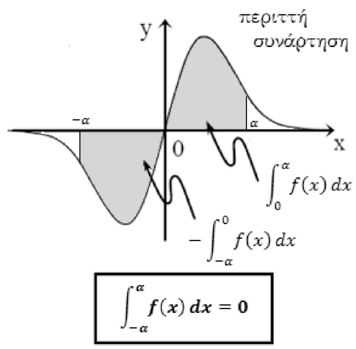
$$\begin{aligned} \int_{-a}^{0} f(x)\,dx &= \int_{0}^{a} g(x)\,dx \\ &= \int_{0}^{a} f(-x)\,dx = \int_{0}^{a} f(x)\,dx \end{aligned}$$

όπου στην τελευταία ισότητα χρησιμοποιήσαμε το ότι η f είναι άρτια. Συνεπώς,

$$\begin{aligned} \int_{-a}^{a} f(x)\,dx &= \int_{-a}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{a} f(x)\,dx \\ &= \int_{0}^{a} f(x)\,dx + \int_{0}^{a} f(x)\,dx \\ &= 2\int_{0}^{a} f(x)\,dx. \end{aligned}$$

□





Η f υποτίθεται συνεχής συνάρτηση

Παραδείγματα

1. Έχουμε

$$I = \int_{-1}^{1} \frac{x^5-2x}{\sqrt{x^2+1}}dx = \int_{1}^{-1} \frac{(-x)^5-2(-x)}{\sqrt{(-x)^2+1}}d(-x) = -\int_{-1}^{1} \frac{x^5-2x}{\sqrt{x^2+1}}dx = -I$$

και αρα $I=0$. Με άλλα λόγια, χρησιμοποιήσαμε το γεγονός ότι η συνάρτηση $f(x) = \dfrac{x^5-2x}{\sqrt{x^2+1}}$ είναι περιττή στο (συμμετρικό περί του $x=0$) διαστήματος $[-1,1]$.

2. [Ολοκληρώματα Fourier-Βλ.Άσκηση 22-87 από το (ΝΓΓ)]
Θα αποδείξουμε ότι για κάθε $m,n \in \mathbb{N}$ ισχύει

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(mx)\cdot\cos(nx)\,dx = 0, \quad \int_{-\pi}^{\pi} \sin(mx)\cdot\sin(nx)\,dx = \begin{cases} 0, & m \neq n \\ \pi, & m = n \end{cases}$$

και

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx)\cdot\cos(mx)\,dx = \begin{cases} 0, & m \neq n \\ \pi, & m = n \end{cases}$$

Κάνουμε χρήση των γνωστών τριγωνομετρικών ταυτοτήτων [Βλ.Άσκηση 22-86 από το (ΝΓΓ)]

$$\begin{aligned} 2\sin(a)\cdot\cos(b) &= \sin(a-b)+\sin(a+b) \\ 2\sin(a)\cdot\sin(b) &= \cos(a-b)-\cos(a+b) \\ 2\cos(a)\cdot\cos(b) &= \cos(a-b)+\cos(a+b) \end{aligned}$$

Για το πρώτο, αν $m \neq n$, έχουμε

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} \sin(mx)\cdot\cos(nx)\,dx &= \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} [\sin(mx-nx)+\sin(mx+nx)]\,dx \\ &= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{m-n}\cos[(m-n)x] + \frac{1}{m+n}\cos[(m+n)x]\right]_{-\pi}^{\pi} \\ &= 0 \end{aligned}$$

λόγω του ότι $\cos(-x) = \cos(x)$. Το ίδιο αποτέλεσμα εξάγεται αν σκεφτούμε ότι, αφού η συνάρτηση $x \mapsto \sin(mx)$ είναι περιττή και η συνάρτηση $x \mapsto \cos(nx)$ είναι άρτια, το γινόμενό τους είναι περιττή συνάρτηση. Το αποτέλεσμα έπεται τότε από την προηγούμενη εφαρμογή. Τώρα αν $m=n$, το αποτέλεσμα είναι επίσης άμεσο. Για το δεύτερο, αν $m \neq n$, τότε

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} \sin(mx)\cdot\sin(nx)\,dx &= \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} [\cos[(m-n)x]-\cos[(m-n)x]]\,dx \\ &= \frac{1}{2(m-n)}\left[\sin[(m-n)x]-\sin[(m+n)x]\right]_{-\pi}^{\pi} \\ &= 0 \end{aligned}$$

ενω αν $m = n$, τότε

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2(mx)\, dx &= \frac{1}{2m}\left[mx - \cos(2mx)\right]_{-\pi}^{\pi} \\ &= \frac{1}{2m}\left[m\pi - \frac{1}{2}\cos(2m\pi) - m(-\pi) + \frac{1}{2}\cos(-2m\pi)\right] \\ &= \frac{1}{2m}\left[2m\pi - \frac{1}{2}\cos(2m\pi) + \frac{1}{2}\cos(2m\pi)\right] \\ &= \frac{2m\pi}{2m} = \pi\end{aligned}$$

Διαφορετικά, εκμεταλλευόμαστε το ότι $x \mapsto \sin(mx)$ είναι περιττή στο συμμετρικό περι του $x = 0$ διάστημα $[-\pi, \pi]$ και αρα

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(2mx)\, dx = 0$$

οπόταν

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2(mx)\, dx = \frac{1}{2m}\left[mx\right]_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \sin(2mx)\, dx = \pi.$$

Εντελώς όμοια και για το τρίτο ολοκλήρωμα.

Πρόταση

Έστω $a < b$ και $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ μια συνεχής συνάρτηση. Τότε

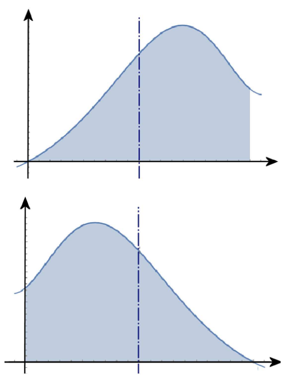
$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(a+b-x)\,dx. \quad (1)$$

Απόδειξη. Θεωρούμε το μετασχηματισμό $u : [a, b] \to \mathbb{R}$ με $u(x) = a + b - x$. Είναι $u'(x) = -1$, $\forall x \in [a, b]$ ήτοι γν. φθίνουσα συνάρτηση και αφού $u(a) = b$, $u(b) = a$, από το Θεώρημα Αλλαγής Μεταβλητής στο Ορισμένο Ολοκλήρωμα, έχουμε

$$\begin{aligned}\int_a^b f(a+b-x)\,dx &= -\int_b^a f(u)\,du \\ &= \int_a^b f(u)\,du \\ &\equiv \int_a^b f(x)\,dx\end{aligned}$$

□

Γεωμετρικά, αυτό σημαίνει ότι το εμβαδόν ενός χωρίου που καθορίζεται από το γράφημα μιας συνάρτησης παραμένει αμετάβλητο αν εφαρμόζουμε ανάκλαση της συνάρτησης γύρω από την ευθεία $x = (b-a)/2$, δηλ. την ευθεία στο μέσο του διαστήματος $[a, b]$. Με άλλα λόγια, ο 'προσανατολισμός' του διαστήματος δεν παίζει ρόλο στο ολοκλήρωμα.



