ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
Β ΛΥΚΕΙΟΥ [ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ]

Λύσεις των σχολικών ασκήσεων

Όριο και συνέχεια συνάρτησης

0.1 Παράγραφος 5.5-Η έννοια του μη-πεπερασμένου ορίου

Άσκηση 1

Να υπολογίσετε (αν υπάρχουν) τα πιο κάτω όρια:

(α′) $\lim\limits_{x\to 4-} \dfrac{1}{x-4}$

(β′) $\lim\limits_{x\to -2+} \dfrac{1}{x+2}$

(γ′) $\lim\limits_{x\to 7+} \dfrac{1}{(7-x)^3}$

(δ′) $\lim\limits_{x\to -3-} \dfrac{1}{(x+3)^{2018}}$

Απάντηση

(α′) Αφού $x-4<0$ για $x<4$, έχουμε

$$\lim_{x\to 4-} \frac{1}{x-4} = -\infty.$$

(β′) Αφού $x+2 = x-(-2) > 0$ για $x > -2$, έχουμε

$$\lim_{x\to -2+} \frac{1}{x+2} = +\infty.$$

(γ′) Αφού $x > 7 \Rightarrow 7-x < 0 \Rightarrow (7-x)^3 < 0$, τότε

$$\lim_{x\to 7+} \frac{1}{(7-x)^3} = -\infty.$$

(δ′) Αφού $x < -3 \Rightarrow x+3 = x-(-3) < 0 \Rightarrow (x+3)^{2018} > 0$, τότε

$$\lim_{x\to -3-} \frac{1}{(x+3)^{2018}} = +\infty.$$

Άσκηση 2

Να υπολογίσετε το

$$\lim_{x\to 3} f(x),$$

όταν

$$\lim_{x\to 3} (f(x)\cdot(3x^2-4)) = -\infty.$$

Απάντηση.
Δεδομένου ότι το όριο $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$ υπάρχει (στο εκτεταμένο σύνολο των πραγματικών αριθμών), τότε

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 3}(f(x)\cdot(3x^2-4)) = -\infty \quad &\Rightarrow \quad \left(\lim_{x\to 3} f(x)\right)\cdot\left(\lim_{x\to 3}(3x^2-4)\right) = -\infty \\
&\Rightarrow \quad \left(\lim_{x\to 3} f(x)\right)\cdot(3\cdot 3^2-4) = -\infty \\
&\Rightarrow \quad \left(\lim_{x\to 3} f(x)\right)\cdot 23 = -\infty \\
&\Rightarrow \quad \lim_{x\to 3} f(x) = -\infty.
\end{aligned}$$

Άσκηση 3

Να χαρακτηρίσετε ΣΩΣΤΟ ή ΛΑΘΟΣ την καθεμιά από τις πιο κάτω προτάσεις και να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

(α΄) Αν $\lim\limits_{x\to 3} f(x) = +\infty$ και $\lim\limits_{x\to 3} g(x) = -\infty$, τότε $\lim\limits_{x\to 3}(f(x)-g(x)) = +\infty$.

(β΄) Αν $\lim\limits_{x\to 2-}\dfrac{1}{f(x)} = +\infty$ και $\lim\limits_{x\to 2-} g(x) = -1$, τότε $\lim\limits_{x\to 2-}\dfrac{g(x)}{f(x)} = +\infty$.

(γ΄) Ισχύει ότι $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x^{2\nu+1}} = +\infty, \quad \nu\in\mathbb{N}$.

Απάντηση.

(α΄) **Σωστό**. Είναι άμεσο αφού τα όρια $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$ και $\lim\limits_{x\to 3} g(x)$ υπάρχουν στο εκτεταμένο σύνολο των πραγματικών αριθμών:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 3}(f(x)-g(x)) &= \lim_{x\to 3} f(x) - \lim_{x\to 3} g(x) \\
&= (+\infty)-(-\infty) \\
&= (+\infty)+(+\infty) = +\infty.
\end{aligned}$$

(β΄) **Λάθος**. Για παράδειγμα, έστω η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{2-x}$ και η g με τύπο $g(x) = -1$. Τότε αφού $x<2 \Rightarrow -x>-2 \Rightarrow 2-x>0$ και αρα

$$\lim_{x\to 2-}\frac{1}{f(x)} = \lim_{x\to 2-}\frac{1}{2-x} = +\infty$$

και

$$\lim_{x\to 2-} g(x) = \lim_{x\to 2-}(-1) = -1$$

ενώ

$$\lim_{x\to 2-}\frac{g(x)}{f(x)} = \lim_{x\to 2-}\frac{1}{x-2} = -\infty$$

αφού $x<2 \Rightarrow x-2<0$.

