2.1. Γενικές Ασκήσεις-Εφαρμογές

Εφαρμογή[Συνάρτηση με παράμετρο]
Έστω η συνάρτηση

$$f_\lambda : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad \text{με} \qquad f_\lambda(x) = \begin{cases} \lambda x^2 + 3x + \lambda^2 + 2\lambda + 1, & x > 0 \\ e^{\lambda x} - 1 & x \leq 0 \end{cases} \qquad (\lambda \in \mathbb{R})$$

Διερεύνηση 1: Να βρεθούν οι τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ για τις οποίες η f_λ είναι συνεχής συνάρτηση.
Διερεύνηση 2: Να βρεθούν οι τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ για τις οποίες η f_λ είναι παραγωγίσιμη συνάρτηση.
Διερεύνηση 3: Να βρεθούν, αν υπάρχουν, οι τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ για τις οποίες η f'_λ είναι παραγωγίσιμη συνάρτηση.

Απάντηση [8]
Διερεύνηση 1: Για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$, η f_λ είναι $D(f) = \mathbb{R}$ και συνεχής στο διάστημα $(-\infty, 0)$ ως σύνθεση της εκθετικής συνάρτησης με την $x \mapsto \lambda x$ και συνεχής στο διάστημα $(0, +\infty)$ ως πολυωνυμική. Έστω $\lambda \in \mathbb{R}$ σταθεροποιημένο. Θα ελέγξουμε τη συνέχεια της συνάρτησης f_λ στο σημείο $x = 0$:
Είναι $f_\lambda(0) = e^{\lambda \cdot 0} - 1 = e^0 - 1 = 1 = 1 = 0$ και

$$\lim_{x\to 0^-} f_\lambda(x) = \lim_{x\to 0^-} (e^{\lambda \cdot x} - 1) = e^{\lim_{x\to 0^-}(\lambda \cdot x)} - 1 = e^{\lambda \cdot \lim_{x\to 0^-} x} = 1 = e^0 - 1 = 0$$

από τη συνέχεια της εκθετικής συνάρτησης στο $x = 0$. Τώρα,

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0^+} f_\lambda(x) &= \lim_{x\to 0^+} (\lambda x^2 + 3x + \lambda^2 + 2\lambda + 1) \\ &= \lambda \cdot 0^2 + 3 \cdot 0 + \lambda^2 + 2\lambda + q = \lambda^2 + 2\lambda + 1 \\ &= (\lambda + 1)^2 \end{aligned}$$

Έτσι, η f_λ είναι συνεχής στο $x = 0$ αν και μόνο αν $\lim_{x\to 0^+} f_\lambda(x) = \lim_{x\to 0^+} f_\lambda(x)$, δηλ. αν και μόνο αν $(\lambda + 1)^2 = 0$, δηλ. αν και μόνο αν $\boxed{\lambda = -1}$. Συνεπώς, η f_λ είναι συνεχής στο π.ο. της (το $\mathbb{R}$) αν και μόνο αν $\lambda = -1$.

Διερεύνηση 2: Από την προηγούμενη διερεύνηση, μόνο η $f_{\lambda=-1}$ είναι συνεχής στο σημείο $x = 0$. Έτσι, αφού για να είναι παραγωγίσιμη μια συνάρτηση σε σημείο του π.ο. της (σημ.: όλες οι f_λ είναι συνεχείς στο $\mathbb{R} - \{0\}$) πρέπει να είναι παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό. Ελέγχουμε λοιπόν τις πλευρικές παραγώγους της f_{-1} στο σημείο $x = 0$: Συμβολίζουμε με G την f_{-1}

$$G(x) = f_{-1}(x) = \begin{cases} -x^2 + 3x, & x > 0 \\ e^{-x} - 1 & x \leq 0 \end{cases}$$

Τότε

$$\begin{aligned} G'_+(0) &= \lim_{h\to 0^+} \frac{G(0+h) - G(0)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{e^{-(0+h)} - 1 - (e^0 - 1)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{e^{-h} - 1}{h} \\ \text{(εξ ορισμού)} &= \left.\frac{d(e^{-x})}{dx}\right|_{x=0} = -e^{-0} = -1 \end{aligned}$$

[8] Αυστηρότερα, η f_λ είναι μια οικογένεια παραμετρικών συναρτήσεων, δηλ. κάθε συνάρτηση f_λ εξαρτάται από την εκάστοτε τιμή της παραμέτρου λ