Σχήμα 1: Γεωμετρική Ερμηνεία της (1)

Ας κάνουμε εδω μια παρατήρηση σχετική με το χειρισμό των αντικαταστάσεων στο Ορισμένο ολοκλήρωμα: Εφαρμόσαμε αυστηρά το Θεώρημα Αλλαγής μεταβλητών σε ιδιαίτερα δύσκολα ολοκληρώματα, αναγόμενοι σε ολοκληρώματα νεας μεταβλητής, αλλάζοντας τα άκρα ολοκλήρωσης. Σε απλές περιπτώσεις, όπως είναι η εφαρμογή γραμμικών μετασχηματισμών, μπορούμε να κάνουμε την αντικατάσταση απευθείας χωρίς την εισαγωγή νέου συμβόλου ως μεταβλητή ολοκλήρωσης, δεδομένου φυσικά ότι ο μετασχηματισμός που θεωρούμε είναι αντιστρέψιμος στο διάστημα στο οποίο λαμβάνει χώρα η ολοκλήρωση. Για παράδειγμα, η πιο πάνω σχέση μας λέει ότι

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(a+b-x)\,d(a+b-x).$$

ΑΣΚΗΣΗ - Είναι η άσκηση 20-35 από το (ΝΓΓ)

Έστω $f : [a, b] \to \mathbb{R}\,(0 < a < b)$ μια συνεχής συνάρτηση.

1. Αν

$$f(a+b-x) = f(x),\ \forall x \in [a, b], \quad (2)$$

τότε

$$\int_a^b x \cdot f(x)\,dx = \frac{a+b}{2}\int_a^b f(x)\,dx.$$

2. Αν

$$f(a-x) = f(x),\ \forall x \in [0, a], \quad (3)$$

τότε

$$\int_0^a x \cdot f(x)\,dx = \frac{a}{2}\int_0^a f(x)\,dx.$$

3. Δείξτε ότι

$$\int_0^\pi x \cdot f(\text{ημ}x)\,dx = \frac{\pi}{2}\int_0^\pi f(\text{ημ}x)\,dx.$$

Απόδειξη.

1. Χρησιμοποιώντας ουσιαστικά το μετασχηματισμό

$$u(x) = a + b - x,\ x \in [a, b]$$

έχουμε

$$\begin{aligned}
& \int_a^b x \cdot f(x)\, dx \\
= & \int_a^b (a+b-x) \cdot f(a+b-x)\, dx \\
\overset{(2)}{=} & \int_a^b (a+b-x) \cdot f(x)\, dx \\
= & \int_a^b (a+b) \cdot f(x)\, dx - \int_a^b x \cdot f(x)\, dx
\end{aligned}$$

$$= \quad (a+b) \int_a^b f(x)\, dx - \int_a^b x \cdot f(x)\, dx$$

και αρα

$$\int_a^b x \cdot f(x)\, dx = \frac{a+b}{2} \int_a^b f(x)\, dx.$$

2. Άμεσο από το προηγούμενο ερώτημα. Διαφορετικά, αν θέλαμε να το αποδείξουμε ανεξάρτητα: χρησιμοποιώντας ουσιαστικά το μετασχηματισμό

$$u(x) = a - x, \quad x \in [0, a]$$

έχουμε

$$\begin{aligned}
\int_0^a x \cdot f(x)\, dx &= \int_0^a (a-x) \cdot f(a-x)\, dx \\
&\overset{(3)}{=} \int_0^a (a-x) \cdot f(x)\, dx
\end{aligned}$$

$$= \int_0^a a \cdot f(x)\, dx - \int_0^a x \cdot f(x)\, dx$$

και αρα

$$\int_0^a x \cdot f(x)\, dx = \frac{a}{2} \int_0^a f(x)\, dx.$$

3. Άμεσο από το προηγούμενο ερώτημα. Διαφορετικά, αν θέλαμε να το αποδείξουμε ανεξάρτητα: χρησιμοποιώντας ουσιαστικά το μετασχηματισμό

$$u(x) = \pi - x, \quad x \in [0, \pi]$$

έχουμε

$$\begin{aligned}
& \int_0^\pi x \cdot f(\text{ημ}x)\, dx \\
= & -\int_0^\pi (\pi - x) \cdot f(\text{ημ}(\pi - x))\, d(\pi - x) \\
= & -\int_0^\pi (\pi - x) \cdot f(\text{ημ}x)\, d(\pi - x) \\
= & -\pi \int_0^\pi f(\text{ημ}x)\, d(\pi - x) + \\
& + \int_0^\pi x \cdot f(\text{ημ}x)\, d(\pi - x) \\
= & \ \pi \int_0^\pi f(\text{ημ}x)\, dx - \int_0^\pi x \cdot f(\text{ημ}x)\, dx
\end{aligned}$$

και αρα

$$2 \int_0^\pi x \cdot f(\text{ημ}x)\, dx = \pi \int_0^\pi f(\text{ημ}x)\, dx$$

δηλ.

$$\int_0^\pi x \cdot f(\text{ημ}x)\, dx = \frac{\pi}{2} \int_0^\pi f(\text{ημ}x)\, dx.$$

□

ΕΦΑΡΜΟΓΗ

Να υπολογιστεί το

$$\int_0^\pi \frac{x\text{ημ}x}{1 + \text{συν}^2 x} dx$$

Παρατηρούμε ότι

$$\int_0^\pi \frac{x\text{ημ}x}{1 + \text{συν}^2 x} dx = \int_0^\pi x \cdot \frac{\text{ημ}x}{1 + \text{συν}^2 x} dx$$

και εφαρμόζουμε το προηγούμενο αποτέλεσμα για $a = 0$, $b = \pi$ και $f(x) = \frac{\text{ημ}x}{1+\text{συν}^2 x}$. Είναι $\forall x \in [0, \pi]$:

$$\begin{aligned}
f(a+b-x) &= f(\pi - x) = \frac{\text{ημ}(\pi - x)}{1 + \text{συν}^2(\pi - x)} \\
&= \frac{\text{ημ}x}{1 + \text{συν}^2 x}
\end{aligned}$$

και αρα εφαρμογή του προηγούμενου δίνει

$$\int_0^\pi \frac{x\text{ημ}x}{1 + \text{συν}^2 x} dx \quad = \quad \frac{\pi}{2} \int_0^\pi \frac{\text{ημ}x}{1 + \text{συν}^2 x} dx$$

Υπολογίζουμε το ολοκλήρωμα στο δεξί μέλος της πιο πάνω:

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi}\frac{\eta\mu x}{1+\sigma\upsilon\nu^2 x}dx &= \int_0^{\pi}\frac{d(-\sigma\upsilon\nu x)}{1+\sigma\upsilon\nu^2 x}dx\\ &= -\int_0^{\pi}\frac{d(\sigma\upsilon\nu x)}{1+\sigma\upsilon\nu^2 x}dx\\ &= -\left[\tau o\xi\varepsilon\varphi(\sigma\upsilon\nu)x\right]_0^{\pi}\\ &= -[\tau o\xi\varepsilon\varphi(-1)-\tau o\xi\varepsilon\varphi(0)]\\ &= \frac{\pi}{2}\end{aligned}$$

