ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Γ Λυκειου (κατευθυνσης)

Ιωάννης Ι. Ιωακείμ

9 Σεπτεμβρίου 2021

Κεφάλαιο 1

Οι κανόνες υπολογισμού ορίου συνάρτησης του de L' Hopital

1.1 Υπενθυμίσεις

Ένα από τα σημαντικότερα αντικείμενα της περσινής τάξης ήταν ο **υπολογισμός ορίου συνάρτησης**, ο οποίος αποτέλεσε τον πυρήνα του ορισμού του **παράγωγου αριθμού**.
Συγκεκριμένα, είχαμε δεί όρια καθώς το x τείνει σε πραγματικό αριθμό ή στο $\pm\infty$ με αποτέλεσμα στο εκτεταμένο σύνολο των πραγματικών αριθμών, το $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$.
Ας θυμηθούμε πρώτα μερικά βασικά αποτελέσματα που μας βοηθούν στον υπολογισμό ορίου.

(Αλγεβρικές ιδιότητες ορίων)
Έστω $c \in \mathbb{R}$. Έστω $f, g : I \to \mathbb{R}$ (I διάστημα) συναρτήσεις και έστω x_0 σημείο συσσώρευσης του I τέτοιο ώστε τα όρια $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ και $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$ **υπάρχουν**. Τότε,

(i) $\lim\limits_{x\to x_0} cf(x) = c \lim\limits_{x\to x_0} f(x)$.

(ii) $\lim\limits_{x\to x_0} [f(x) \pm g(x)] = \lim\limits_{x\to x_0} f(x) \pm \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$.

(iii) $\lim\limits_{x\to x_0} [f(x) \cdot g(x)] = \lim\limits_{x\to x_0} f(x) \cdot \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$.

(iv) $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)}$, δεδομένου ότι $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) \neq 0$.

(v) $\lim\limits_{x\to x_0} f^n(x) = \left(\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\right)^n$, για $n \in \mathbb{N}$.

(vi) $\lim\limits_{x\to x_0} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}$, για $n \in \mathbb{N}$.
Αν ο n είναι άρτιος, υποθέτουμε ότι είτε $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) > 0$, είτε $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 0$ και η $x \mapsto \sqrt[n]{f(x)}$ ορίζεται σε μια περιοχή του $x = 0$.

(vii) $\lim\limits_{x\to x_0} |f(x)| = \left|\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\right|$.

Παραδείγματα

(i) $\lim_{x \to 0} 2 = 2.$

(ii) $\lim_{x \to 1}(x+2) = \lim_{x \to 1} x + 2 = 1 + 2 = 3.$

(iii) $\lim_{x \to -1}(x^2+4x) = \lim_{x \to -1} x^2 + \lim_{x \to -1}(4x) = \left(\lim_{x \to -1} x\right)^2 + 4 \lim_{x \to -1} x = (-1)^2 + 4(-1) = -3.$

(iv) $\lim_{x \to -3}(x+5)^4 = \left(\lim_{x \to -3}(x+5)\right)^5 = (-3+5)^5 = 2^5 = 32.$

(v) $\lim_{x \to 4} \sqrt{2x+1} = \sqrt{\lim_{x \to 4}(2x+1)} = \sqrt{2 \lim_{x \to 4} x + 1} = \sqrt{9} = 3.$

(vi) $\lim_{x \to -5} \sqrt[3]{x^2+2} = \sqrt[3]{\lim_{x \to -5}(x^2+2)} = \sqrt[3]{\left(\lim_{x \to -5} x\right)^2 + 2} = \sqrt[3]{27} = 3.$

(vii) $\lim_{x \to 2} \frac{x-1}{x+4} = \frac{\lim_{x \to 2}(x-1)}{\lim_{x \to 2}(x+4)} = \frac{2-1}{2-4} = \frac{1}{2}.$

