

Ιωάννης Ι. Ιωακείμ - Χριστόδουλος Σοφοκλέους
Τμήμα Μαθηματικών και Στατιστικής
Πανεπιστήμιο Κύπρου

Μια εισαγωγή στις Συνήθεις Διαφορικές Εξισώσεις

Copyright © 2021

Το βιβλίο αυτό τυπώθηκε στη Λευκωσία. Όλα τα δικαιώματα διατηρούνται. Απαγορεύονται η ανατύπωση ή η αντιγραφή μέρους ή ολόκληρου του βιβλίου, η αποθήκευση σε αρχείο πληροφοριών, η μετάδοση με οποιοδήποτε μέσο επικοινωνίας (ηλεκτρονικό, μηχανικό, φωτοαντιγραφικό, κτλ.) χωρίς να προηγηθεί έγγραφη άδεια των συγγραφέων.

ISBN 978-9963-2829-4-4

Περιεχόμενα

Πρόλογος	5
1 Εισαγωγή	7
1.1 Βασικοί ορισμοί	7
1.2 Προβλήματα αρχικών και συνοριακών τιμών	13
1.3 Διαφορικές εξισώσεις ως μαθηματικά μοντέλα	16
Ασκήσεις	20
2 Διαφορικές εξισώσεις πρώτης τάξης	21
2.1 Εισαγωγή	21
2.2 Διαφορικές εξισώσεις χωριζομένων μεταβλητών	21
2.3 Ομογενείς διαφορικές εξισώσεις πρώτης τάξης	25
2.4 Γραμμικές διαφορικές εξισώσεις πρώτης τάξης	26
2.5 Ειδικές μορφές διαφορικών εξισώσεων	29
2.5.1 Διαφορική εξίσωση του Bernoulli	29
2.5.2 Διαφορική εξίσωση του Riccati	30
2.6 Ακριβείς διαφορικές εξισώσεις	31
2.6.1 Αναγωγή σε ακριβή διαφορική εξίσωση	36
2.7 Υπολογισμός της λύσης με αντικατάσταση	38
2.8 Διαφορικές εξισώσεις που λύνονται ως προς x ή ως προς y	42
2.9 Ύπαρξη και μοναδικότητα λύσης	44
2.10 Εφαρμογές	46
Ασκήσεις	53
3 Γραμμικές διαφορικές εξισώσεις δεύτερης τάξης	61
3.1 Εισαγωγή	61
3.2 Μείωση της τάξης της διαφορικής εξίσωσης	68
3.3 Ομογενείς εξισώσεις με σταθερούς συντελεστές	70
3.4 Λύση της μη-ομογενούς εξίσωσης με σταθερούς συντελεστές	74
3.4.1 Μέθοδος των απροσδιόριστων συντελεστών	74
3.4.2 Μέθοδος της μεταβολής των παραμέτρων	77
3.5 Διαφορική εξίσωση του Euler	80
3.6 Εφαρμογές	82
Ασκήσεις	88
4 Διαφορικές εξισώσεις ανώτερης τάξης	93
4.1 Εισαγωγή	93
4.2 Ομογενείς διαφορικές εξισώσεις ανώτερης τάξης	97
4.3 Μη-ομογενείς διαφορικές εξισώσεις ανώτερης τάξης	100
4.4 Ειδικό θέμα: Γραμμικοί Διαφορικοί Τελεστές	106
Ασκήσεις	117