(γ΄) Λάθος. Για παράδειγμα, στην περίπτωση που $\nu = 3$, τότε

$$\lim_{x\to 0+} \frac{1}{x^3} = +\infty$$

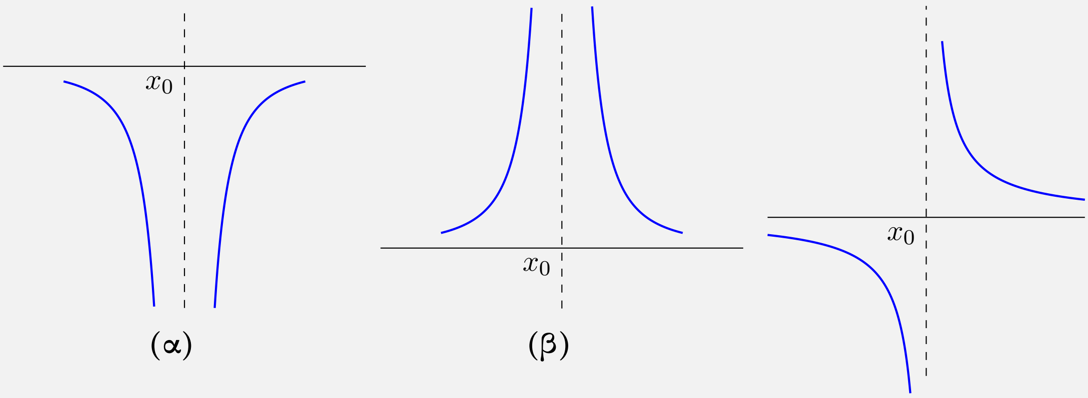
(αφού $x > 0 \Rightarrow x^3 > 0$) και

$$\lim_{x\to 0-} \frac{1}{x^3} = -\infty$$

(αφού $x < 0 \Rightarrow x^3 < 0$). Συνεπώς, αφού τα πλευρικά όρια (υπάρχουν στο εκτεταμένο σύνολο των πραγματικών αριθμών) είναι διαφορετικά μεταξύ τους, το όριο $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x^3}$ δεν υπάρχει (στο εκτεταμένο σύνολο των πραγματικών αριθμών).

Άσκηση 4

Δίνονται οι γραφικές παραστάσεις συναρτήσεων με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R} - \{x_0\}$. Να βρείτε (αν υπάρχει) το όριο στο x_0 σε κάθε περίπτωση.



(α) (β) (γ)

Απάντηση.

(α) Από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης (έστω f) έχουμε

$$\lim_{x\to x_0-} f(x) = -\infty = \lim_{x\to x_0+} f(x)$$

και αρα

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = -\infty.$$

(β) Από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης (έστω g) έχουμε

$$\lim_{x\to x_0-} g(x) = +\infty = \lim_{x\to x_0+} g(x)$$

και αρα

$$\lim_{x\to x_0} g(x) = +\infty.$$

(γ) Από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης (έστω h) έχουμε

$$\lim_{x\to x_0-} h(x) = -\infty \neq +\infty = \lim_{x\to x_0+} h(x)$$

και αρα το όριο $\lim\limits_{x\to x_0} h(x)$ δεν υπάρχει.

Άσκηση 5

Να υπολογίσετε (αν υπάρχει) το όριο της f στο $x = 0$:

(α΄) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x^2}, & x < 0 \\ \dfrac{1}{x}, & x > 0 \end{cases}$.

(β΄) $f(x) = \begin{cases} x, & x \leq 0 \\ \dfrac{1}{x^3}, & x > 0 \end{cases}$.