(viii) $\lim_{x \to 3} |x-5| = \left|\lim_{x \to 3}(x-5)\right| = |3-5| = 2.$ ◀

Προκύπτει από τις ιδιότητες (i) και (ii) ότι το όριο ενός **πολυωνύμου** $P(x)$ καθώς το $x \to x_0$ είναι η αριθμητική τιμή του πολυωνύμου στο σημείο αυτό, δηλαδή

$$\lim_{x \to x_0} P(x) = P(x_0).$$

▶Παράδειγμα 1.1.1.

$$\lim_{x \to -1}(x^3 + 2x + 5) = (-1)^3 + 2(-1) + 5 = 2.$$

◀

Το ίδιο ισχύει και για τα όρια των τριγωνομετρικών συναρτήσεων $f(x) = \text{ημ}x$ και $f(x) = \text{συν}x$ καθώς $x \to x_0$:

$$\lim_{x \to x_0} \text{ημ}x = \text{ημ}(x_0), \qquad \lim_{x \to x_0} \text{συν}x = \text{συν}(x_0).$$

Αυτό αντανακλά το ότι τα πολυώνυμα και οι συναρτήσεις ημίτονο και συνημίτονο είναι **συνεχείς συναρτήσεις.**

▶Παράδειγμα 1.1.2.

$$\lim_{x \to \pi/2} \eta\mu x = \eta\mu(\pi/2) = 1, \qquad \lim_{x \to \pi} \sigma\upsilon\nu x = \sigma\upsilon\nu(\pi) = -1.$$

◀

<u>Βασικά όρια:</u>

$$\lim_{x \to +\infty} x^n = +\infty, \; n \in \mathbb{N}$$

$$\lim_{x \to -\infty} x^n = \begin{cases} +\infty, & n \text{ άρτιος} \\ -\infty, & n \text{ περιττός} \end{cases}$$

$$\lim_{x\to+\infty} x^n = +\infty,\ n\in\mathbb{N}$$

$$\lim_{x\to-\infty} x^n = \begin{cases} +\infty, & n \text{ άρτιος} \\ -\infty, & n \text{ περιττός} \end{cases}$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^n} = 0,\ n\in\mathbb{N}$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x^n} = 0,\ n\in\mathbb{N}$$

$$\lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty$$

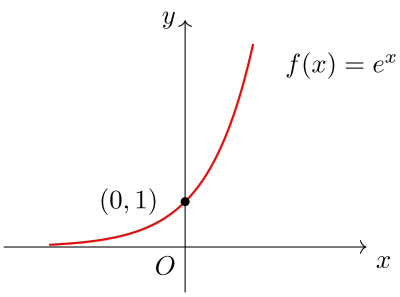
$$\lim_{x\to-\infty} e^x = 0.$$

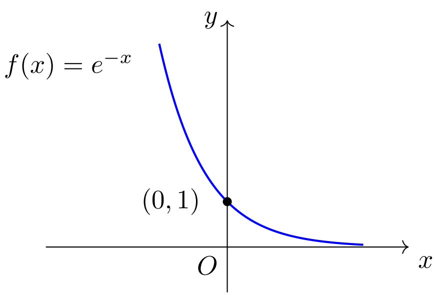
$$\lim_{x\to+\infty} e^{-x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{e^x} = 0$$

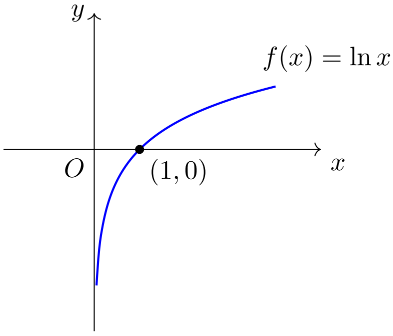
$$\lim_{x\to-\infty} e^{-x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{e^x} = +\infty.$$

$$\lim_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$$

$$\lim_{x\to0} \frac{\eta\mu x}{x} = 1.$$







Παραδείγματα 1

(i) $\lim_{x\to+\infty} x^{500} = +\infty.$

(ii) $\lim_{x\to-\infty} x^{500} = +\infty.$

(iii) $\lim_{x\to-\infty} x^{501} = +\infty.$

(iv) $\lim_{x\to-\infty} x^{501} = -\infty.$

(v) $\lim_{x\to+\infty} x^{-500} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^{500}} = 0.$