5	Συστήματα διαφορικών εξισώσεων	119
5.1	Εισαγωγή	119
5.2	Ομογενή γραμμικά συστήματα με σταθερούς συντελεστές	126
5.2.1	Επίλυση με τη μέθοδο διαγωνοποίησης του πίνακα του συστήματος	140
5.3	Μη ομογενή γραμμικά συστήματα	143
5.4	Ειδικό θέμα: αναλυτική συνάρτηση πίνακα	149
5.4.1	Το Θεώρημα των Cayley-Hamilton	149
5.4.2	Εκθετικός πίνακας	155
5.5	Εφαρμογές	157
	Ασκήσεις	159
6	Μετασχηματισμός του Laplace	163
6.1	Εισαγωγή	163
6.1.1	Μετασχηματισμένες Laplace βασικών συναρτήσεων	168
6.2	Ιδιότητες της μετασχηματισμένης Laplace	171
6.3	Συνέλιξη συναρτήσεων (Convolution)	182
6.4	Μετασχηματισμένη Laplace περιοδικής συνάρτησης	185
6.5	Αντίστροφη μετασχηματισμένη Laplace	186
6.5.1	Ιδιότητες της αντίστροφης μετασχηματισμένης Laplace	188
6.5.2	Υπολογισμός αντίστροφης μετασχηματισμένης Laplace ρητής συνάρτησης	191
6.6	Μετασχηματισμένες Laplace ειδικών συναρτήσεων	194
6.7	Εφαρμογές στην επίλυση διαφορικών εξισώσεων	199
6.7.1	Ειδικό θέμα: Ο τύπος του Green	204
	Ασκήσεις	208
7	Η μέθοδος των δυναμοσειρών	211
7.1	Εισαγωγικά	211
7.1.1	Δυναμοσειρές	211
7.1.2	Αλλαγή στο δείκτη άθροισης σε δυναμοσειρά	215
7.1.3	Προσέγγιση συναρτήσεων κατά Taylor	217
7.2	Η μέθοδος των Δυναμοσειρών στην επίλυση διαφορικών εξισώσεων	225
7.3	Μέθοδος του Frobenius	229
7.4	Ειδικές Συναρτήσεις	237
	Ασκήσεις	243
	Παράρτημα	245
	Γραμμική Άλγεβρα	245
	Πίνακες	245
	Γραμμικά Συστήματα	247
	Ιδιοτιμές-Ιδιοδιανύσματα	250
	Τεχνικές Ολοκλήρωσης	256
	Ολοκλήρωμα ρητής συνάρτησης	258
	Τριγωνομετρικές αντικαταστάσεις	265
	Ολοκλήρωση κατά παράγοντες	267
	Αόριστα ολοκληρώματα οριζόμενα αναδρομικά	268
	Διανυσματικός Λογισμός στις πολλές μεταβλητές	271
	Γενικευμένα Ολοκληρώματα	275
	Γενικευμένα Ολοκληρώματα Α' Είδους	275
	Γενικευμένα ολοκληρώματα Β' είδους	282
	Επιπρόσθετες Ασκήσεις	287
	Απαντήσεις των Ασκήσεων	293
	Βιβλιογραφία	301

Πρόλογος

Αρκετά προβλήματα στις θετικές επιστήμες και στη μηχανική απαιτούν την περιγραφή κάποιας μετρήσιμης ποσότητας (θέση, θερμοκρασία, πληθυσμός, ηλεκτρικό ρεύμα κ.λ.π.) ως συνάρτηση του χρόνου. Συχνά, οι επιστημονικοί νόμοι που διέπουν τέτοιες ποσότητες, εκφράζονται καλύτερα ως εξισώσεις που περιλαμβάνουν το ρυθμό με τον οποίο αυτή η ποσότητα αλλάζει με την πάροδο του χρόνου. Τέτοιοι νόμοι οδηγούν στη δημιουργία **Διαφορικών Εξισώσεων**. Τρία τέτοια προβλήματα είναι ο νόμος της ψύξης του Newton, η ραδιενεργή αποσύνθεση και οι νόμοι κίνησης του Newton.

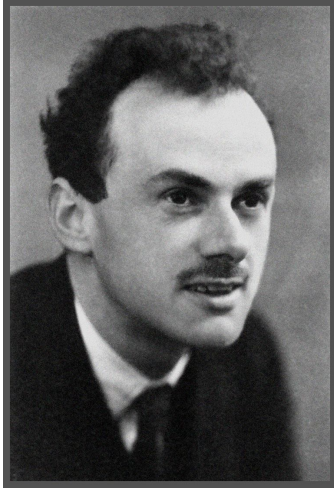
Το θέμα των Διαφορικών Εξισώσεων αποτελεί έναν μεγάλο και πολύ σημαντικό κλάδο των σύγχρονων Μαθηματικών. Από τις πρώτες μέρες του Απειροστικού Λογισμού, το θέμα ήταν ένας τομέας μεγάλης θεωρητικής έρευνας και πρακτικών εφαρμογών, και συνεχίζει να είναι και στις μέρες μας. Οι Διαφορικές Εξισώσεις χρονολογούνται από τα μέσα του δέκατου έβδομου αιώνα, όταν ο Λογισμός ανακαλύφθηκε ανεξάρτητα από τον Newton (περ. 1665) και τον Leibniz (περ. 1684). Η σύγχρονη μαθηματική φυσική ξεκίνησε ουσιαστικά με το “Newton’s Principia” (δημοσιεύτηκε το 1687) στο οποίο όχι μόνο ανέπτυξε το Λογισμό αλλά παρουσίασε και τους τρεις θεμελιώδεις νόμους της κίνησης που κατέστησαν δυνατή τη μαθηματική μοντελοποίηση φυσικών φαινομένων.

