Ε Π Α Ν Α Λ Η Ψ Η

για τη Γ Λυκείου (κατεύθυνσης)

Παράγωγος συνάρτηση

ο κανόνας της αλυσίδας

http://ioakimioannis.com

Παράγωγος Σύνθετης Συνάρτησης - Ο κανόνας της αλυσίδας

Θεώρημα

Έστω $g: A \to B$ μια συνάρτηση παραγωγίσιμη σε ένα $x_0 \in A$ και έστω $f: g(A) \subset \Gamma \to \mathbb{R}$ μια παραγωγίσιμη συνάρτηση στο $g(x_0)$. Τότε, η σύνθεσή τους fog είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και μάλιστα

$$(fog)'(x_0) = f'\big(g(x_0)\big).g'(x_0)$$

Πόρισμα Έστω f μια παραγωγίσιμη συνάρτηση. Τότε

1. $\left(\sqrt{f(x)}\right)' = \frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}$ $\;αν\; (f(x) > 0)$
2. $\left(e^{f(x)}\right)' = f'(x) \cdot e^{f(x)}$
3. $\left(\alpha^{f(x)}\right)' = \alpha^{f(x)} \cdot \ln\alpha \cdot f'(x)$
   $(\alpha > 0, \quad \alpha \neq 1)$
4. $[\ln(f(x))]' = \dfrac{f'(x)}{f(x)}$ $\;αν\; (f(x) > 0)$
5. $[ημ(f(x))]' = συν(f(x)) \cdot f'(x)$
6. $[συν(f(x))]' = -ημ(f(x)) \cdot f'(x)$
7. $[εφ(f(x))]' = τεμ^2\,(f(x)) \cdot f'(x)$
8. $[σφ(f(x))]' = -στεμ^2\,(f(x)) \cdot f'(x)$
9. $[τεμ(f(x))]' = τεμ(f(x)) \cdot εφ(f(x)) \cdot f'(x)$
10. $[στεμ(f(x))]' = -στεμx(f(x)) \cdot σφ(f(x)) \cdot f'(x)$

Παρατηρήσεις

Για τον υπολογισμό της παραγώγου (συνάρτησης) της μορφής $\frac{c}{f}$ όπου $c \in \mathbb{R}$ και $f \neq 0$, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τον κανόνα παραγώγισης του πηλίκου:

$$\left(\frac{c}{f(x)}\right)' = \frac{c' \cdot f(x) - cf'}{f^2(x)} = \frac{-cf'(x)}{f^2(x)}$$

ή με τη χρήση του κανόνα της αλυσίδας:

$$\left(\frac{c}{f^{\nu}(x)}\right)' = (c[f(x)]^{-\nu})' = c([f(x)]^{-\nu})' = c \cdot (-1)[f(x)]^{-\nu-1} \cdot f'(x) = \frac{-cf'(x)}{f^{\nu+1}(x)}$$

Για παράδειγμα,

$$\left(\frac{5}{x^3}\right)' = 5(x^{-3})' = 5 \cdot (-3)(x^{-3-1}) = \frac{-15}{x^4}$$

Σημείωση Θεωρίας [Δουλεύοντας με τον κανόνα της αλυσίδας]

Υπάρχουν 2 τρόποι να παραγωγίσουμε μια σύνθετη συνάρτηση. Ο πρώτος είναι με τον τύπο του πιο πάνω Θεωρήματος:

$$(fog)'(x) = f'\big(g(x)\big).g'(x)$$

ή χρησιμοποιώντας τη συμβολισμό του Leibniz: Θέτοντας $g(x) = u$, ο πιο πάνω τύπος γράφεται:

$$(fog)'(x) = \frac{du}{dx} \cdot \frac{df(u)}{du} \equiv u'(x) \cdot \frac{df(u)}{du}$$

<u>Παραδείγματα</u>

① Έστω f μια παραγωγίσιμη συνάρτηση. Θεωρούμε τη συνάρτηση g με τύπο $g(x) = f(2x+1)$. Θα βρούμε την g'.
Καταρχάς η g είναι παραγωγίσιμη ως σύνθεση των παραγωγίσιμων συναρτήσεων f και h με τύπο $h(x) = 2x+1$.