(vi) $\lim_{x\to-\infty} x^{-500} = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x^{500}} = 0.$

(vii) $\lim_{x\to+\infty} x^{-501} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^{501}} = 0.$

(viii) $\lim_{x\to-\infty} x^{-501} = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x^{501}} = 0.$

◀

Παραδείγματα 2

(i) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\text{ημ}(2x)}{x}=2\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\text{ημ}(2x)}{2x}=2\cdot 1=2.$ **(ii)** $\lim\limits_{x\to 0}e^{2x}=e^{\lim\limits_{x\to 0}(2x)}=e^{2\cdot 0}=1.$

Στο τελευταίο παράδειγμα, χρησιμοποιήσαμε τη **συνέχεια** της συνάρτησης $f(x)=e^{2x}$ για να περάσουμε το όριο στον εκθέτη. ◀

Παραδείγματα 3

(i) $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{e^x}{x^2}\;=\;\lim\limits_{x\to -\infty}e^x\cdot\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{1}{x^2}\;=\;0\cdot 0\;=\;0.$

(ii)

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\frac{\text{εφ}(3x)}{\text{ημ}(2x)} &= \lim_{x\to 0}\frac{\frac{\text{ημ}(3x)}{\text{συν}(3x)}}{\text{ημ}(2x)} = \lim_{x\to 0}\text{ημ}(3x)\cdot\frac{1}{\text{συν}(3x)}\cdot\frac{1}{\text{ημ}(2x)}\\
&= \frac{3}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\text{ημ}(3x)}{3x}\cdot\frac{1}{\text{συν}(3x)}\cdot\frac{1}{\frac{\text{ημ}(2x)}{2x}}\\
&= \frac{3}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\text{ημ}(3x)}{3x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{\text{συν}(3x)}\cdot\frac{1}{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\text{ημ}(2x)}{2x}}\\
&= \frac{3}{2}\cdot 1\cdot\frac{1}{\text{συν}0}\cdot\frac{1}{1}\;=\;\frac{3}{2}.
\end{aligned}$$

◀

Για χάρη ευκολίας, υπάρχουν ορισμένες πράξεις που μπορούμε να δεχτούμε ως 'σωστές' για να εξάγουμε απευθείας την τιμή ορίου. Οι πράξεις αυτές, οι οποίες μας δίνουν αποτέλεσμα στο $\overline{\mathbb{R}}=\mathbb{R}\cup\{\pm\infty\}$, είναι οι ακόλουθες:

Πίνακας 1.1: Επιτρεπτές πράξεις στο $\overline{\mathbb{R}}=\mathbb{R}\cup\{\pm\infty\}$

$(+\infty)+(+\infty)=+\infty$	$(-\infty)+(-\infty)=-\infty$
$(+\infty)+a=+\infty,\ \forall a\in\mathbb{R}$	$(-\infty)+a=-\infty,\ \forall a\in\mathbb{R}$
$(+\infty)\cdot(+\infty)=+\infty$	$(-\infty)\cdot(-\infty)=+\infty$
$a\cdot(+\infty)=\begin{cases}+\infty, & a>0\\ -\infty, & a<0\end{cases}$	$a\cdot(-\infty)=\begin{cases}-\infty, & a>0\\ +\infty, & a<0\end{cases}$
$\dfrac{a}{\pm\infty}=0,\ \forall a\in\mathbb{R}$	$a^{+\infty}=\begin{cases}+\infty, & a>1\\ 0, & 0\le a<1\end{cases}$
$(+\infty)^a=+\infty,\ \forall a>0$	$(+\infty)\cdot(-\infty)=-\infty$

Πίνακας 1.2: Μη-επιτρεπτές πράξεις (απροσδιόριστες μορφές) στο $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$

$(+\infty) + (-\infty)$	$(-\infty) - (-\infty)$
$(-\infty) + (+\infty)$	$0 \cdot (\pm\infty)$
0^0	$1^{\pm\infty}$
$(\pm\infty)^0$	$\frac{0}{0}$
$\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$	$\frac{a}{0}$