και αρα

$$\int_0^{\pi}\frac{x\eta\mu x}{1+\sigma\upsilon\nu^2 x}dx=\frac{\pi^2}{4}$$

ΕΦΑΡΜΟΓΗ-Δες Άσκηση 12/(β) i. σελ 109 στο Β Τεύχος του (ΚΥΠ)

Να υπολογιστεί το

$$\int_0^1\frac{2^x}{2^x-2^{1-x}}dx.$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ με τύπο

$$f(x)=\frac{2^x}{2^x-2^{1-x}}.$$

Εφαρμόζοντας την ΠΡΟΤΑΣΗ για $a=0$ και $b=1$, έχουμε ότι

$$\int_0^1 f(x)\,dx=\int_0^1 f(0{+}1{-}x)\,dx=\int_0^1 f(1{-}x)\,dx \tag{4}$$

Αλλά,

$$f(1-x)=\frac{2^{1-x}}{2^{1-x}-2^x}$$

και άμεσα βλέπουμε ότι

$$f(x)+f(1-x)=1$$

Συνεπώς,

$$\int_0^1[f(x)+f(1-x)]\,dx=\int_0^1 dx=1 \tag{5}$$

Όμως, με τη βοήθεια της (4), έχουμε

$$\int_0^1[f(x)+f(1-x)]\,dx=2\int_0^1 f(x)\,dx \tag{6}$$

Άρα, οι (5) και (6) δίνουν $2\int_0^1 f(x)\,dx=1$, δηλ.

$$\int_0^1 f(x)\,dx=\frac{1}{2}.$$

ΕΦΑΡΜΟΓΗ-Δες Άσκηση 12/(β) ii. σελ 109 στο Β Τεύχος του (ΚΥΠ)

Να υπολογιστεί το

$$\int_1^3\frac{\ln x}{\ln x+\ln(4-x)}dx.$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f:[1,3]\to\mathbb{R}$ με τύπο

$$f(x)=\frac{\ln x}{\ln x+\ln(4-x)}.$$

Είναι καλά ορισμένη αφού για $x\in[1,3]$ είναι $4-x\geq 0$. Εφαρμόζοντας την ΠΡΟΤΑΣΗ για $a=1$ και $b=3$, έχουμε ότι

$$\int_1^3 f(x)\,dx=\int_1^3 f(1{+}3{-}x)\,dx=\int_1^3 f(4{-}x)\,dx \tag{7}$$

Αλλά,

$$f(4-x)=\frac{\ln(4-x)}{\ln x+\ln(4-x)}$$

Παρατηρούμε ότι

$$f(x)+f(4-x)=1$$

Συνεπώς,

$$\int_1^3[f(x)+f(4-x)]\,dx=\int_1^3 dx=2 \tag{8}$$

Όμως, με τη βοήθεια της (7), έχουμε

$$\int_1^3[f(x)+f(4-x)]\,dx=2\int_1^3 f(x)\,dx \tag{9}$$

Άρα, οι (8) και (9) δίνουν $2\int_1^3 f(x)\,dx=2$, δηλ.

$$\int_1^3 f(x)\,dx=1.$$

ΑΣΚΗΣΗ - Είναι η άσκηση 20-36 από το (ΝΓΓ) και η άσκηση 11/σελ. 138 από το Β τεύχος του (ΚΥΠ)

Αν f μια συνεχής συνάρτηση και τέτοια ώστε $f(2a-x)=f(x)$, όπου $a>0$, τότε

$$\int_0^{2a} f(x)\,dx = 2\int_0^a f(x)\,dx.$$

Ως εφαρμογή, δείξτε ότι

$$\int_0^{\pi} f(\eta\mu x)\,dx = 2\int_0^{\pi/2} f(\eta\mu x)\,dx.$$

Λύση

$f(2a-x)=f(x)$, $\forall x\in[0,2a]$. Τότε,

$$\int_0^{2a} f(x)\,dx = \int_0^a f(x)\,dx + \int_a^{2a} f(x)\,dx$$

Αλλά,

$$\int_a^{2a} f(x)\,dx = \int_a^0 f(2a-x)\,d(2a-x)$$
$$= \int_a^0 f(x)\,d(2a-x) = -\int_a^0 f(x)\,dx$$
$$= \int_0^a f(x)\,dx$$

και αρα

$$\int_0^{2a} f(x)\,dx = \int_0^a f(x)\,dx.$$

Εφαρμόζοντας το πιο πάνω αποτέλεσμα για $a=\pi/2$ και αφού $\eta\mu(\pi-x)=\eta\mu x$, $\forall x\in(0,\pi)$ αλλά και λόγω της συνέχειας της f, έπεται ότι

$$\int_0^{\pi} f(\eta\mu x)\,dx = 2\int_0^{\pi/2} f(\eta\mu x)\,dx.$$

ΑΣΚΗΣΗ - Είναι η άσκηση 20-37 από το (ΝΓΓ) και η άσκηση 12/σελ. 138 από το Β τεύχος του (ΚΥΠ)

Αν f μια συνεχής συνάρτηση και τέτοια ώστε $f(2a-x)=-f(x)$, όπου $a>0$, τότε

$$\int_0^{2a} f(x)\,dx = 0.$$

Λύση

$f(2a-x)=-f(x)$, $\forall x\in[0,2a]$. Τότε,

$$\int_0^{2a} f(x)\,dx = \int_0^a f(x)\,dx + \int_a^{2a} f(x)\,dx$$

Αλλά,

$$\int_a^{2a} f(x)\,dx = \int_a^0 f(2a-x)\,d(2a-x)$$
$$= -\int_0^a (-f(x))\,dx = -\int_0^a f(x)\,dx$$

και αρα

$$2\int_a^{2a} f(x)\,dx = 0,\ \delta\eta\lambda.\ \int_a^{2a} f(x)\,dx = 0.$$

ΑΣΚΗΣΗ - Είναι η άσκηση 13/σελ 139 από το Β τεύχος του (ΚΥΠ)

Αν f μια συνεχής συνάρτηση στο διάστημα $[0,a]$, $a>0$, να δείξετε ότι

$$\int_0^a x^3\cdot f(x^2)\,dx = \frac{1}{2}\int_0^{a^2} x\cdot f(x)\,dx.$$

(Δες και Εισαγωγικές εξετάσεις Κύπρου/Μαθ. Κατεύθυνσης-2019/Μέρος Β, Θέμα 5(γ))