1ος τρόπος

Έχουμε από τον κανόνα της αλυσίδας ότι

$$g'(x) = (2x+1)' \cdot f'(2x+1) = 2f'(2x+1).$$

[το $f'(2x+1)$ μένει όπως είναι αφού δε γνωρίζουμε τον τύπο της f ή την παράγωγό της]

2ος τρόπος

Θέτουμε $g(x) = u$, δηλ. $u = 2x+1$. Τότε, $\frac{du}{dx} = 2$ και

$$g'(x) = u'(x) \cdot \frac{df(u)}{du} = 2\frac{df(u)}{du} = 2f'(2x+1)$$

<u>Βασικό Παράδειγμα</u>

Έστω f μια παραγωγίσιμη συνάρτηση και έστω $c \in \mathbb{R}$. Θεωρούμε τη συνάρτηση g με τύπο $g(x) = f(x+c)$. Τότε

$$g'(x) = f'(x+c).$$

Καταρχάς η g είναι παραγωγίσιμη ως σύνθεση των παραγωγίσιμων συναρτήσεων f και h με τύπο $h(x) = x+c$. Έχουμε λοιπόν από τον κανόνα της αλυσίδας ότι

$$g'(x) = (x+c)' \cdot f'(x+c) = f'(x+c).$$

Διαφορετικά, από τον ορισμό,

$$g'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h+c)-f(x+c)}{h} \lim_{h\to 0}\frac{f\big((x+h)+c\big)-f(x+c)}{h} = f'(x+c)$$

<u>Εφαρμογή</u>

Ο κανόνας της Αλυσίδας σε συνδυασμό με τους κανόνες παραγώγισης, μας επιτρέπουν να παραγωγίζουμε συναρτήσεις των οποίων οι μορφή είναι αρκετά σύνθετη. Τέτοιες συναρτήσεις είναι οι δυνάμεις (παραγωγίσιμων) συναρτήσεων:

Έστω f μια παραγωγίσιμη συνάρτηση σε ένα σημείο x_0 και έστω g μια παραγωγίσιμη συνάρτηση στο σημείο $f(x_0)$. Έστω επίσης $\nu \in \mathbb{N}$. Τότε, από τον κανόνα της Αλυσίδας έχουμε ότι

$$[f^\nu(x_0)]' = \nu \cdot f^{\nu-1}(x_0) \cdot f'(x_0)$$

και

$$\big[f^\nu\big(g(x_0)\big)\big]' = \nu \cdot f^{\nu-1}\big(g(x_0)\big) \cdot (fog)'(x_0) = \nu \cdot f^{\nu-1}\big(g(x_0)\big) \cdot f'\big(g(x_0)\big) \cdot g'(x_0)$$

Απόδειξη

Θέτουμε $u = f(x)$. Τότε, $u^\nu = f^\nu(x)$. Έτσι,

$$\frac{du}{dx} = f'(x) \quad \text{και} \quad \frac{d(u^\nu)}{du} = \nu u^{\nu-1} = \nu \cdot f^{\nu-1}(x)$$

Από τον κανόνα της αλύσίδας, έχουμε:

$$\frac{d(u^\nu)}{dx} = \frac{du}{dx} \cdot \frac{d(u^\nu)}{du} = \nu \cdot f^{\nu-1}(x) \cdot f'(x)$$

Ομοίως και για το δεύτερο.

Τύπος Συνάρτησης	Παράγωγος
$f(x) = ημ^\nu(x)$	$f'(x) = \nu \cdot ημ^{\nu-1}(x) \cdot συν(x)$
$f(x) = συν^\nu(x)$	$f'(x) = -\nu \cdot συν^{\nu-1}(x) \cdot ημ(x)$
$f(x) = ημ^\nu\big(g(x)\big)$	$f'(x) = \nu \cdot ημ^{\nu-1}\big(g(x)\big) \cdot συν\big(g(x)\big) \cdot g'(x)$
$f(x) = συν^\nu\big(g(x)\big)$	$f'(x) = -\nu \cdot συν^{\nu-1}\big(g(x)\big) \cdot ημ\big(g(x)\big) \cdot g'(x)$
$f(x) = εφ^\nu(x)$	$f'(x) = -\nu \cdot εφ^{\nu-1}(x) \cdot τεμ^2(x)$
$f(x) = εφ^\nu\big(g(x)\big)$	$f'(x) = \nu \cdot εφ^{\nu-1}\big(g(x)\big) \cdot τεμ^2\big(g(x)\big) \cdot g'(x)$