▶**Παράδειγμα 1.1.3.** *Η απ΄ ευθείας αντικατάσταση* $+\infty$ *στο όριο* $\lim\limits_{x\to+\infty}(x^3+x^2+2)$ *δίνει:*

$$(+\infty)^3 + (+\infty)^2 + 2 = (+\infty) + (+\infty) + 2 = +\infty$$

και αρα

$$\lim_{x\to+\infty}(x^3+x^2+2) = +\infty.$$

◀

▶**Παράδειγμα 1.1.4.** *Η απ΄ ευθείας αντικατάσταση* $+\infty$ *στο όριο* $\lim\limits_{x\to-\infty}(3x^3+x^2-1)$ *δίνει:*

$$3(-\infty)^3 + (-\infty)^2 - 1 = 3(-\infty) + (+\infty) - 1 = (-\infty) + (+\infty),$$

η οποία είναι μια απροσδιόριστη μορφή και άρα δεν μπορούμε να υπολογίσουμε το όριο με τον τρόπο αυτό (δηλαδή μπορεί να υπάρχει αλλά και να μην υπάρχει). ◀

▶**Παράδειγμα 1.1.5.** *Η απ΄ ευθείας αντικατάσταση* $+\infty$ *στο όριο* $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x^3+3x-3}{3x^2+2x+1}$ *δίνει:*

$$\frac{2(+\infty)^3+3(+\infty)-3}{3(+\infty)^2+2(+\infty)+1} = \frac{2(+\infty)+(+\infty)-3}{3(+\infty)+(+\infty)+1} = \frac{(+\infty)+(+\infty)-3}{(+\infty)+(+\infty)+1} = \frac{+\infty}{+\infty},$$

η οποία είναι μια απροσδιόριστη μορφή και άρα δεν μπορούμε να υπολογίσουμε το όριο με τον τρόπο αυτό (δηλαδή μπορεί να υπάρχει αλλά και να μην υπάρχει). ◀

Είδαμε επίσης τεχνικές υπολογισμού ορίων σε ειδικές περιπτώσεις, όπως είναι για παράδειγμα

(i) όριο στο $\pm\infty$ ρητής συνάρτησης. Για παράδειγμα

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^{2030}+x^{15}+2x+1}{x^{2032}+7x^2+10} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x^{2030}}{x^{2032}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^2} = 0.$$

Στην περίπτωση των **πλευρικών ορίων**, είδαμε τις **συντομογραφίες** $a^{\pm}$, $(a \in \mathbb{R})$:
Με a^+ συμβολίζουμε έναν αριθμό 'δεξιότερα' από τον a και με a^- συμβολίζουμε έναν αριθμό 'αριστερότερα' από τον a. Έτσι, αν $a > 0$, τότε $a^+ - a = 0^+$ και $a - a^+ = 0^-$.
Επίσης, $a^- + a = 0^+$ και $a - a- = 0^-$.
Αν $a < 0$, τότε $a^+ - a = 0^+$ και $a - a^+ = 0^-$.
Επίσης, $a^- - a = 0^-$ και $a - a^+ = 0^-$.

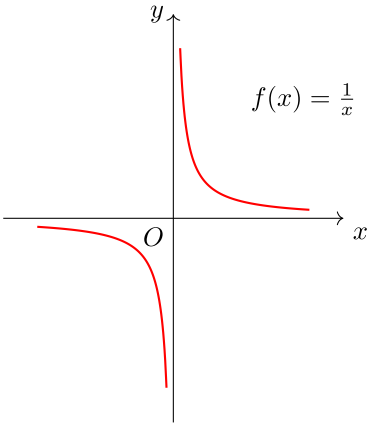
Βασικά όρια 2:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^{2n}}=+\infty,\ n\in\mathbb{N}\qquad \lim_{x\to 0^-}\frac{1}{x^{2n+1}}=-\infty,\ n\in\mathbb{N}\qquad \lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x^{2n+1}}=+\infty,\ n\in\mathbb{N}$$

