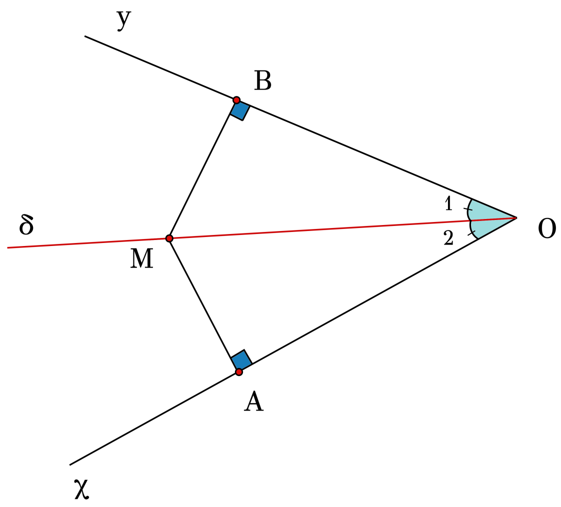


Σχήμα 1.1

## 1.2 Μέθοδος της εις άτοπον απαγωγής

Ασκήσεις σελ. 18.

**Άσκηση 1**

Να αποδείξετε ότι αν ο $a^2 - 2a + 7$, $a \in \mathbb{Z}$ είναι περιττός αριθμός, τότε ο αριθμός $a$ είναι άρτιος αριθμός.

**Λύση**

Θα το δείξουμε με τη μέθοδο της εις άτοπον απαγωγής.
Έστω λοιπόν ότι ο αριθμός $a$ **ΔΕΝ είναι άρτιος**, δηλ. ότι είναι περιττός. Τότε είναι της μορφής $2m - 1$, όπου $m \in \mathbb{N}$. Τότε,

$$\begin{aligned} a^2 - 2a + 7 &= (2m-1)^2 - 2(2m-1) + 7 = 4m^2 - 4m + 1 - 4m + 2m + 7 \\ &= 4m^2 - 6m + 8 = 2\underbrace{(2m^2 - 3m + 4)}_{\in \mathbb{N}}, \end{aligned}$$

δηλ. $a^2 - 2a + 7$ είναι πολλαπλάσιο του αριθμού 2, δηλαδή άρτιος, άτοπο.
Άρα, ο $a$ είναι άρτιος αριθμός. ◀

**Άσκηση 2**

Για κάθε πραγματικό αριθμό $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, να αποδείξετε ότι

$$\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x \geq 1.$$

**Λύση**

**1ος τρόπος (με τη μέθοδο της εις άτοπον απαγωγής)**
Υποθέτουμε (δηλαδή την **άρνηση της προς απόδειξη πρότασης**) ότι υπάρχει[1] $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, τέτοιος ώστε ισχύει

$$\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x < 1.$$

[1] Αυτό σημαίνει πως υπάρχει **τουλάχιστον** ένας.

Τότε,

$$\etaμx + \sigmaυνx < 1 \Rightarrow (\etaμx + \sigmaυνx)^2 < 1,$$

δηλαδή

$$\etaμ^2x + 2\etaμx\sigmaυνx + \sigmaυν^2x < 1$$

και αφού $\etaμ^2x + \sigmaυν^2x = 1$, το πιο πάνω δίνει

$$2\etaμx\sigmaυνx < 0$$

το οποίο δεν μπορεί να συμβαίνει, αφού

$$x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \Rightarrow \etaμx,\ \sigmaυνx \geq 0 \Rightarrow \etaμx\sigmaυνx \geq 0 \Rightarrow 2\etaμx\sigmaυνx \geq 0.$$

**Καταλήξαμε λοιπόν σε άτοπον.**
Άρα, για κάθε πραγματικό αριθμό $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, είναι

$$\etaμx + \sigmaυνx \geq 1.$$

**2ος τρόπος (με ευθεία απόδειξη)**
Έστω (**τυχόν**) $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Τότε

$$\begin{cases} 0 \leq \etaμx \leq 1 \\ 0 \leq \sigmaυνx \leq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 \leq \etaμx \leq \etaμ^2x \\ 0 \leq \sigmaυνx \leq \sigmaυν^2x \end{cases} \Rightarrow \etaμx + \sigmaυνx \geq \etaμ^2x + \sigmaυν^2x = 1.$$

◀

**Άσκηση 3**

Αν $x \in \mathbb{R}$ και $1 \leq x$, να αποδείξετε ότι:

$$\sqrt{x} \leq x.$$

**Λύση**
**(με τη μέθοδο της εις άτοπον απαγωγής)**
Υποθέτουμε ότι $\exists x \in [1, +\infty)$, τέτοιος ώστε $\sqrt{x} > x$.. Τότε (αφού $x \geq 1 > 0$),

$$\begin{aligned} \sqrt{x} > x \quad &\Leftrightarrow \quad \sqrt{x} - x > 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} - \sqrt{x^2} > 0 \\ &\Leftrightarrow \quad \sqrt{x}(1 - \sqrt{x}) > 0 \\ &\Leftrightarrow \quad x < 1, \end{aligned}$$

άτοπο. ◀

**Άσκηση 4**

Να αποδείξετε ότι κάθε τρίγωνο έχει το πολύ μία ορθή γωνία.

**Λύση**
Θεωρείται γνωστό ότι το άθροισμα των γωνιών ενός τριγώνου είναι ίσο με 180 μοίρες.

Υποθέτουμε ότι στο τρίγωνο $AB\Gamma$, οι γωνίες $\widehat{A}$ και $\widehat{B}$ είναι ορθές. Τότε,

$$\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{\Gamma} = 180^\circ + \widehat{\Gamma} > 180^\circ,$$

άτοπο, αφού $\widehat{A}+\widehat{B}+\widehat{\Gamma}=180°$.
Έτσι, κάθε τρίγωνο δεν μπορεί να έχει δύο ή περισσότερες ορθές γωνίες, άρα έχει το πολύ μία. Στην περίπτωση που δεν έχει καμία, το τρίγωνο λέγεται **οξυγώνιο** ενώ στην περίπτωση που έχει (ακριβώς) μία ορθή, λέγεται **ορθογώνιο**.

Το ίδιο αποτέλεσμα ισχύει και αντί 'ορθή' θεωρήσουμε τη λέξη 'αμβλεία' γωνία.

Για να δώσουμε μια **ευθεία** απόδειξη του πιο πάνω, θεωρείται γνωστό το ακόλουθο Θεώρημα από την Ευκλείδεια Γεωμετρία:

Κάθε εξωτερική γωνία ενός τριγώνου είναι μεγαλύτερη από καθεμία από τις απέναντι γωνίες του τριγώνου.

Υποθέτουμε π.χ. ότι η γωνία $\widehat{B}$ του τριγώνου $AB\Gamma$ είναι ορθή. Θα δείξουμε ότι οι άλλες δύο γωνίες του τριγώνου είναι οξείες.
Η $\widehat{B}_{\varepsilon\xi.}$ είναι παραπληρωματική της $\widehat{B}$, άρα και αυτή ορθή και αφού $\widehat{A}<\widehat{B}_{\varepsilon\xi.}\Rightarrow\widehat{A}<90°$. Ομοίως, $\widehat{\Gamma}<90°$. ◄