Λύση

Αφού η συνάρτηση f είναι συνεχής, έπεται ότι και η $h(x)=x^3\cdot f(x^2)$, $x\in[0,a]$ είναι συνεχής, άρα (κατά Riemann) ολοκληρώσιμη. Θεωρούμε το μετασχηματισμό $u:[0,a]\to\mathbb{R}$ με $u(x)=x^2$ ο οποίος είναι 1-1 στο πεδίο ορισμού του κα μάλιστα γνησίως αύξουσα συνάρτηση ($du/dx=2x\geq 0$, $\forall x\in[0,a]$ και=0 μόνον για $x=0$). Έτσι, από το Θεώρημα Αλλαγής μεταβλητής στο Ορισμένο ολοκλήρωμα,

$$\int_0^a x^3\cdot g(x^2)\,dx = \int_0^a x\cdot g(x^2)\cdot x^2\,dx$$
$$= \frac{1}{2}\int_{u(0)}^{u(a)} u\cdot g(u)\,du = \frac{1}{2}\int_0^{a^2} u\cdot g(u)\,du$$
$$\equiv \frac{1}{2}\int_0^{a^2} x\cdot g(x)\,dx$$

ΑΣΚΗΣΗ - Είναι η άσκηση 16/σελ 139 από το Β τεύχος του(ΚΥΠ)

Δίνονται οι συνεχείς συναρτήσεις f και g στο διάστημα $[0,\pi]$. Αν για κάθε $x\in[0,\pi]$ ισχύουν οι σχέσεις $f(x)=f(\pi-x)$ και $g(x)+g(\pi-x)=\pi$, χρησιμοποιώντας την αντικατάσταση $x=\pi-y$:

(α) Να αποδείξετε ότι

$$\int_0^\pi f(x)\cdot g(x)\,dx=\frac{\pi}{2}\int_0^\pi f(x)\,dx.$$

(β) Να υπολογίσετε το

$$\int_0^\pi \frac{x\eta\mu x}{1+\sigma\upsilon\nu^2 x}dx$$

Λύση

(α) f και g συνεχείς στο διάστημα $[0,\pi]$ και αρα το γινόμενό τους είναι επίσης μια συνεχής συνάρτηση στο διάστημα αυτό και άρα έχει νόημα το $\int_0^\pi f(x)\cdot g(x)\,dx$. θεωρούμε το μετασχηματισμό $y:[0,\pi]\to\mathbb{R}$ με $y(x)=\pi-x$ ο οποίος είναι 1-1 και επί στο πεδίο ορισμού του και μάλιστα γνησίως φθίνουσα συνάρτηση. Έτσι, σύμφωνα με το Θεώρημα αλλαγής μεταβλητής στο ορισμένο ολοκλήρωμα, είναι

$$\begin{aligned}
&\int_0^\pi f(x)\cdot g(x)\,dx\\
&= -\int_{y(0)}^{y(\pi)} f(\pi-y)\cdot g(\pi-y)\,dy\\
&= -\int_\pi^0 f(\pi-y)\cdot g(\pi-y)\,dy\\
&= \int_0^\pi f(\pi-y)\cdot g(\pi-y)\,dy
\end{aligned}$$

και χρησιμοποιώντας την υπόθεση για τις f και g :

$$\begin{aligned}
&= \int_0^\pi f(y)\cdot(\pi-g(y))\,dy\\
&= \pi\int_0^\pi f(y)\,dy-\int_0^\pi f(y)\cdot g(y)\,dy\\
&\equiv \pi\int_0^\pi f(x)\,dx-\int_0^\pi f(x)\cdot g(x)\,dx
\end{aligned}$$

και αρα

$$2\int_0^\pi f(x)\cdot g(x)\,dx=\pi\int_0^\pi f(x)\,dx,$$

δηλ.

$$\int_0^\pi f(x)\cdot g(x)\,dx=\frac{\pi}{2}\int_0^\pi f(x)\,dx.$$

(β) Θεωρούμε τις f και g με τύπους $f(x)=\eta\mu x/(1+\sigma\upsilon\nu^2 x)$ και $g(x)=x$ αντίστοιχα.
Είναι συνεχείς στο διάστημα $[0,\pi]$ και $\forall x\in[0,\pi]$ έχουμε

$$\begin{aligned}
f(\pi-x) &= \frac{x\cdot\eta\mu(\pi-x)}{1+\sigma\upsilon\nu^2(\pi-x)}=\frac{x\cdot\eta\mu x}{1+(-\sigma\upsilon\nu x)^2}\\
&= \frac{x\cdot\eta\mu x}{1+\sigma\upsilon\nu^2 x}=f(x).
\end{aligned}$$

και επίσης $g(x)+g(\pi-x)=x+\pi-x=\pi$. Πληρούνται λοιπόν οι υποθέσεις του προηγούμενου ερωτήματος για τις πιο πάνω συναρτήσεις. Συνεπώς,

$$\begin{aligned}
\int_0^\pi \frac{x\cdot\eta\mu x}{1+\sigma\upsilon\nu^2 x}dx &= \int_0^\pi \underbrace{\frac{\eta\mu x}{1+\sigma\upsilon\nu^2 x}}_{f(x)}\cdot\underbrace{x}_{g(x)}\,dx\\
&= \frac{\pi}{2}\int_0^\pi \frac{\eta\mu x}{1+\sigma\upsilon\nu^2 x}dx
\end{aligned}$$

Αλλά,

$$\begin{aligned}
\int \frac{\eta\mu x}{1+\sigma\upsilon\nu^2 x}dx &= -\int \frac{d(\sigma\upsilon\nu x)}{1+\sigma\upsilon\nu^2 x}\\
&= -\tau o\xi\varepsilon\varphi(\sigma\upsilon\nu x)+c
\end{aligned}$$

και αρα

$$\begin{aligned}
\frac{\pi}{2}\int_0^\pi \frac{\eta\mu x}{1+\sigma\upsilon\nu^2 x}dx &= -\frac{\pi}{2}\Big[\tau o\xi\varepsilon\varphi(\sigma\upsilon\nu x)\Big]_0^\pi\\
&= -\frac{\pi}{2}\Big[\tau o\xi\varepsilon\varphi(\sigma\upsilon\nu(\pi))-[\tau o\xi\varepsilon\varphi(\sigma\upsilon\nu(0))\Big]\\
&= -\frac{\pi}{2}\Big[\tau o\xi\varepsilon\varphi(1)-\tau o\xi\varepsilon\varphi(-1)\Big]\\
&= -\frac{\pi}{2}\Big[\tau o\xi\varepsilon\varphi(1)+\tau o\xi\varepsilon\varphi(1)\Big]\\
&= -\pi\Big[\tau o\xi\varepsilon\varphi(1)\Big]=\pi\cdot\frac{\pi}{4}=\frac{\pi^2}{4}
\end{aligned}$$

Άσκηση 1.1. 22-76 από το (ΝΓΓ)

Χρησιμοποιώντας το μετασχηματισμό

$$t = k - x$$

όπου $k > 0$ σταθερά, να δείξετε ότι το ολοκλήρωμα

$$A = \int_0^k \frac{f(k-x)}{f(x)+f(x-k)}dx$$

είναι ίσο με το ολοκλήρωμα

$$B = \int_0^k \frac{f(x)}{f(x)+f(x-k)}dx$$

(νοείται η υπόθεση $f \neq 0$ στο $[0,k]$).
Με τη βοήθεια του πιο πάνω, να υπολογίσετε το $A+B$ και στη συνέχεια να δείξετε ότι $B = k/2$. Τέλος, υπολογίστε τα ολοκληρώματα