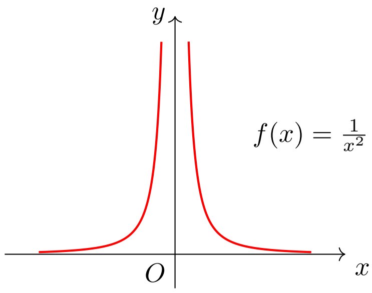
$$\lim_{x\to 0^+}\ln x=-\infty$$

Παραδείγματα

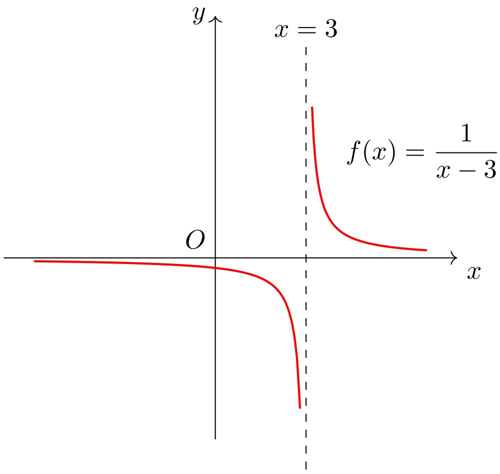
(i) $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{1}{x}=+\infty$ και $\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{1}{x}=-\infty$.



(ii) $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{1}{x^2}=+\infty=\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{1}{x^2}$.



(i) $\lim\limits_{x\to 3^+}\frac{1}{x-3}=\frac{1}{3^+-3}=\frac{1}{0^+}=+\infty$ και $\lim\limits_{x\to 3^-}\frac{1}{x-3}=\frac{1}{3^--3}=\frac{1}{0^-}=-\infty$.



1.1.1 Τεχνικές άρσης απροσδιοριστίας

Είχαμε μελετήσει συγκεκριμένες περιπτώσεις όπου μπορούμε να άρουμε την απροσδιοριστία που προκύπτει:

►►**Περίπτωση απροσδιόριστης μορφής** $(+\infty)-(+\infty)$ **καθώς** $x \to \pm\infty$
Στην περίπτωση πολυωνύμων, βγάζουμε κοινό παράγοντα το x στη μεγαλύτερη δύναμη (που εμφανίζεται στον αριθμητή και παρονομαστή) ή κρατάμε μόνο τον όρο με τη μεγαλύτερη δύναμη του x:

$$\lim_{x\to\pm\infty}(a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1) = \lim_{x\to\pm\infty} x^n\left(\frac{a_0}{x^n} + \frac{a_1}{x^{n-1}} + \ldots + \frac{a_{n-1}}{x} + a_n\right).$$

Αλλά, αφού

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{1}{x^n} = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{1}{x^{n-1}} = \ldots = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{1}{x} = 0,$$

έχουμε

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{a_0}{x^n} + \frac{a_1}{x^{n-1}} + \ldots + \frac{a_{n-1}}{x} + a_n\right) = a_n.$$

Άρα,

$$\lim_{x\to\pm\infty}(a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1) = a_n \lim_{x\to\pm\infty} x^n.$$

►**Παράδειγμα 1.1.6.**

$$\lim_{x\to+\infty}(3x^{200} + x^{15} - 5x^2 + 1) = 3\lim_{x\to+\infty} x^{200} = 3(+\infty)^{200} = 3(+\infty) = +\infty.$$

◄

Στην περίπτωση που η συνάρτηση στο όριο είναι **διαφορά δύο ριζών ώστε η (συνολική) δύναμη του x των δύο ξεχωριστά είναι ίδια**, πολλαπλασιάζουμε με τη συζυγή παράσταση.

