ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Β Λυκειου (κατευθυνσης)

Ιωάννης Ι. Ιωακείμ

9 Σεπτεμβρίου 2021

Κεφάλαιο 1

Μέθοδοι απόδειξης

1.1 Εισαγωγή – Έννοια της Απόδειξης

Ασκήσεις σελ. 15

Άσκηση 1

Δίνονται οι αριθμοί $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{Z}$, τέτοιοι ώστε ο αριθμός α να διαιρεί τον αριθμό β και επίσης να διαιρεί τον γ. Να αποδείξετε ότι ο α διαιρεί τη διαφορά $\beta - \gamma$.

Λύση

Η υπόθεσή μας είναι οι προτάσεις '(α να διαιρεί τον αριθμό β)' και και '(α να διαιρεί τον αριθμό γ)' οι οποίες είναι ισοδύναμες με τις

$$(\exists k \in \mathbb{Z} \ : \ \beta = k\alpha)$$

και

$$(\exists m \in \mathbb{Z} \ : \ \gamma = m\alpha)$$

αντίστοιχα (δηλ. ότι οι β και γ είναι **πολλαπλάσια** του αριθμού α).
Τότε,

$$\beta - \gamma = k\alpha - m\alpha = \underbrace{(k - m)}_{\in\mathbb{Z}}\, a,$$

δηλ. η διαφορά $\beta - \gamma$ είναι πολλαπλάσιο του αριθμού α και το αποτέλεσμα έπεται. $\blacktriangleleft$

Άσκηση 2

Έστω α, β πραγματικοί θετικοί αριθμοί. Να αποδείξετε ότι αν $\alpha \leq \beta$, τότε $\sqrt{\alpha} \leq \sqrt{\beta}$.

Λύση

Αφού οι α, β είναι πραγματικοί θετικοί αριθμοί, έπεται ότι οι αριθμοί $\sqrt{\alpha}$ και $\sqrt{\beta}$ έχουν νόημα.
Αφού $(\sqrt{\alpha})^2 =$ και $(\sqrt{\beta})^2 = \beta$, έχουμε

$$\alpha \leq \beta \Rightarrow (\sqrt{\alpha})^2 \leq (\sqrt{\beta})^2 \Rightarrow (\sqrt{\alpha})^2 - (\sqrt{\beta})^2 \leq 0,$$

δηλαδή (διαφορά δύο τετραγώνων)

$$(\sqrt{\alpha} - \sqrt{\beta})(\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta}) \leq 0.$$

Αλλά, $\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta} \geq 0$ (με την ισότητα να ισχύει μόνον για $\alpha = \beta = 0$) και αρα η πιο πάνω πρόταση είναι ισοδύναμη με την

$$\sqrt{\alpha} - \sqrt{\beta} \leq 0,$$

δηλαδή με την

$$\sqrt{\alpha} \leq \sqrt{\beta}.$$

Ας σημειώσουμε ότι η ισότητα ισχύει αν και μόνον αν $\alpha = \beta$. ◀

Άσκηση 3

Αν $x, y \in \mathbb{R}$, έτσι ώστε $36x^2 + 3y = 4y^2 + 9x$, να αποδείξετε ότι $y = 3x$ ή $12x + 4y = 3$.

Λύση

Έχουμε

$$\begin{aligned} 36x^2 + 3y = 4y^2 + 9x &\Leftrightarrow 36x^2 - 9x = 4y^2 - 3y \\ &\Leftrightarrow 9(4x^2 - x) = 4y^2 - 3y \qquad (1.1) \end{aligned}$$

Αλλά

$$4x^2 - x = (2x)^2 - 2 \cdot \frac{1}{4} \cdot 2x + \left(\frac{1}{4}\right)^2 - \left(\frac{1}{4}\right)^2 = \left(2x - \frac{1}{4}\right)^2 - \frac{1}{16}$$

και

$$4y^2 - 3y = (2y)^2 - 2 \cdot \frac{3}{4} \cdot 2y + \left(\frac{3}{4}\right)^2 - \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \left(2y - \frac{3}{4}\right)^2 - \frac{9}{16}.$$

Αντικαθιστούμε στην (1.1):

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow \quad 9\left[\left(2x - \frac{1}{4}\right)^2 - \frac{1}{16}\right] = \left(2y - \frac{3}{4}\right)^2 - \frac{9}{16} \\ &\Leftrightarrow \quad 9\left(2x - \frac{1}{4}\right)^2 - \frac{9}{16} = \left(2y - \frac{3}{4}\right)^2 - \frac{9}{16} \\ &\Leftrightarrow \quad 9\left(2x - \frac{1}{4}\right)^2 = \left(2y - \frac{3}{4}\right)^2 \\ &\Leftrightarrow \quad \left[3\left(2x - \frac{1}{4}\right)\right]^2 - \left(2y - \frac{3}{4}\right)^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad \left[3\left(2x - \frac{1}{4}\right) - \left(2y - \frac{3}{4}\right)\right] \cdot \left[3\left(2x - \frac{1}{4}\right) + \left(2y - \frac{3}{4}\right)\right] = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad (6x - 2y) \cdot (6x + 2y - 3/2) = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad (y = 3x) \vee (12x + 4y = 3). \end{aligned}$$

◀

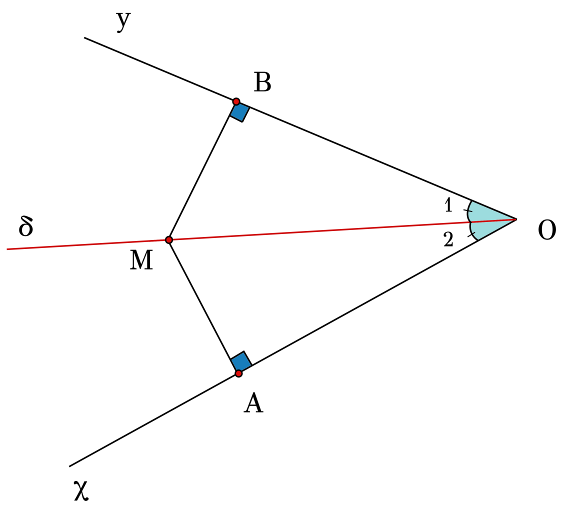
Άσκηση 4

Να αποδείξετε ότι κάθε σημείο της διχοτόμου μίας γωνίας ισαπέχει από τις πλευρές της.

Λύση

Έστω γωνία $x\widehat{O}y$. Φέρουμε τη διχοτόμο δ της γωνίας (δες σχήμα πιο κάτω).
Έστω M τυχαίο σημείο της διχοτόμου. Φέρουμε τις προβολές MA και MB στις πλευρές x και y αντίστοιχα. Θα δείξουμε ότι $(MA) = (MB)$. Συγκρίνουμε τα τρίγωνα OAM και OBM : είναι $(OM) = (OM)$ (κοινή πλευρά), $\widehat{O}_1 = \widehat{O}_2$ (δ διχοτόμος) και $O\widehat{M}B = O\widehat{M}A = 90°$ (από κατασκευή). Άρα, τα τρίγωνα είναι ίσα (Π-Γ-Ο) και αρα $(MA) = (MB)$.

Τώρα, θα δείξουμε ότι κάθε εσωτερικό σημείο M της γωνίας που ισαπέχει από τις πλευρές της ανήκει στη διχοτόμο της: συγκρίνουμε τα τρίγωνα OAM και OBM και βρίσκουμε ότι είναι ίσα, άρα $\widehat{O}_1 = \widehat{O}_2$, συνεπώς, η δ είναι διχοτόμος της $x\widehat{O}y$.



Σχήμα 1.1