Απάντηση

(α΄) Εδώ είναι $D(f) = \mathbb{R} - \{0\}$.
Υπολογίζουμε τα πλευρικά όρια της f στο $x = 0$:

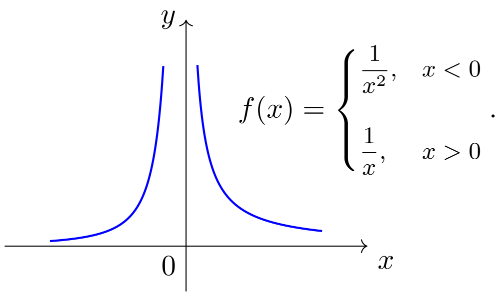
$$\lim_{x\to 0-} f(x) = \lim_{x\to 0-} \frac{1}{x^2} = +\infty,$$

(αφού $x < 0 \Rightarrow x^2 > 0$) και

$$\lim_{x\to 0+} f(x) = \lim_{x\to 0+} \frac{1}{x} = +\infty,$$

(αφού $x > 0$) και αρα

$$\lim_{x\to 0} f(x) = +\infty \in \overline{\mathbb{R}}.$$



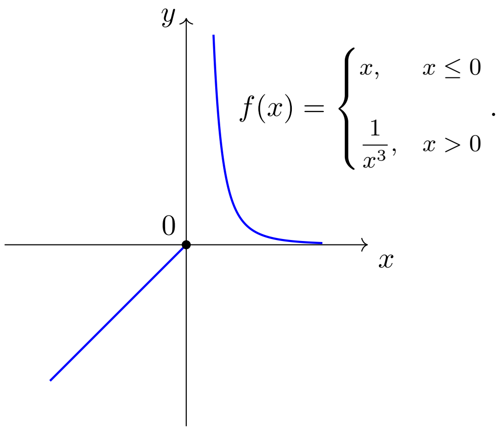
(β΄) Εδώ είναι $D(f) = \mathbb{R}$.
Υπολογίζουμε τα πλευρικά όρια της f στο $x = 0$:

$$\lim_{x\to 0-} f(x) = \lim_{x\to 0-} x = 0$$

και

$$\lim_{x\to 0+} f(x) = \lim_{x\to 0+} \frac{1}{x^3} = +\infty,$$

(αφού $x > 0 \Rightarrow x^3 > 0$) και αρα αφού τα πλευρικά όρια (ενώ υπάρχουν αμφότερα στο εκτεταμένο σύνολο των πραγματικών αριθμών) είναι διαφορετικά μεταξύ τους, το όριο $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ δεν υπάρχει.



Άσκηση 6

Να υπολογίσετε (αν υπάρχουν) τα πιο κάτω όρια:

(α΄) $\lim_{x \to 0-} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{|x|} \right)$

(β΄) $\lim_{x \to 4} \frac{x^2 + x - 1}{4 - x}$

(γ΄) $\lim_{x \to -3} \frac{2x^2 + 1}{|x + 3|}$

(δ΄) $\lim_{x \to 3} \frac{x + 3}{x^2 - 6x + 9}$

Απάντηση

(α΄) Η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{|x|}$ έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R} - \{0\}$. Επίσης, είναι τμηματικού τύπου: για $x > 0 \Rightarrow |x| = x$ και για $x < 0 \Rightarrow |x| = -x$ και αρα

$$f(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{|x|} = \begin{cases} \frac{1}{x} - \frac{1}{-x} = \frac{2}{x}, & x < 0 \\ \frac{1}{x} - \frac{1}{x} = 0, & x > 0 \end{cases}.$$

Συνεπώς,

$$\lim_{x \to 0-} f(x) = \lim_{x \to 0-} \frac{2}{x} = 2 \lim_{x \to 0-} \frac{1}{x} = -\infty.$$

Σημείωση: αφού

$$\lim_{x \to 0+} f(x) = \lim_{x \to 0+} 0 = 0,$$

έπεται ότι το όριο $\lim_{x \to 0} f(x)$ δεν υπάρχει.

(β΄) Το πεδίο ορισμού της f είναι το $\mathbb{R} - \{4\}$.
Υπολογίζουμε τα όρια:

$$\lim_{x \to 4-} (x^2 + x - 1) = 19$$

και
$$\lim_{x\to 4-}\frac{1}{4-x}=+\infty,$$
(αφού $x<4\Rightarrow 4-x>0$). Συνεπώς, αφού τα πιο πάνω όρια υπάρχουν (στο $\overline{\mathbb{R}}$), έπεται ότι
$$\lim_{x\to 4-}f(x)=\left(\lim_{x\to 4-}(x^2+x-1)\right)\cdot\left(\lim_{x\to 4-}\frac{1}{4-x}\right)=19\cdot(+\infty)=+\infty.$$
Εκτελούμε την ίδια διαδικασία για $x\to 4+$:
$$\lim_{x\to 4+}(x^2+x-1)=19$$
και
$$\lim_{x\to 4+}\frac{1}{4-x}=-\infty,$$
(αφού $x>4\Rightarrow 4-x<0$). Συνεπώς,
$$\lim_{x\to 4+}f(x)=\left(\lim_{x\to 4+}(x^2+x-1)\right)\cdot\left(\lim_{x\to 4+}\frac{1}{4-x}\right)=19\cdot(-\infty)=-\infty.$$
Άρα,
$$\lim_{x\to 4-}f(x)\neq\lim_{x\to 4+}f(x)$$
και αρα το όριο $\lim\limits_{x\to 4}f(x)$ δεν υπάρχει.

(γ΄) Η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{2x^2+1}{|x+3|}$ έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}-\{-3\}$. Επίσης, είναι τμηματικού τύπου: για $x>-3\Rightarrow x+3>0\Rightarrow |x+3|=x+3$ και για $x<-3\Rightarrow x+3<0\Rightarrow |x+3|=-(x+3)$. Συνεπώς,
$$f(x)=\frac{2x^2+1}{|x+3|}=\begin{cases}\dfrac{2x^2+1}{x+3}, & x>-3\\[2ex] -\dfrac{2x^2+1}{x+3}, & x<-3\end{cases}.$$
Υπολογίζουμε τα όρια:
$$\lim_{x\to -3-}(2x^2+1)=19$$
και
$$\lim_{x\to -3-}f(x)=-\lim_{x\to -3-}\frac{1}{x+3}=-(-\infty)=+\infty,$$
(αφού $x<-3\Rightarrow x+3<0$). Συνεπώς, αφού τα πιο πάνω όρια υπάρχουν (στο $\overline{\mathbb{R}}$),
$$\lim_{x\to -3-}f(x)=\left(\lim_{x\to -3-}(2x^2+1)\right)\cdot\left(\lim_{x\to -3-}\frac{1}{x+3}\right)=19\cdot(+\infty)=+\infty.$$
Εκτελούμε την ίδια διαδικασία για $x\to -3+$:
$$\lim_{x\to -3+}(2x^2+1)=19$$

και
$$\lim_{x\to -3+} f(x) = \lim_{x\to -3+} \frac{1}{x+3} = +\infty,$$
(αφού $x > -3 \Rightarrow x+3 > 0$). Συνεπώς, αφού τα πιο πάνω όρια υπάρχουν (στο $\overline{\mathbb{R}}$),
$$\lim_{x\to -3+} f(x) = \left(\lim_{x\to -3+}(2x^2+1)\right)\cdot\left(\lim_{x\to -3+}\frac{1}{x+3}\right) = 19\cdot(+\infty) = +\infty.$$
Άρα, αφού τα πλευρικά όρια εκτατέρωθεν του $x = -3$ υπάρχουν (στο $\overline{\mathbb{R}}$) και ισούνται μεταξύ τους (με $+\infty$), έχουμε ότι
$$\lim_{x\to -3} f(x) = +\infty.$$

(δ′) $f(x) = \dfrac{x+3}{x^2-6x+9} = \dfrac{x+3}{(x-3)^2}$. Το πεδίο ορισμού της f είναι το $\mathbb{R} - \{3\}$.
Για $x < 3$ όπως επίσης και για $x > 3$ είναι $(x-3)^2 > 0$ και αρα
$$\lim_{x\to 3-}\frac{1}{(x-3)^2} = +\infty = \lim_{x\to 3+}\frac{1}{(x-3)^2}$$
και αφού
$$\lim_{x\to 3-}(x+3) = 6 = \lim_{x\to 3+}(x+3),$$
έχουμε ότι
$$\lim_{x\to 3-} f(x) = \left(\lim_{x\to 3-}(x+3)\right)\cdot\left(\lim_{x\to 3-}\frac{1}{(x-3)^2}\right) = 6\cdot(+\infty) = +\infty$$
και
$$\lim_{x\to 3+} f(x) = \left(\lim_{x\to 3+}(x+3)\right)\cdot\left(\lim_{x\to 3+}\frac{1}{(x-3)^2}\right) = 6\cdot(+\infty) = +\infty.$$
Συνεπώς,
$$\lim_{x\to 3} f(x) = +\infty.$$