Όταν η άγνωστη συνάρτηση εξαρτάται μόνο από μια μεταβλητή τότε η Διαφορική Εξίσωση καλείται **Συνήθης**, ενώ στην περίπτωση που η άγνωστη συνάρτηση εξαρτάται από δύο ή περισσότερες μεταβλητές καλείται **Μερική**. Σε αυτό το εγχειρίδιο θα ασχοληθούμε μόνο με Συνήθεις Διαφορικές Εξισώσεις. Πιο συγκεκριμένα, το εγχειρίδιο συγκεντρώνεται στην εύρεση της λύσης της Διαφορικής Εξίσωσης.

Δόθηκε έμφαση στο υπολογιστικό κομμάτι με πληθώρα παραδειγμάτων, εφαρμογών και εκτενούς σχολιασμού. Παρ’ όλα αυτά, δίνονται αποδείξεις αρκετών αποτελεσμάτων τα οποία σε συνδυασμό με τις θεωρητικές ασκήσεις στο τέλος της κάθε ενότητας, δίνουν στον αναγνώστη που θέλει να εντρυφήσει, τα εφόδια για να ξεκλειδώσει τους (θεωρητικούς) μηχανισμούς που διέπουν το αντικείμενο.

Λευκωσία,
Αύγουστος 2021

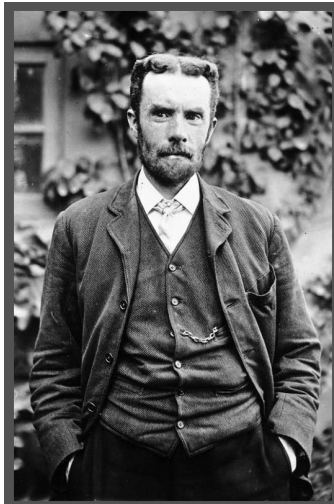
Ιωάννης Ι. Ιωακείμ
Χριστόδουλος Σοφοκλέους



Paul Adrien Maurice Dirac
(8 Αυγ. 1902 – 20 Οκτ. 1984)

Άγγλος θεωρητικός Φυσικός.
Θεωρείται ένας από τους σημαντικότερους Φυσικούς του 20ου αιώνα. Έλαβε το βραβείο Nobel Φυσικής το 1933.
Η κύρια συμβολή του στην ανάπτυξη της σύγχρονης επιστήμης ήταν να τοποθετήσει τις εξισώσεις της ειδικής σχετικότητας με τις εξισώσεις της κβαντομηχανικής σε ένα ενοποιημένο σύνολο.

Το βιβλίο του 'The Principles of Quantum Mechanics' το οποίο εκδόθηκε το 1930, θεωρείται ορόσημο στην ιστορία των Επιστημών.



Oliver Heaviside
(18 Μαΐου 1850 – 3 Φεβρ. 1925)

Άγγλος Μαθηματικός και Φυσικός.
Εισηγάγε τη θεωρία των Μιγαδικών αριθμών στην ανάλυση κυκλωμάτων, εφηύρε μέθοδο επίλυσης διαφορικών εξισώσεων (ισοδύναμη με το μετασχηματισμό Laplace), ανέπτυξε ανεξάρτητα το διανυσματικό λογισμό και επαναδιατύπωσε τις εξισώσεις του Maxwell στη μορφή που χρησιμοποιούνται σήμερα.

Ο λογισμός πίσω από το μετασχηματισμό Laplace ξεκίνησε από την προσπάθεια γνωστών Μαθηματικών να δικαιολογήσουν αυστηρά τους κανόνες λογισμού που εισήγαγε ο Heaviside στην επίλυση διαφορικών εξισώσεων στον ηλεκτρομαγνητισμό. Η προσπάθεια αυτή υλοποιήθηκε μέσα από την εισαγωγή εργαλείων της Μιγαδικής Ανάλυσης.

Πηγή: <https://en.wikipedia.org/>