►**Παράδειγμα 1.1.7.**

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+1}-x) &= \lim_{x\to+\infty}\frac{(\sqrt{x^2+1}-x)\cdot\overbrace{(\sqrt{x^2+1}+x)}^{\text{συζυγής}}}{\underbrace{\sqrt{x^2+1}+x}_{\text{συζυγής}}}\\
&= \lim_{x\to+\infty}\frac{(\sqrt{x^2+1})^2-x^2}{\sqrt{x^2+1}+x}\\
&= \lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+1-x^2}{\sqrt{x^2+1}+x}\\
&= \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x} = 0.
\end{aligned}$$

Σημείωση: *Για τον υπολογισμό του τελευταίου ορίου, μπορούμε να ακολουθήσουμε 2 τρόπους: είτε απ' ευθείας αντικατάσταση του $+\infty$ (επιτρεπτή πράξη),*

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x} &= \frac{1}{\sqrt{(+\infty)^2+1}+(+\infty)}\\
&= \frac{1}{\sqrt{(+\infty)^2}+(+\infty)} = \frac{1}{(+\infty)+(+\infty)}\\
&= \frac{1}{+\infty} = 0
\end{aligned}$$

είτε να βγάλουμε κοινό παράγοντα το x στη ρίζα του παρονομαστή:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+x}$$

και αφού το $x\to+\infty$, μπορούμε με ασφάλεια να θεωρήσουμε (κάτω από το όριο) ότι το x είναι γνήσια θετικό, άρα $|x|=x$:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+x} &= \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+1)}\\ &= \frac{1}{(+\infty)(\sqrt{1+0}+1)}=\frac{1}{(+\infty)\cdot 2}=0\end{aligned}$$

(επιτρεπτή πράξη). ◀

▶▶Περίπτωση ορίου ρητής συνάρτησης καθώς $x\to\pm\infty$
Για να υπολογίζουμε όρια ρητών συναρτήσεων καθώς $x\to\pm\infty$ λαμβάνουμε υπόψιν ότι καθώς το x αυξάνεται ή μειώνεται απεριόριστα, οι όροι που θα παίξουν ρόλο είναι αυτοί με τη μεγιστοβάθμια δύναμη στον αριθμητή και παρονομαστή. Δηλαδή (για $a_n, b_m\neq 0$) έχουμε

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0}{b_mx^m+b_{m-1}x^{m-1}+\ldots+b_1x+b_0}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{a_nx^n}{b_mx^m}=\frac{a_n}{b_m}\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^n}{x^m}$$

και προχωράμε ανάλογα με το πρόσημο της διαφοράς των δυνάμεων m και n.

▶Παράδειγμα 1.1.8.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^3+3x-8}{3x^2+2x+4}=\frac{2}{3}\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3}{x^2}=\frac{2}{3}\lim_{x\to+\infty}x=+\infty.$$

*Διαφορετικά, βγάζουμε κοινό παράγοντα στον αριθμητή και παρονομαστή τη **μικρότερη** δύναμη από τις μεγαλύτερες δυνάμεις και των δύο:*

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^3+3x-8}{3x^2+2x+4} &= \lim_{x\to+\infty}\frac{x^2\left(2x+\frac{3}{x}-\frac{8}{x^2}\right)}{x^2\left(3+\frac{2}{x}+\frac{4}{x^2}\right)}\\ &= \lim_{x\to+\infty}\frac{2x+\frac{3}{x}-\frac{8}{x^2}}{3+\frac{2}{x}+\frac{4}{x^2}}\\ &= \frac{\lim_{x\to+\infty}\left(2x+\frac{3}{x}-\frac{8}{x^2}\right)}{\lim_{x\to+\infty}\left(3+\frac{2}{x}+\frac{4}{x^2}\right)}\\ &= +\infty.\end{aligned}$$

◀

▶▶Περίπτωση ορίου ρητής συνάρτησης καθώς το x τείνει σε (πεπερασμένο) αριθμό
Στην περίπτωση αυτή, δηλαδή όταν έχουμε όριο της μορφής

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{P(x)}{Q(x)},$$

όπου P και Q πολυώνυμα, διακρίνουμε διάφορες περιπτώσεις, ανάλογα με το αν τα πολυώνυμα έχουν ή όχι κοινή ρίζα. Η μεθοδολογία που ακολουθούμε θα φανεί μέσα από τα πιο κάτω παραδείγματα:

▶Παράδειγμα 1.1.9.

