
Ερώτηση Δειγματικού δοκιμίου (2017)

Μετά από τη διδασκαλία του κεφαλαίου Ρίζες Πραγματικών Αριθμών, ζητείται από τους μαθητές να διατάξουν κατά αύξουσα σειρά τους αριθμούς

$$2^{\frac{1}{2}}, \quad 3^{\frac{1}{3}}, \quad 6^{\frac{1}{6}}.$$

Ως διδάσκων, να επιλέξετε ποιες και με ποια σειρά δραστηριότητες θα εφαρμόσετε για καλύτερη κατανόηση της εφαρμογής:

- i. Μετατροπή των δυνάμεων με ρητό εκθέτη, σε ισοδύναμες με ριζικά.
- ii. Μετατροπή των εκθετών σε ισοδύναμα κλάσματα.
- iii. Μετατροπή των εκθετών σε ομώνυμα κλάσματα.
- iv. Χρήση υπολογιστικής μηχανής.

A. (i, ii), B. (ii, i), Γ. (iii, i), Δ. (iii, ii), E. (i, iv)

Απάντηση: Ισχύει η πρόταση:

$$0 \leq a, b, n \in \mathbb{N} \Rightarrow \sqrt[n]{a} \leq \sqrt[n]{b}.$$

Άρα, για καλύτερη κατανόηση της εφαρμογής:

iii. Κάνουμε μετατροπή των εκθετών σε ομώνυμα κλάσματα:

$$2^{\frac{1}{2}} = 2^{\frac{3}{6}}, \quad 3^{\frac{1}{3}} = 3^{\frac{2}{6}}, \quad 6^{\frac{1}{6}}.$$

i. Κάνουμε μετατροπή των δυνάμεων με ρητό εκθέτη, σε ισοδύναμες με ριζικά:

$$2^{\frac{3}{6}} = \sqrt[6]{2^3} = \sqrt[6]{8}, \quad 3^{\frac{2}{6}} = \sqrt[6]{3^2} = \sqrt[6]{9}, \quad 6^{\frac{1}{6}} = \sqrt[6]{6}.$$

Άρα, από την πρόταση,

$$\sqrt[6]{6} < \sqrt[6]{8} < \sqrt[6]{9},$$

από όπου συμπεραίνουμε ότι

$$6^{\frac{1}{6}} < 2^{\frac{1}{2}} < 3^{\frac{1}{3}}.$$

► **Παρατήρηση 0.0.1.** Η άσκηση υπάρχει στο δειγματικό δοκίμιο των GRE-Subject math (άσκηση 6). Η απάντηση στην ερώτηση εκεί μπορεί να δοθεί και με ύλη Γ Λυκείου: Η συνάρτηση $f(x) = x^6$, $x \in [0, +\infty)$ είναι γνησίως αύξουσα. Άρα, αφού

$$f(6^{\frac{1}{6}}) = 6 < f(2^{\frac{1}{2}}) = 8 < 9 = f(3^{\frac{1}{3}}),$$

έχουμε ότι

$$6^{\frac{1}{6}} < 2^{\frac{1}{2}} < 3^{\frac{1}{3}}.$$