Η απόδειξή τους προκύπτει άμεσα από τον προηγούμενο τύπο. Σημειώστε όμως ότι στους 3,4 και 6, πρέπει να εφαρμόσουμε 2 φορές τον τύπο (δηλ. θα θεωρήσουμε 2 μετασχηματισμούς). Για παράδειγμα, έστω

$$f(x) = \eta\mu^{\nu}\big(g(x)\big)$$

Θέτουμε $u = g(x)$. Τότε, $f(u) = \eta\mu^{\nu}(u)$ και $\frac{du}{dx} = g'(x)$ και αρα από τον τύπο έχουμε

$$\frac{df(u)}{du} = \nu \cdot \eta\mu^{\nu-1}(u) \cdot \sigma\upsilon\nu(u)$$

Από τον κανόνα της αλύσίδας (ξανά), έχουμε:

$$\frac{df(u)}{dx} = \frac{du}{dx} \cdot \frac{df(u)}{du} = g'(x) \cdot \nu \cdot \eta\mu^{\nu-1}(u) \cdot \sigma\upsilon\nu(u) = \nu \cdot \eta\mu^{\nu-1}\big(g(x)\big) \cdot \sigma\upsilon\nu\big(g(x)\big) \cdot g'(x)$$

❶ Έστω f και g συναρτήσεις τέτοιες ώστε οι f'' και g'' υπάρχουν. Βρείτε τη δεύτερη παράγωγο της συνάρτησης $f \cdot g$.

Λύση

$$\begin{aligned}(f \cdot g)' &= f' \cdot g + g' \cdot f \\ \Rightarrow (f \cdot g)'' &= (f' \cdot g + g' \cdot f)' = (f' \cdot g)' + (g' \cdot f)' \\ &= (f')' \cdot g + (g)' \cdot f' + (g')' \cdot f + (f)' \cdot g' \\ &= f'' \cdot g + g' \cdot f' + g'' \cdot f + f' \cdot g' \\ &= f'' \cdot g + 2f' \cdot g' + g'' \cdot f\end{aligned}$$

❷ Να βρείτε τις παραγώγους (συναρτήσεις) των πιο κάτω συναρτήσεων

- **i.** $f(x) = (2x+3)^3$
- **ii.** $f(x) = (x+1)^4 \cdot \eta\mu(x)$
- **iii.** $f(x) = \left(\frac{3x}{x^2+2}\right)^5$
- **iv.** $f(x) = \ln(x-4)$ $(x > 4)$
- **v.** $f(x) = \ln[(x+4)^2]$
- **vi.** $f(x) = \ln^3(x^2+1)$
- **vii.** $f(x) = \ln^2[(x^2+1)^3]$
- **viii.** $f(x) = e^{x^2-1}$
- **ix.** $f(x) = \sqrt{\frac{e^x+2}{e^{-x}+1}}$
- **x.** $f(x) = \frac{(x-4)^5}{x+2}$ $(x \neq -2)$
- **xi.** $f(x) = \eta\mu^3(x-1)$
- **xii.** $f(x) = \eta\mu^3[(x-1)^2]$
- **xiii.** $f(x) = \sqrt{\eta\mu^2[(x-1)^5]}$
- **xiv.** $f(x) = x \cdot \tau\varepsilon\mu^2\left(\frac{x}{3}\right)$
- **xv.** $f(x) = x^5 \cdot \tau\varepsilon\mu^3\left[\left(\frac{x}{3}\right)^4\right]$