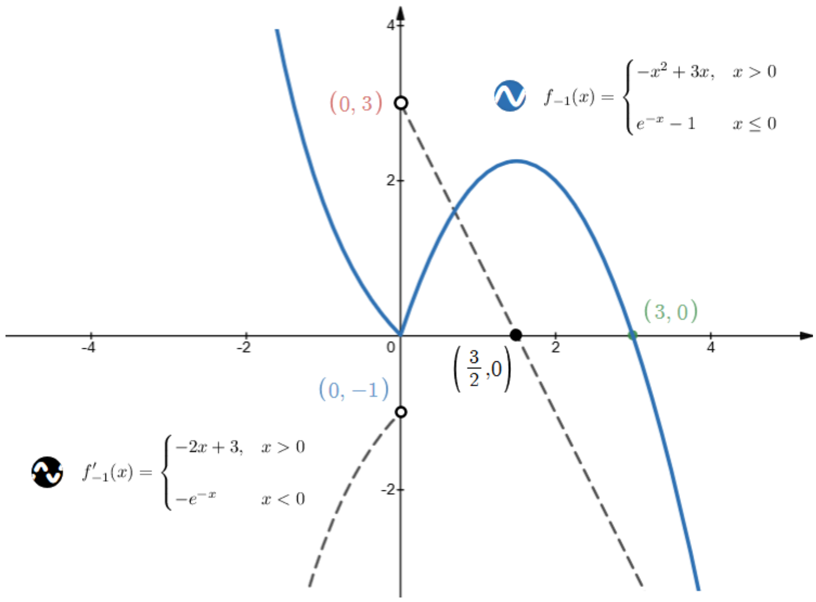
και

$$\begin{aligned} G'_-(0) &= \lim_{h\to 0^-}\frac{G(0+h)-G(0)}{h} = \lim_{h\to 0^-}\frac{-(0+h)^2+3\cdot(0+h)-0}{h} \\ &= \lim_{h\to 0^-}\frac{-h^2+3h}{h} = -\lim_{h\to 0^-}\frac{h(h-3)}{h} = -\lim_{h\to 0^-}(h-3) = 3 \end{aligned}$$

Άρα, $G'_+(0) \neq G'_-(0)$ και έτσι, η $G'(0) = f'_{-1}(0)$ δεν ορίζεται. Κατα συνέπεια, η f_λ δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x = 0$ για καμία τιμή της πραγματικής παραμέτρου λ. Είναι

$$f'_{-1}(x) = \begin{cases} -2x+3, & x > 0 \\ -e^{-x} & x < 0 \end{cases}$$

Διερεύνηση 3: Αφού η f_λ δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x = 0$ για καμία τιμή της πραγματικής παραμέτρου λ, έπεται ότι η f''_λ δεν ορίζεται (σε όλο το $\mathbb{R}$) για καμία τιμή της πραγματικής παραμέτρου λ.



Άσκηση [Δίνω Γεωμετρική ερμηνεία στην παράγωγο]
Έστω η συνάρτηση

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad \text{με} \quad f(x) = \begin{cases} 2\sqrt{x}, & x > 0 \\ -x & x \leq 0 \end{cases}$$

(α) Να μελετήσετε την f ως προς τη συνέχεια.
(β) Να μελετήσετε την f ως προς την παραγωγισιμότητα.
(γ) Δώστε γεωμετρική ερμηνεία για το αποτέλεσμα του προηγούμενου ερωτήματος.

Απάντηση

(α) Η f είναι συνεχής στο διάστημα $(0,+\infty)$ ως σύνθεση τέτοιων καθώς επίσης και στο διάστημα $(-\infty,0)$. Ελέγχουμε τη συνέχεια της συνάρτησης στο $x=0$:

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}(2\sqrt{x})=2\lim_{x\to 0^+}\sqrt{x}=2\cdot\sqrt{0}=0$$

και

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-}(-x)=-\lim_{x\to 0^-}x=0$$

Άρα, $\lim_{x\to 0} f(x)=0$ και $=f(0)$. Έπεται ότι η συνάρτηση είναι συνεχής (και) στο $x=0$. Έτσι, η συνάρτηση είναι συνεχής σε όλο το π.ο. της.

(β) Έχουμε:

$$f'_+(0)=\lim_{h\to 0^+}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{2\sqrt{0+h}-0}{h}=2\lim_{h\to 0^+}\frac{\sqrt{h}}{h}=2\lim_{h\to 0^+}\frac{1}{\sqrt{h}}=+\infty$$

Συνεπώς, δεν υπάρχει η $f'(0)$.

(γ) Αφού $f'_+(0)=+\infty$, έπεται ότι στο σημείο με $x=0$, το γράφημα της f έχει κατακόρυφη εφαπτομένη.