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{\text{ημ}x}}{\sqrt{\text{ημ}x}+\sqrt{\text{συν}x}}dx$$

και

$$J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\text{ημ}^3 x}{\text{ημ}^3 x+\text{συν}^3 x}dx$$

Απάντηση
Ο μετασχηματισμός $t = k - x \Leftrightarrow x = k - t$ απεικονίζει (με αντιστρέψιμο τρόπο) το διάστημα $[0,k]$ στον εαυτό του. Επίσης, $dt = -dx$ και αρα, από το Θεώρημα αλλαγής μεταβλητών στο Ορισμένο Ολοκλήρωμα

$$A = \int_0^k \frac{f(x)}{f(x)+f(x-k)}dx = B.$$

Αλλά,

$$A+B = \int_0^k \frac{f(x)+f(x-k)}{f(x)+f(x-k)}dx = \int_0^k dx = k$$

και αφού $A = B$, έπεται ότι

$$A = B = \frac{k}{2}.$$

Τώρα, για τον υπολογισμό του

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{\text{ημ}x}}{\sqrt{\text{ημ}x}+\sqrt{\text{συν}x}}dx,$$

θεωρούμε τη συνάρτηση f με τύπο

$$f(x) = \sqrt{\text{ημ}x},\ x \in [0,\pi/2]$$

όπως επίσης και η συνάρτηση g με τύπο

$$\begin{aligned} g(x) &= \frac{f(x)}{f(x)+f\left(\frac{\pi}{2}-x\right)} \\ &= \frac{\sqrt{\text{ημ}x}}{\sqrt{\text{ημ}x}+\sqrt{\text{ημ}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}} \\ &= \frac{\sqrt{\text{ημ}x}}{\sqrt{\text{ημ}x}+\sqrt{\text{συν}x}} \end{aligned}$$

για $x \in [0,\pi/2]$.
Έτσι, από το προηγούμενο ερώτημα,

$$I = \frac{\frac{\pi}{2}}{2} = \frac{\pi}{4}.$$

Επίσης, εντελώς όμοια,

$$\begin{aligned} J = & \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\text{ημ}^3 x}{\text{ημ}^3 x+\text{συν}^3 x}dx \\ = & \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\text{ημ}^3 x}{\text{ημ}^3 x+\text{ημ}^3\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}dx \\ = & \frac{\frac{\pi}{2}}{2} = \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

Άσκηση 1.2.

Δίνονται οι συναρτήσεις f και g οι οποίες είναι συνεχείς στο σύνολο των πραγματικών αριθμών. Η συνάρτηση f είναι άρτια και για τη συνάρτηση g δίνεται ότι αυτή ικανοποιεί τη σχέση

$$g(x) + g(-x) = 1, \; \forall x \in \mathbb{R}.$$

1. Να δείξετε ότι:

$$\int_{-a}^{a} f(x) \cdot g(x)\, dx = \int_{0}^{a} f(x)\, dx,$$

όπου $a > 0$.

2. Να υπολογίσετε το

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\text{συν}x}{e^{2x}+1}\, dx.$$

1. Η f είναι συνεχής, άρα έχει νόημα το $\int_{-a}^{a} f(x) \cdot g(x)\, dx$ και αφού $g(x)+g(-x) = 1$, $\forall x \in \mathbb{R}$, έχουμε ότι $g(x) = 1 - g(-x)$, $\forall x \in [-a, a]$. Έτσι,

$$\begin{aligned}
&\int_{-a}^{a} f(x) \cdot (1 + g(x))dx \\
=\;& \int_{-a}^{a} f(x) \cdot (1 - g(-x))dx \\
=\;& \int_{-a}^{a} f(x)\, dx - \int_{-a}^{a} g(-x)\, dx
\end{aligned}$$

Αφού η f είναι άρτια, ξέρουμε ότι

$$\int_{-a}^{a} f(x)\, dx = 2\int_{0}^{a} f(x)\, dx.$$

Ακολούθως, θεωρούμε το μετασχηματισμό $u : [-a, a] \to \mathbb{R}$ με $u(x) = -x$ ο οποίος είναι αμφιμονοσήμαντος (στο πεδίο ορισμού) του και μάλιστα γνησίως φθίνουσα συνάρτηση:

$$du/dx = -1 < 0, \forall x \in [-a, a].$$

Τότε

$$\begin{aligned}
&\int_{-a}^{a} f(x) \cdot g(-x)\, dx \\
=\;& \int_{u(-a)}^{u(a)} f(-u) \cdot g(u)\, dx \\
=\;& \int_{a}^{-a} f(u) \cdot g(u)\, du \\
\equiv\;& \int_{a}^{-a} f(x) \cdot g(x)\, dx
\end{aligned}$$

Συνεπώς,

$$\begin{aligned}
&\int_{-a}^{a} f(x) \cdot g(x)\, dx \\
=\;& 2\int_{0}^{a} f(x)\, dx - \int_{a}^{-a} f(x) \cdot g(x)\, dx
\end{aligned}$$

και τελικά,

$$\int_{a}^{-a} f(x) \cdot g(x)\, dx = \int_{0}^{a} f(x)\, dx.$$

2. Εφαρμόζουμε το προηγούμενο ερώτημα για $a = \frac{\pi}{2}$, $f(x) = \text{συν}x$, $\forall x \in [-a, a] \equiv [-\pi/2, \pi/2]$ και $g(x) = 1/(e^{2x}+1), \forall x \in \mathbb{R}$. Είναι $\text{συν}(-x) = \text{συν}(x)$, $\forall x \in [-\pi/2, \pi/2]$ και

$$x \in [-\pi/2, \pi/2] \Rightarrow (-x) \in [-\pi/2, \pi/2]$$

δηλ. f άρτια και $\forall x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}
&g(x) + g(-x) \\
=\;& \frac{1}{e^{2x}+1} + \frac{1}{e^{-2x}+1} \\
=\;& \frac{e^{-2x}+1+e^{2x}+1}{(e^{2x}+1)(e^{-2x}+1)} \\
=\;& \frac{e^{-2x}+e^{2x}+2}{e^{-2x}+e^{2x}+2} = 1
\end{aligned}$$

και αρα

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\text{συν}x}{e^{2x}+1} = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \text{συν}x\, dx = 1.$$

Άσκηση 1.3.

Δίνονται οι συναρτήσεις f και g οι οποίες είναι συνεχείς στο σύνολο των πραγματικών αριθμών. Η συνάρτηση f είναι άρτια και για τη συνάρτηση g δίνεται ότι αυτή ικανοποιεί τη σχέση

$$g(x)\cdot g(-x)=1,\ \forall x\in\mathbb{R}.$$

1. Να δείξετε ότι:

$$\int_{-a}^{a}\frac{f(x)}{1+g(x)}dx=\int_0^a f(x)\,dx,$$

όπου $a>0$.