Λύση

i. $f(x) = (2x+3)^3$. Η f είναι παραγωγίσιμη παντού ως πολυώνυμο και για κάθε $x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}f'(x) &= 3(2x+3)^{3-1}(2x+3)' = 3(2x+3)^2 \cdot 2 \\ &= 6(2x+3)^2\end{aligned}$$

ii. $f(x) = (x+1)^4 \cdot \eta\mu(x)$. Η f είναι *παραγωγίσιμη* παντού ως γινόμενο παραγωγίσιμων συναρτήσεων και για κάθε $x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}f'(x) &= [(x+1)^4]' \cdot \eta\mu(x) + (x+1)^4 \cdot \big(\eta\mu(x)\big)' \\ &= 4(x+1)^{4-1}(x+1)' \cdot \eta\mu(x) + (x+1)^4 \cdot \sigma\upsilon\nu(x) \\ &= 4(x+1)^3 \cdot \eta\mu(x) + (x+1)^4 \cdot \sigma\upsilon\nu(x) \\ &= (x+1)^3[4 \cdot \eta\mu(x) + (x+1) \cdot \sigma\upsilon\nu(x)]\end{aligned}$$

iii. $f(x) = \left(\frac{3x}{x^2+2}\right)^5$. Η f είναι παραγωγίσιμη παντού ως σύνθεση παραγωγίσιμων συναρτήσεων και για κάθε $x \in \mathbb{R}$

$$\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x}) = 5\left(\frac{3x}{x^2+2}\right)^{5-1}\cdot\left(\frac{3x}{x^2+2}\right)'$$

$$= 5\left(\frac{3x}{x^2+2}\right)^{4}\cdot\frac{(3x)'\cdot(x^2+2)-(3x)\cdot(x^2+2)'}{(x^2+2)^2}$$

$$= 5\left(\frac{3x}{x^2+2}\right)^{4}\cdot\frac{3\cdot(x^2+2)-(3x)\cdot 2x}{(x^2+2)^2}$$

$$= 15\left(\frac{3x}{x^2+2}\right)^{4}\frac{2-x^2}{(x^2+2)^2} = 15\frac{(3x)^4(2-x^2)}{(x^2+2)^6}$$

iv. $f(x) = \ln(x-4)$ $(x>4)$. Η f είναι καλά ορισμένη συνάρτηση, παραγωγίσιμη για $x>4$ ως σύνθεση παραγωγίσιμων συναρτήσεων και για $x>4$,

$$\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x}) = \frac{(x-4)'}{x-4} = \frac{1}{x-4}$$

v. $f(x) = \ln[(x+4)^2]$.Η f είναι καλά ορισμένη συνάρτηση, παντού παραγωγίσιμη ως σύνθεση παραγωγίσιμων συναρτήσεων και για κάθε $x \in \mathbb{R}$

$$f'(x) = \frac{[(x+4)^2]'}{x+4} = \frac{2(x+4)^{2-1}(x+4)'}{x+4} = \frac{2(x+4)}{x+4} = 2$$

vi. $f(x) = \ln^3(x^2+1)$. Η f είναι καλά ορισμένη συνάρτηση, παντού παραγωγίσιμη ως σύνθεση παραγωγίσιμων συναρτήσεων και για κάθε $x \in \mathbb{R}$

$$\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x}) = 3\ln^2(x^2+1)\cdot[\ln(x^2+1)]'$$

$$= 3\ln^2(x^2+1)\cdot\frac{(x^2+1)'}{x^2+1} = \frac{6x\ln^2(x^2+1)}{x^2+1}$$

vii. $f(x) = \ln^2[(x^2+1)^3]$. Η f είναι καλά ορισμένη *συνάρτηση*, παντού παραγωγίσιμη ως σύνθεση παραγωγίσιμων συναρτήσεων και για κάθε $x \in \mathbb{R}$

$$\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x}) = 2\ln[(x^2+1)^3]\cdot\left[\ln[(x^2+1)^3]\right]'$$

$$= 3\ln^2(x^2+1)\cdot\frac{[(x^2+1)^3]'}{(x^2+1)^3}$$

$$= 3\ln^2(x^2+1)\cdot\frac{3(x^2+1)^{3-1}(x^2+1)'}{(x^2+1)^3}$$

$$= 18\ln^2(x^2+1)\cdot\frac{x(x^2+1)^2}{(x^2+1)^3}$$

$$= 18\frac{x\cdot\ln^2(x^2+1)}{x^2+1}$$

viii. $f(x) = e^{x^2-1}$. Η f είναι καλά ορισμένη συνάρτηση, παντού παραγωγίσιμη ως σύνθεση παραγωγίσιμων συναρτήσεων και για κάθε $x \in \mathbb{R}$

