Ερώτηση Δειγματικού δοκιμίου (2017)
(α) Πόσες διαφορετικές συναρτήσεις $f : A \to B$ μπορούμε να ορίσουμε, αν A και B μη κενά πεπερασμένα σύνολα με m και n στοιχεία αντίστοιχα ($m \leq n$);

Απάντηση: Υπάρχουν m^n συναρτήσεις $f : A \to B$.
Απόδειξη: Είναι μια κλασική εφαρμογή που συχνά αναφέρεται σε μάθημα 'Συνδυαστικής/Πιθανοτήτων', ως εφαρμογή της Πολλαπλασιαστικής Αρχής.
Έστω $A = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ και $B = \{y_1, y_2, \ldots, y_m\}$ αναγραφές των συνόλων A και B.
Κάθε συνάρτηση $f : A \to B$ 'είναι' μια διατεταγμένη $n-$άδα

$$(f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_n)),$$

όπου κάθε $f(x_i)$ μπορεί να πάρει την τιμή οποιουδήποτε από τα $y_i,\ i \in \{1, 2, \ldots, m\}$. Σύμφωνα λοιπόν με την πολλαπλασιαστική αρχή, υπάρχουν m^n τέτοιες $n-$άδες, δηλ. m^n συναρτήσεις.
Με άλλα λόγια, το σύνολο $A = \{f : A \to B\}$ είναι ισοπληθικό με το σύνολο

$$\{(a_1, \ldots, a_n) \quad a_i \in B,\ i = 1, 2, \ldots, n\} = \underbrace{B \times B \times \ldots \times B}_{n-\text{φορές}}.$$

(β) Αν επιλέξω τυχαία μία συνάρτηση $f : A \to B$, ποιά η πιθανότητα αυτή να είναι 1-1;

Απάντηση: Η ζητούμενη πιθανότητα p είναι ίση με

$$p = \frac{N(X)}{N(\Omega)},$$

όπου

$$X = \{\ f : A \to B \mid f\ 1-1\}$$

και

$$\Omega = \{\ f : A \to B\ \}.$$

Από το ερώτημα (α) είναι $N(\Omega) = m^n$. Μένει λοιπόν να βρούμε το $N(X)$.

Έστω $f : A \to B$ μια 1-1 συνάρτηση. Τότε κάθε στοιχείο $x \in A$ θα απεικονίζεται σε μοναδικό στοιχείο $y \in B$.
Βήμα 1: Επιλογή m στοιχείων $y \in B$ στα οποία τα στοιχεία του A θα απεικονισθούν κατά μοναδικό τρόπο: Υπάρχουν $\binom{m}{n}$ το πλήθος τρόποι
Βήμα 2: Αναδιάταξη των στοιχείων του A (τα οποία θα απεικονισθούν κατά μοναδικό τρόπο στα στοιχεία του B). Υπάρχουν $n!$ το πλήθος τρόποι
Από την πολλαπλαστιαστική αρχή, υπάρχουν

$$\binom{m}{n} \cdot n! = \frac{m!}{(m-n)!} = (m)_n$$

τρόποι.

Διαφορετικά, αφού τα n στοιχεία του $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$ θα απεικονισθούν κατά μοναδικό τρόπο στα στοιχεία του B, έχουμε:

Βήμα 1: αντιστοίχηση του a_1: Υπάρχουν m το πλήθος τρόποι
Βήμα 2: αντιστοίχηση του a_2: Υπάρχουν $m-1$ το πλήθος τρόποι

$$\vdots$$

Βήμα n-1: αντιστοίχηση του a_{n-1}: Υπάρχουν $(m-n)-2$ το πλήθος τρόποι
Βήμα n: αντιστοίχηση του a_n: Υπάρχουν $(m-n)+1$ το πλήθος τρόποι
Από την πολλαπλασιαστική αρχή, υπάρχουν

$$m \cdot (m-1) \cdot (m-2) \cdot \ldots \cdot (m-n+1) = \frac{m!}{(m-n)!}$$

τρόποι.

Άρα,

$$p = \frac{\frac{m!}{(m-n)!}}{m^n} = \frac{m!}{m^n (m-n)!} = \frac{(m)_n}{m^n}.$$

◀