$$\lim_{x\to -1}\frac{x^{100}+2x-3}{x^{201}-x^{10}+4}=\frac{\lim\limits_{x\to -1}(x^{100}+2x-3)}{\lim\limits_{x\to -1}(x^{201}-x^{10}+4)}=\frac{(-1)^{100}+2(-1)-3}{(-1)^{201}-(-1)^{10}+4}=-2.$$

◀

▶Παράδειγμα 1.1.10. *Το όριο*

$$\lim_{x\to 2}\frac{x-2}{x^2-4}$$

δίνει μη επιτρεπτή πράξη (απροσδιόριστη μορφή) $\frac{0}{0}$ *και ο λόγος είναι ότι τα πολυώνυμα στον αριθμητή και παρονομαστή έχουν κοινή ρίζα. Συνεπώς, τα αναλύουμε σε γινόμενο πρώτων παραγόντων:*

$$\lim_{x\to 2}\frac{x-2}{(x-2)(x+2)}=\lim_{x\to 2}\frac{1}{x+2}=\frac{1}{4}.$$

◀

▶Παράδειγμα 1.1.11. *Το όριο*

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2+1}{x^2+x-2}$$

δίνει μη επιτρεπτή πράξη (απροσδιόριστη μορφή) $\frac{2}{0}$ *και ο λόγος είναι ότι το* $x=1$ *είναι ρίζα του παρονομαστή (ενώ του αριθμητή όχι):*

$$\frac{x^2+1}{x^2+x-2}=\frac{x^2+1}{(x-1)(x+2)}.$$

Το όριο αυτό δεν υπάρχει διότι τα πλευρικά όρια (υπάρχουν στο εκτεταμένο σύνολο των πραγματικών αριθμών) είναι διαφορετικά μεταξύ τους:

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{x^2+1}{(x-1)(x+2)}=\frac{1^++1}{(1^+-1)(1^++2)}=\frac{2^+}{0^+}=+\infty$$

και ομοίως,

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{x^2+1}{(x-1)(x+2)}=-\infty.$$

◀

▶Παράδειγμα 1.1.12. *Το όριο*

$$\lim_{x\to -2^{\frac{1}{3}}}\frac{3x-1}{2x^3+1}$$

δεν υπάρχει. Πράγματι,

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\left(-2^{\frac{1}{3}}\right)^+}\frac{3x-1}{2x^3+1} &= \lim_{x\to\left(-2^{\frac{1}{3}}\right)^+}(3x-1)\cdot\lim_{x\to\left(-2^{\frac{1}{3}}\right)^+}\frac{1}{2x^3+1}\\ &= (3\cdot(-2^{\frac{1}{3}})-1)\cdot\frac{1}{0^+}=(3\cdot(-2^{\frac{1}{3}})-1)\cdot(+\infty)\\ &= +\infty\end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\left(-2^{\frac{1}{3}}\right)^-}\frac{3x-1}{2x^3+1} &= \lim_{x\to\left(-2^{\frac{1}{3}}\right)^-}(3x-1)\cdot\lim_{x\to\left(-2^{\frac{1}{3}}\right)^-}\frac{1}{2x^3+1}\\ &= (3\cdot(-2^{\frac{1}{3}})-1)\cdot\frac{1}{0^-}=(3\cdot(-2^{\frac{1}{3}})-1)\cdot(-\infty)\\ &= -\infty,\end{aligned}$$

δηλαδή τα δύο αυτά όρια υπάρχουν (στο εκτεταμένο σύνολο των πραγματικών αριθμών) αλλά είναι διαφορετικά μεταξύ τους. ◀

1.1.2 Ασκήσεις

1. Να υπολογίσετε, αν υπάρχουν, τα πιο κάτω όρια:

(i) $\lim_{x\to -3} 8$

(ii) $\lim_{x\to 2}(x^2+x+35)$

(iii) $\lim_{x\to -1}(x+2)^{2200}$

(iv) $\lim_{x\to -2}\sqrt{3x^2+x+5}$

(v) $\lim_{x\to -4}\sqrt[5]{x^2+x+20}$

(vi) $\lim_{x\to 4}\dfrac{x+9}{2x+5}$

(vii) $\lim_{x\to 6}|x-1|.$

[Απάντηση: (i) 8, (ii) 41, (iii) 1, (iv) $\sqrt{15}$, (v) 2, (vi), 1 (vii) 5]

