Λύση της σχολικής άσκησης 6, σελ. 16.
Η υπόθεση $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(x+1)+ax+bx^2}{x^2}=\dfrac{1}{2}$ λέει ότι το όριο στο αριστερό μέλος **υπάρχει** (και είναι ίσο με $1/2$). Τώρα,

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(x+1)+ax+bx^2}{x^2}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\ln(x+1)+ax}{x^2}+b\right).$$

Πληρούνται οι υποθέσεις κανόνα του L' Hôpital στο όριο

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(x+1)+ax}{x^2}.$$

Έχουμε:

$$\lim_{x\to 0}\frac{(\ln(x+1)+ax)'}{(x^2)'}=\lim_{x\to 0}\frac{1+a(x+1)}{2x(x+1)}.$$

Η συνάρτηση στο τελευταίο όριο είναι ρητή. Στην περίπτωση που $\boxed{a=-1}$, η συνάρτηση συμπεριφέρεται όπως την $-1/(x+1)$ κοντά στο $x=0$:

$$\lim_{x\to 0}\frac{-1}{2(x+1)}=-\frac{1}{2}$$

και αρα ο κανόνας του L' Hôpital εγγυάται ότι για $a=-1$,

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(x+1)+ax}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{(\ln(x+1)+ax)'}{(x^2)'}=-\frac{1}{2}.$$

Τότε,

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{\ln(x+1)+ax+bx^2}{x^2}=\frac{1}{2}\quad&\Rightarrow\quad\lim_{x\to 0}\left(\frac{\ln(x+1)+ax}{x^2}+b\right)=\frac{1}{2}\\&\Rightarrow\quad\lim_{x\to 0}\frac{\ln(x+1)+ax}{x^2}+b=\frac{1}{2}\\&\Rightarrow\quad-\frac{1}{2}+b=\frac{1}{2}\\&\Rightarrow\quad\boxed{b=1}\,.\end{aligned}$$

Εδώ χρειάζεται επαλήθευση:
Αν $a=-1,\ b=1$, τότε το όριο είναι το

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(x+1)-x+x^2}{x^2},$$

το οποίο (με δύο διαδοχικές χρήσεις κανόνα του L' Hôpital) ισούται με $\frac{1}{2}$.

▶ Παρατηρήσεις 1.2.1.

(i) Αν όμως $a\neq -1$, δηλαδή είτε $a<-1$, είτε $a>-1$, το όριο της συνάρτησης $x\mapsto\frac{1+a(x+1)}{2x(x+1)}$ δεν υπάρχει καθώς $x\to 0$. Διακρίνετε περιπτώσεις για το a.

(ii) Αν $a\neq -1$, η συνάρτηση $x\mapsto\frac{\ln(x+1)+ax+bx^2}{x^2}$ δεν είναι φραγμένη σε καμία περιοχή του $x=0$ και άρα το όριο καθώς $x\to 0$ δεν υπάρχει.