2. Να υπολογίσετε το

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\text{συν}x}{e^{2x}+1}dx.$$

1. Η $f/(1+g)$ είναι συνεχής, άρα έχει νόημα το $\int_{-a}^{a}\frac{f(x)}{1+g(x)}dx$ και

$$\int_{-a}^{a}\frac{f(x)}{1+g(x)}dx = \int_{-a}^{0}\frac{f(x)}{1+g(x)}dx + \int_0^a\frac{f(x)}{1+g(x)}dx$$

Αλλά,

$$\int_{-a}^{0}\frac{f(x)}{1+g(x)}dx=-\int_a^0\frac{f(-x)}{1+g(-x)}dx$$

$$=\int_0^a\frac{f(-x)}{1+g(-x)}dx=\int_0^a\frac{f(x)}{1+g(-x)}dx$$

αφού η f είναι άρτια και αφού

$$g(x)\cdot g(-x)=1\Rightarrow g(x)\neq 0,\ \forall x\in[-a,a]$$

έπεται ότι

$$\int_0^a\frac{f(x)}{1+g(-x)}dx=\int_0^a\frac{g(x)f(x)}{g(x)(1+g(-x))}dx$$

$$=\int_0^a\frac{g(x)f(x)}{g(x)+g(x)g(-x)}dx=\int_0^a\frac{g(x)f(x)}{1+g(x)}dx$$

(από την υπόθεση για την g). Συνεπώς,

$$\begin{aligned}\int_{-a}^{a}\frac{f(x)}{1+g(x)}dx &= \int_0^a\frac{g(x)f(x)}{1+g(x)}dx + \int_0^a\frac{f(x)}{1+g(x)}dx\\ &= \int_0^a\frac{f(x)(g(x)+1)}{1+g(x)}dx\\ &= \int_0^a f(x)\,dx\end{aligned}$$

2. Εφαρμόζουμε το προηγούμενο ερώτημα για $a=\pi/2$,

$$f(x)=\text{συν}x,\ x\in[-a,a]\equiv[-\pi/2,\pi/2]$$

και

$$g(x)=\frac{1}{e^{2x}+1},\ x\in\mathbb{R}.$$

Είναι $\text{συν}(-x)=\text{συν}(x)$, $\forall x\in[-\pi/2,\pi/2]$, δηλ. f άρτια και $\forall x\in\mathbb{R}$ είναι

$$g(x)\cdot g(-x)=e^{2x}\cdot e^{-2x}=1.$$

Άρα

$$\begin{aligned}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\text{συν}x}{e^{2x}+1} &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\text{συν}x\cdot\frac{1}{e^{2x}+1}\\ &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\text{συν}x\,dx=1\end{aligned}$$

Άσκηση 1.4.

Δίνονται οι συνεχείς συναρτήσεις $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$. Η συνάρτηση f είναι άρτια και η συνάρτηση g περιττή.

1. Να δείξετε ότι:

$$\int_{-a}^{a}\frac{f(x)}{e^{g(x)}+1}dx=\int_0^a f(x)\,dx$$

(όπου $a>0$)

2. Να υπολογίσετε το

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\text{συν}^2x+5}{2e^{\text{ημ}x}+2}dx.$$

1. Το $\int_{-a}^{a} \frac{f(x)}{e^{g(x)}+1}dx$ έχει νόημα λόγω της συνέχειας της $f/(e^g+1)$ (ως σύνθεση συνεχών). Ας επισημάνουμε επίσης ότι $e^g + 1 > 0$ παντού. Τώρα, είναι

$$\int_{-a}^{a} \frac{f(x)}{e^{g(x)}+1}dx$$

$$= \int_{-a}^{0} \frac{f(x)}{e^{g(x)}+1}dx + \int_{0}^{a} \frac{f(x)}{e^{g(x)}+1}dx$$

Αλλά,

$$\int_{-a}^{0} \frac{f(x)}{e^{g(x)}+1}dx = -\int_{a}^{0} \frac{f(-x)}{e^{g(-x)}+1}dx$$

$$= \int_{0}^{a} \frac{f(-x)}{e^{g(-x)}+1}dx = \int_{0}^{a} \frac{f(x)}{e^{-g(x)}+1}dx$$

$$= \int_{0}^{a} \frac{f(x)}{\frac{1}{e^{g(x)}}+1}dx = \int_{0}^{a} \frac{e^{g(x)}f(x)}{e^{g(x)}+1}dx$$

(χρησιμοποιήσαμε τις υποθέσεις συμμετρίας των f και g) και αρα

$$\begin{aligned}
&\int_{-a}^{a} \frac{f(x)}{e^{g(x)}+1}dx \\
= &\int_{0}^{a} \frac{e^{g(x)}f(x)}{e^{g(x)}+1}dx + \int_{0}^{a} \frac{f(x)}{e^{g(x)}+1}dx \\
= &\int_{0}^{a} \left[\frac{e^{g(x)}f(x)}{e^{g(x)}+1} + \frac{f(x)}{e^{g(x)}+1}\right] dx \\
= &\int_{0}^{a} \frac{f(x)(e^{g(x)}+1)}{e^{g(x)}+1}dx \\
= &\int_{0}^{a} f(x)\,dx
\end{aligned}$$

2. Εφαρμόζουμε το προηγούμενο ερώτημα για $a = \pi/2$,

$$f(x) = \text{συν}^2 x + 5,\ x \in [-a, a] \equiv [-\pi/2, \pi/2]$$

και

$$g(x) = \text{ημ}x,\ x \in \mathbb{R}.$$

Αφού $\text{συν}(-x) = \text{συν}(x)$, $\forall x \in [-\pi/2, \pi/2]$, έπεται ότι η f είναι άρτια και αφού $\forall x \in \mathbb{R}$ είναι

$$g(-x) = \text{ημ}(-x) = -\text{ημ}x = -g(x),$$

έπεται ότι η g είναι περιττή συνάρτηση.
Πληρούνται λοιπόν όλες οι υποθέσεις του πρώτου ερωτήματος. Άρα

$$\begin{aligned}
&\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\text{συν}^2 x + 5}{2e^{\text{ημ}x}+2}dx = \frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\text{συν}^2 x + 5}{e^{\text{ημ}x}+1}dx \\
\overset{1.}{=}\ &\frac{1}{2}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} (\text{συν}^2 x + 5)\,dx \\
=\ &\frac{1}{2}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1+\text{συν}(2x)}{2} + 5\right) dx \\
=\ &\frac{1}{2}\left[\frac{\text{ημ}(2x)}{4} + \frac{11x}{4}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{11\pi}{8}
\end{aligned}$$

Ασκήσεις που δόθηκαν σε Τελικές εξετάσεις

2018- Εισαγωγικές Εξετάσεις Κύπρου (Β Σειρά)

Δίνεται συνεχής και άρτια συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.
(α) Χρησιμοποιώντας την αντικατάσταση $x = -t$, να αποδείξετε ότι

$$\int_{-a}^{a} \frac{f(x)}{1+b^x} dx = \int_0^a f(x)\, dx,$$

όπου $a, b > 0$.
(β) Στη συνέχεια, να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα

$$\int_{-1}^{1} \frac{dx}{(x^2+1)(1+e^x)}.$$

Λύση

(α) Έχουμε καταρχάς ότι αφού η f είναι άρτια,

$$f(-x) = f(x),\ \forall x \in [-a, a]. \tag{10}$$

Επίσης,

$$\int_{-a}^{a} \frac{f(x)}{1+b^x} dx = \int_{-a}^{0} \frac{f(x)}{1+b^x} dx + \int_0^a \frac{f(x)}{1+b^x} dx$$