$$\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x}) = (x^2-1)'\cdot e^{x^2-1} = 2x\cdot e^{x^2-1}$$

ix. $f(x) = \sqrt{\frac{e^x+2}{e^{-x}+1}}$. Η f είναι καλά ορισμένη συνάρτηση, παντού παραγωγίσιμη ως σύνθεση παραγωγίσιμων συναρτήσεων και για κάθε $x \in \mathbb{R}$

$$\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x}) = \frac{\left(\frac{e^x+2}{e^{-x}+1}\right)'}{2\sqrt{\frac{e^x+2}{e^{-x}+1}}} = \frac{\frac{(e^x+2)'\cdot(e^{-x}+1)-(e^{-x}+1)'\cdot(e^x+2)}{(e^{-x}+1)^2}}{2\sqrt{\frac{e^x+2}{e^{-x}+1}}}$$

$$= \frac{e^x \cdot (e^{-x}+1) + e^{-x} \cdot (e^x+2)}{2(e^{-x}+1)^{\frac{3}{2}}\sqrt{e^x+2}}$$

$$= \frac{1+e^x+1+2e^{-x}}{2(e^{-x}+1)^{\frac{3}{2}}\sqrt{e^x+2}} = \frac{2+e^x+2e^{-x}}{2(e^{-x}+1)^{\frac{3}{2}}\sqrt{e^x+2}}$$

x. $f(x) = \frac{(x-4)^5}{x+2}\,(x \neq -2)$. Η f είναι καλά ορισμένη συνάρτηση, παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}-\{2\}$ ως σύνθεση παραγωγίσιμων συναρτήσεων και για κάθε $x \in \mathbb{R}-\{2\}$

$$\boldsymbol{f'(x)} = \frac{((x-4)^5)' \cdot (x+2) - (x+2)' \cdot (x-4)^5}{(x+2)^2}$$

$$= \frac{5(x-4)^4 \cdot (x+2) - (x-4)^5}{(x+2)^2}$$

$$= \frac{(x-4)^4[5(x+2)-(x-4)]}{(x+2)^2}$$

$$= \frac{2(x-4)^4(2x+7)}{(x+2)^2}$$

xi. $f(x) = \eta\mu^3(x-1)$. Η f είναι καλά ορισμένη συνάρτηση, παντού παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως σύνθεση παραγωγίσιμων συναρτήσεων και για κάθε $x \in \mathbb{R}$

$$\boldsymbol{f'(x)} = 3\eta\mu^2(x-1) \cdot [\eta\mu(x-1)]'$$
$$= 3\eta\mu^2(x-1) \cdot \sigma\upsilon\nu(x-1) \cdot (x-1)'$$

$2\eta\mu x \sigma\upsilon\nu x = \eta\mu(2x)$

$$= 3\eta\mu^2(x-1) \cdot \sigma\upsilon\nu(x-1)$$
$$= 6\eta\mu[2(x-1)] \cdot \eta\mu(x-1)$$

xii. $f(x) = \eta\mu^3[(x-1)^2]$. Η f είναι καλά ορισμένη συνάρτηση, παντού παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως σύνθεση παραγωγίσιμων συναρτήσεων και για κάθε $x \in \mathbb{R}$

$$\boldsymbol{f'(x)} = 3\eta\mu^2(x-1) \cdot \{\eta\mu[(x-1)^2]\}'$$
$$= 3\eta\mu^2(x-1) \cdot \sigma\upsilon\nu(x-1) \cdot ((x-1)^2)'$$
$$= 6 \cdot (x-1)\eta\mu^2(x-1) \cdot \sigma\upsilon\nu(x-1)$$
$$= 12(x-1) \cdot \eta\mu(x-1) \cdot \eta\mu[2(x-1)]$$

xiii. $f(x) = \sqrt{\eta\mu^2[(x-1)^5]}$. Η f είναι καλά ορισμένη συνάρτηση, παντού παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως σύνθεση παραγωγίσιμων συναρτήσεων και για κάθε $x \in \mathbb{R}$