2. Να υπολογίσετε, αν υπάρχουν, τα πιο κάτω όρια:

(i) $\lim_{x\to \pi}\dfrac{x^6}{\text{συν}x}$

(ii) $\lim_{x\to \pi/4}\dfrac{\text{συν}(x/2)}{x+5}$

(iii) $\lim_{x\to \pi/2}\text{στεμ}x$

(iv) $\lim_{x\to 0}\dfrac{\text{ημ}(8x)}{\text{ημ}(16x)}$

(v) $\lim_{x\to 0}\dfrac{\text{εφ}(3x)}{7x}$

(vi) $\lim_{x\to 3}\dfrac{\text{ημ}(x-3)}{x^3-3x^2}.$

[Απάντηση: (i) $-\pi^6$, (ii) 0, (iii) 1, (iv) 1/2, (v) 3/7, (vi) 1/9]

3. Να υπολογίσετε, αν υπάρχουν, τα πιο κάτω όρια:

(i) $\lim_{x\to -\infty}\sqrt{4x^2-7x+3}$

(ii) $\lim_{x\to +\infty}\dfrac{\sqrt{25x^2+1}}{x+3}$

[Απάντηση: (i) $+\infty$, (ii) 5]

4. Να υπολογίστε, αν υπάρχουν, τα πιο κάτω όρια:

(i) $\lim_{x\to +\infty}(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})$

(ii) $\lim_{x\to +\infty}(\sqrt{x^2+3}-\sqrt{x^2+4})$

(iii) $\lim_{x\to +\infty}\left(\sqrt{\sqrt{x-1}+2}-\sqrt{\sqrt{x+1}+2}\right).$

[Απάντηση: (i) 0, (ii) 0, (iii) 0]

5. Να υπολογίσετε, αν υπάρχουν, τα πιο κάτω όρια:

(i) $\lim_{x\to 2}\dfrac{1}{x^2-1}$

(ii) $\lim_{x\to 1^+}\dfrac{1}{x^2-1}$

(iii) $\lim_{x\to 1}\dfrac{1}{x^2-1}$

(iv) $\lim_{x\to -1}\dfrac{1}{x^2-1}$

[Απάντηση: (i) 1/3, (ii) $+\infty$, (iii) δεν υπάρχει, (iv) δεν υπάρχει]

6. Να υπολογίσετε, αν υπάρχουν, τα πιο κάτω όρια:

(i) $\lim_{x\to 3} \frac{x^2-2x-3}{x-1}$

(ii) $\lim_{x\to 3} \frac{x-1}{x^2-2x-3}$

(iii) $\lim_{x\to 1} \frac{x-1}{x^2-2x-3}$

(iv) $\lim_{x\to -1} \frac{x-1}{x^2-2x-3}$

[Απάντηση: (i) 0, (ii) δεν υπάρχει, (iii) 0, (iv) δεν υπάρχει]

7. Να υπολογίσετε, αν υπάρχουν, τα πιο κάτω όρια:

(i) $\lim_{x\to +\infty} \frac{x^{215}-x^{11}-3x+1}{x^{216}-3x^{10}+3x+1}$

(ii) $\lim_{x\to -\infty} \frac{x^{25}+x^3-x+2}{x^6-2x^7+3x^2+5}$

(iii) $\lim_{x\to 4} \frac{x-7}{x^2-16}$.

[Απάντηση: (i) 0, (ii) $-\infty$, (iii) δεν υπάρχει]

8. Υπολογίστε το πιο κάτω όριο:

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{x^3-x+2}{\sqrt{x^2-5}}.$$

Υπόδειξη: Βγάλτε κοινό παράγοντα το x^2 εντός της ρίζας στον παρονομαστή.
[Απάντηση: $+\infty$]