Θεωρούμε το μετασχηματισμό $t : [-a, 0] \to \mathbb{R}$ με $t(x) = -x$ ο οποίος είναι $1-1$ και επί στο πεδίο ορισμού του και μάλιστα γνησίως φθίνουσα συνάρτηση ($dt/dx = -1 < 0, \forall x \in (-a, 0)$ και συνεχής στά άκρα του π.ο. της). Έτσι,

$$\begin{aligned}
\int_{-a}^{0} \frac{f(x)}{1+b^x} dx &= -\int_{t(-a)}^{t(0)} \frac{f(-t)}{1+b^{-t}} dt &= -\int_a^0 \frac{f(-t)}{1+b^{-t}} dt \\
&= \int_0^a \frac{f(-t)}{1+b^{-t}} dt &\overset{(10)}{=} \int_0^a \frac{f(t)}{1+b^{-t}} dt \\
&= \int_0^a \frac{b^t \cdot f(t)}{1+b^t} dt &\equiv \int_0^a \frac{b^x \cdot f(x)}{1+b^x} dx
\end{aligned}$$

και αρα

$$\begin{aligned}
\int_{-a}^{a} \frac{f(x)}{1+b^x} dx &= \int_0^a \frac{b^x \cdot f(x)}{1+b^x} dx + \int_0^a \frac{f(x)}{1+b^x} dx &= \int_0^a \frac{f(x) + b^x \cdot f(x)}{1+b^x} dx \\
&= \int_0^a \frac{f(x) \cdot (1+b^x)}{1+b^x} dx &= \int_0^a f(x)\, dx
\end{aligned}$$

(β) Θα εφαρμόσουμε το προηγούμενο για $a = 1 > 0$, $b = e > 0$ και

$$f : [-1, 1] \to \mathbb{R} \quad \text{με} \quad f(x) = \frac{1}{x^2+1}.$$

Η f είναι άρτια και αρα από πρίν:

$$\int_{-1}^{1} \frac{dx}{(x^2+1)(1+e^x)} = \int_{-1}^{1} \frac{\frac{1}{x^2+1}}{1+e^x} dx = \int_0^1 \frac{dx}{x^2+1} = [\text{τοξεφ}x]_0^1 = \text{τοξεφ}1 - \text{τοξεφ}0 = \frac{\pi}{4}$$

2018- Δειγματικό για τις Εισαγωγικές Εξετάσεις (Από οδηγό σπουδών της Κύπρου)

Δίνονται οι συναρτήσεις f και g οι οποίες είναι συνεχείς στο σύνολο των πραγματικών αριθμών. Η συνάρτηση f είναι άρτια και για τη συνάρτηση g δίνεται ότι $g(x)+g(-x)=1$, $\forall x\in\mathbb{R}$.

(α) Χρησιμοποιώντας την αντικατάσταση $u(x)=-x$, ή με οποιοδήποτε άλλο τρόπο, να δείξετε ότι

$$\int_{-a}^{a} f(x)\cdot g(x)\,dx = \int_{0}^{a} f(x)\,dx,$$

όπου $a>0$.

(β) Να υπολογίσετε το

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\text{συν}x}{e^{2x}+1}dx$$

.

Λύση

Έχουμε καταρχάς ότι αφού η f είναι άρτια,

$$f(-x)=f(x),\ \forall x\in[-a,a]. \tag{11}$$

Θεωρούμε το μετασχηματισμό $u:[-a,a]\to\mathbb{R}$ με $u(x)=-x$ ο οποίος είναι $1-1$ και επί στο πεδίο ορισμού του και μάλιστα γνησίως φθίνουσα συνάρτηση ($du/dx=-1<0$, $\forall x\in(-a,a)$ και συνεχής στά άκρα του π.ο. του). Επίσης, αφού η $f\cdot g$ είναι συνεχής συνάρτηση στο $[-a,a]$, έπεται ότι έχει νόημα το $\int_{-a}^{a} f(x)\cdot g(x)\,dx$ και αφού

$$g(x)+g(-x)=1,\ \forall x\in\mathbb{R}\Rightarrow g(x)=1-g(-x),\ \forall x\in\mathbb{R},$$

έχουμε ότι

$$\int_{-a}^{a} f(x)\cdot g(x)\,dx = \int_{-a}^{a} f(x)\,dx - \int_{-a}^{a} f(x)\cdot g(-x)\,dx.$$

Είναι

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = \int_{-a}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{a} f(x)\,dx \tag{12}$$

και εφαρμόζοντας το Θεώρημα Αλλαγής Μεταβλητής

$$\int_{-a}^{0} f(x)\,dx = -\int_{u(-a)}^{u(0)} f(-u)\,du = -\int_{a}^{0} f(-u)\,du = \int_{0}^{a} f(-u)\,du \overset{(11)}{=} \int_{a}^{0} f(u)\,du \tag{13}$$

Από τις (12) και (13) έχουμε

$$\int_{-a}^{a} f(x)\cdot g(x)\,dx = 2\int_{0}^{a} f(x)\,dx.$$

Τώρα,

$$\begin{aligned}\int_{-a}^{a} f(x)\cdot g(-x)\,dx &= -\int_{u(-a)}^{u(a)} f(-u)\cdot g(u)\,du = -\int_{a}^{-a} f(-u)\cdot g(u)\,du\\ &\overset{(11)}{=} \int_{-a}^{a} f(u)\cdot g(u)\,du \equiv \int_{-a}^{a} f(x)\cdot g(x)\,dx\end{aligned}$$

και έτσι

$$\int_{-a}^{a} f(x)\cdot g(x)\,dx = 2\int_{0}^{a} f(x)\,dx - \int_{-a}^{a} f(x)\cdot g(x)\,dx$$

δηλ.

$$\int_{-a}^{a} f(x)\cdot g(x)\,dx = \int_{0}^{a} f(x)\,dx.$$

(β) Θα εφαρμόσουμε το προηγούμενο για f και g τις συναρτήσεις με τύπους

$$f(x) = \text{συν}x \qquad \text{και} \qquad g(x) = \frac{1}{e^{2x}+1}$$

αντίστοιχα. Η συνάρτηση g έχει π.ο. το $\mathbb{R}$ και μάλιστα για κάθε $x \in \mathbb{R}$ έχουμε

$$\begin{aligned} g(x)+g(-x) &= \frac{1}{e^{2x}+1} + \frac{1}{e^{-2x}+1} &&= \frac{1}{e^{2x}+1} + \frac{1}{\frac{1}{e^{2x}}+1} \\ &= \frac{1}{e^{2x}+1} + \frac{e^{2x}}{1+e^{2x}} &&= \frac{1+e^{2x}}{1+e^{2x}} = 1 \end{aligned}$$

και οι f και g είναι συνεχείς συναρτήσεις (στο $\mathbb{R}$). Πληρούνται οι υποθέσεις του (α) ερωτήματος το οποίο για $a = \pi/2$ δίνει:

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\text{συν}x}{e^{2x}+1}dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \text{συν}x\,dx = [\text{ημ}x]_0^{\pi/2} = 1$$

.