$$\boldsymbol{f'(x)} = \frac{(\eta\mu^2[(x-1)^5])'}{2\sqrt{\eta\mu^2[(x-1)^5]}}$$

$$= \frac{2\eta\mu(x-1) \cdot \{\eta\mu[(x-1)^5]\}'}{2\sqrt{\eta\mu^2[(x-1)^5]}}$$

$$= \frac{2\eta\mu(x-1) \cdot 5\sigma\upsilon\nu[(x-1)^5] \cdot (x-1)'}{2\sqrt{\eta\mu^2[(x-1)^5]}}$$

$$= \frac{10\eta\mu(x-1)\sigma\upsilon\nu[(x-1)^5]}{2\sqrt{\eta\mu^2[(x-1)^5]}}$$

xiv. $f(x) = x \cdot τεμ^2\left(\frac{x}{3}\right)$. Η f είναι καλά ορισμένη συνάρτηση, παραγωγίσιμη στο σύνολο $x \in \mathbb{R} - \left\{κ\frac{π}{6}, κ \in \mathbb{Z}\right\}$ ως σύνθεση παραγωγίσιμων συναρτήσεων. Θα βρούμε την παράγωγο συνάρτησή της αντιμετωπίζοντάς την ως γινόμενο 2 παραγωγίσιμων συναρτήσεων: Για κάθε $x \in \mathbb{R} - \left\{κ\frac{π}{6}, κ \in \mathbb{Z}\right\}$

$$\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x}) = (x)' \cdot τεμ^2\left(\frac{x}{3}\right) + x \cdot \left\{τεμ^2\left(\frac{x}{3}\right)\right\}'$$

$$= τεμ^2\left(\frac{x}{3}\right) + x \cdot 2τεμ\left(\frac{x}{3}\right) \cdot \left\{τεμ\left(\frac{x}{3}\right)\right\}'$$

$$= τεμ^2\left(\frac{x}{3}\right) + x \cdot 2τεμ\left(\frac{x}{3}\right) \cdot τεμ\left(\frac{x}{3}\right) \cdot εφ\left(\frac{x}{3}\right) \cdot \left(\frac{x}{3}\right)'$$

$$= τεμ\left(\frac{x}{3}\right)\left[τεμ\left(\frac{x}{3}\right) + \frac{2x}{3} \cdot εφ\left(\frac{x}{3}\right)\right]$$

xv. $f(x) = x^5 \cdot τεμ^3\left[\left(\frac{x}{3}\right)^4\right]$. Ομοίως με το προηγούμενο έχουμε για κάθε $x \in \mathbb{R} - \left\{κ\frac{π}{6}, κ \in \mathbb{Z}\right\}$,

$$\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x}) = (x^5)' \cdot τεμ^3\left[\left(\frac{x}{3}\right)^4\right] + x^5 \cdot \left\{τεμ^3\left[\left(\frac{x}{3}\right)^4\right]\right\}'$$

$$= 5x^4 \cdot τεμ^3\left[\left(\frac{x}{3}\right)^4\right] + x^5 \cdot 3τεμ^2\left[\left(\frac{x}{3}\right)^4\right] \cdot τεμ\left[\left(\frac{x}{3}\right)^4\right] \cdot εφ\left[\left(\frac{x}{3}\right)^4\right] \cdot \left[\left(\frac{x}{3}\right)^4\right]'$$

$$= 5x^4 \cdot τεμ^3\left[\left(\frac{x}{3}\right)^4\right] + 3x^5\, τεμ^3\left[\left(\frac{x}{3}\right)^4\right] \cdot εφ\left[\left(\frac{x}{3}\right)^4\right] \cdot \frac{4}{3}\left(\frac{x}{3}\right)^3$$

$$= 5x^4 \cdot τεμ^3\left[\left(\frac{x}{3}\right)^4\right] + \frac{4x^8}{9}\, τεμ^3\left[\left(\frac{x}{3}\right)^4\right] \cdot εφ\left[\left(\frac{x}{3}\right)^4\right]$$

$$= x^4 τεμ^3\left[\left(\frac{x}{3}\right)^4\right] \cdot \left\{5 + \frac{4x^4}{9} \cdot εφ\left[\left(\frac{x}{3}\right)^4\right]\right\}$$