2019- Εισαγωγικές Εξετάσεις Κύπρου (Α Σειρά)

(α) Να αποδείξετε ότι
$$(\text{τοξεφ}x)' = \frac{1}{1+x^2}, \quad x \in \mathbb{R}$$
(β) Να βρείτε τα τοπικά ακρότατα, τα διαστήματα μονοτονίας της συνάρτησης f με τύπο
$$f(x) = \text{τοξεφ}(x^2)$$
και να αποδείξετε ότι
$$f(x) \geq 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$
(γ) Αν g συνεχής συνάρτηση στο διάστημα $[0, a]$, $a > 0$, χρησιμοποιώντας την αντικατάσταση $x^2 = u$, να αποδείξετε ότι
$$\int_0^a x^3 \cdot g(x^2)\, dx = \frac{1}{2}\int_0^{a^2} x \cdot g(x)\, dx$$
(δ) Να υπολογιστεί το εμβαδόν του χωρίου που βρίσκεται κάτω από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης h με τύπο $h(x) = x^3\text{τοξεφ}(x^2)$, δεξιά από την ευθεία με εξίσωση $x = 0$ και αριστερά από την ευθεία με εξίσωση $x = 1$.

Λύση

(α) (με πεπλεγμένη παραγώγιση)
Έχουμε για $y \in (-\pi/2, \pi/2)$
$$\begin{aligned}
y = \text{τοξεφ}x \quad &\Leftrightarrow \quad x = \text{εφ}y \Leftrightarrow \frac{dx}{dx} = \frac{d(\text{εφ}y)}{dx} \quad \Leftrightarrow \quad 1 = \text{τεμ}y \cdot \text{εφ}y \cdot \frac{dy}{dx} \\
&\Leftrightarrow \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\text{τεμ}^2 y} \Leftrightarrow \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{1+\text{εφ}^2 y} \\
&\Leftrightarrow \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{1+x^2}
\end{aligned}$$
$(x \in \mathbb{R})$
Σημείωση: αφού $y \in (-\pi/2, \pi/2)$, έπεται ότι τεμ$y \neq 0$.

(β) Χρησιμοποιούμε το προηγούμενο ερώτημα και τον κανόνα της αλυσίδας.
Κατ'αρχάς είναι $f(x) = (g \circ h)(x)$, όπου $h(x) = x^2$ και $g(x) = \text{τοξεφ}x$. Έτσι,
$$D(f) = \{x \in D(h) \,|\, h(x) \in D(g)\} = \{x \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}.$$
Η συνάρτηση f είναι παντού παραγωγίσιμη (ως σύνθεση τέτοιων) και για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι
$$f'(x) = (\text{τοξεφ}(x^2))' = (\text{τοξεφ})'(x^2) \cdot (x^2)' = \frac{2x}{1+(x^2)^2} = \frac{2x}{1+x^4}.$$
Τώρα, παρατηρούμε ότι η συνάρτηση f είναι άρτια (εύκολο). Συνεπώς, αρκεί να τη μελετήσουμε στο διάστημα $[0, +\infty)$. Είναι $f'(x) = 2x/(1+x^4) > 0$, $\forall x > 0$ και αρα είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(0, \infty)$. Λόγω της συνέχειάς της στο $x = 0$, θα είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, \infty)$.
Έπεται ότι (λόγω της συνέχειας και του ότι είναι άρτια) ότι είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, 0]$ και

από τα πιο πάνω, έχουμε ότι παρουσιάζει **(ολικό) ελάχιστο για** $x = 0$ και το μόνο ακρότατό της είναι αυτό.
Έτσι, και αφού $f(0) = \text{τοξεφ}(0) = 0$, έπεται τελικά ότι $f(x) \geq f(0) = 0$, $\forall x \geq 0$ με την ισότητα ΜΟΝΟ για $x = 0$.

(γ) Αφού η συνάρτηση g είναι συνεχής, έπεται ότι και η $h(x) = x^3 \cdot g(x^2)$, $x \in [0, a]$ είναι συνεχής, άρα (κατά Riemann) ολοκληρώσιμη. Θεωρούμε το μετασχηματισμό $u : [0, a] \to \mathbb{R}$ με $u(x) = x^2$ ο οποίος είναι 1-1 στο πεδίο ορισμού του κα μάλιστα γνησίως αύξουσα συνάρτηση ($du/dx = 2x \geq 0$, $\forall x \in [0, a]$ και=0 μόνον για $x = 0$). Έτσι, από το Θεώρημα Αλλαγής μεταβλητής στο Ορισμένο ολοκλήρωμα,

$$\begin{aligned}\int_0^a x^3 \cdot g(x^2)\, dx &= \int_0^a x \cdot g(x^2) \cdot x^2\, dx = \frac{1}{2} \int_{u(0)}^{u(a)} u \cdot g(u)\, du \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{a^2} u \cdot g(u)\, du \equiv \frac{1}{2} \int_0^{a^2} x \cdot g(x)\, dx\end{aligned}$$

(δ) Από τα πιο πάνω ερωτήματα, έχουμε ότι $h(x) \geq 0$, $\forall x \in [0, 1]$ και $h(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$. Είναι

$$h(1) = \text{τοξεφ}(1) = \frac{\pi}{4}$$

και αρα

$$E = \int_0^1 x^3 \cdot \text{τοξεφ}(x^2)\, dx = \frac{1}{2} \int_0^{1^2} x \cdot \text{τοξεφ}(x)\, dx = \frac{1}{2} \int_0^1 x \cdot \text{τοξεφ}(x)\, dx$$

όπου στην πρώτη ισότητα κάναμε χρήση του προηγούμενου ερωτήματος. Τώρα, κατα τα γνωστά (ολοκλήρωση κατά μέρη) έχουμε

$$\int \text{τοξεφ}(x)\, dx = \frac{1}{2} \left(x^2 \text{τοξεφ}(x) + \text{τοξεφ}(x) - x\right) + c$$

και αρα

$$E = \frac{1}{2} \left[x^2 \text{τοξεφ}(x) + \text{τοξεφ}(x) - x\right]_0^1 = \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4} \left(\frac{\pi}{2} - 1\right)$$

(τετραγωνικές μονάδες)

Αναφορές

(ΝΓΓ) *Σ. Νεγρεπόντης, Σ Γιωτόπουλος, Ε. Γιαννακούλιας* - Απειροστικός Λογισμός, τόμοι Ι,ΙΙα,ΙΙβ, εκδόσεις Συμμετρία, 2000

(ΚΥΠ) *Ομάδα Καθηγητών* - Μαθηματικά Γ′ Λυκείου Κατεύθυνσης τεύχη Α,Β,Γ και Δ, ΥΠΠΑΝ, 2η έκδοση, 2019