0.11 Δραστηριότητες σελ. 78 (Εμπλουτισμού)

Άσκηση 1

Η μια διάσταση (x) ενός ορθογωνίου παραλληλογράμμου αυξάνεται με ρυθμό $3m/sec$ και η άλλη (y) μειώνεται με ρυθμό $2m/sec$. Όταν $x = 24m$ και $y = 10m$, να υπολογίσετε το ρυθμό μεταβολής:

(α) του εμβαδού του **(β)** της περιμέτρου του **(γ)** του μήκους της διαγωνίου του.

Λύση

Θεωρούμε τις συναρτήσεις $t \mapsto x(t)$ και $t \mapsto y(t)$ οι οποίες αντιστοιχούν στις διαστάσεις του ορθογωνίου παραλληλογράμμου. Αφού η διάσταση x αυξάνεται με (σταθερό) ρυθμό $3m/sec$ έχουμε ότι $dx/dt = x'(t) = 3m/sec$ και αφού η διάσταση y μειώνεται με (σταθερό) ρυθμό $2m/sec$ έχουμε ότι $dy/dt = y'(t) = -2m/sec$. Η δε συνάρτηση E που δίνει το εμβαδόν είναι η

$$E : [0, +\infty) \to \mathbb{R} \qquad \text{με} \qquad E(t) = (x \cdot y)(t) = x(t) \cdot y(t)$$

Είναι παραγωγίσιμη (ως γινόμενο τέτοιων) με

$$E'(t) = x'(t) \cdot y(t) + x(t) \cdot y'(t).$$

Επίσης, η συνάρτηση Π που δίνει την περίμετρο του ορθογωνίου παραλληλογράμμου είναι η

$$\Pi : [0, +\infty) \to \mathbb{R} \qquad \text{με} \qquad \Pi(t) = (2(x + y))(t) = 2x(t) + 2y(t).$$

Είναι παραγωγίσιμη (ως άθροισμα τέτοιων) με

$$\Pi'(t) = 2(x'(t) + y'(t)), \quad \forall x > 0.$$

Τέλος, η συνάρτηση δ που δίνει το μήκος της διαγωνίου του ορθογωνίου παραλληλογράμμου είναι η

$$\delta : [0, +\infty) \to \mathbb{R} \qquad \text{με} \qquad \delta(t) = \sqrt{x^2(t) + y^2(t)}.$$

Είναι παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του π.ο. της (δηλ. στο $(0, +\infty)$) (ως σύνθεση τέτοιων) με

$$\delta'(t) = \frac{2(x(t) \cdot x'(t) + y(t) \cdot y'(t))}{2\sqrt{x^2(t) + y^2(t)}} = \frac{x(t) \cdot x'(t) + y(t) \cdot y'(t)}{\sqrt{x^2(t) + y^2(t)}}.$$

Αν για μια χρονική στιγμή $t = t_0$ είναι $x(t_0) = 24m$ και $y(t_0) = 10m$, τότε

(α)

$$E'(t_0) = x'(t_0) \cdot y(t_0) + x(t_0) \cdot y'(t_0) = 3 \cdot 10 + 24 \cdot (-2) = \boxed{-18\ m^2/sec}$$

(β)

$$\Pi'(t_0) = 2(x'(t_0) + y'(t_0)) = 2 \cdot (3 - 2) = \boxed{2\ m/sec}$$

(γ)

$$\delta'(t_0) = \frac{x(t_0) \cdot x'(t_0) + y(t_0) \cdot y'(t_0)}{\sqrt{x^2(t_0) + y^2(t_0)}} = \frac{24 \cdot 3 + 10 \cdot (-2)}{\sqrt{(24)^2 + (10)^2}} = \frac{52}{26}\ m/sec = \boxed{2\ m/sec}$$

Άσκηση 2

Δίνεται η συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ με $f(x)+f(x^2)=3\ln x+4$, $x>0$. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο $A(1,f(1))$.

Λύση

[Υποθέτουμε ότι η f είναι παραγωγίσιμη]
Για $x=1$, η υπόθεση για την f δίνει $f(1)+f(1^2)=4$ και αρα $f(1)=2$. Αφού συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη για κάθε $x>0$, παραγωγίζοντας αμφότερα μέλη της $f(x)+f(x^2)=3\ln x+4$ εχουμε (με χρήση του κανόνα της αλυσίδας)

$$f'(x)+(x^2)'\cdot f'(x^2)=\frac{3}{x},\quad \forall x>0.$$

Έτσι, η κλίση της εφαπτομένης του γραφήματος της συνάρτησης f στο σημείο $A(1,f(1))=A(1,2)$ είναι η $y-2=x-1$, δηλ. η $y=x+1$.

Άσκηση 3

Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με τύπο

$$f(x)=\frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1},\quad x\in\mathbb{R}.$$

Να αποδείξετε ότι $f'(x)+f^2(x)=1$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Λύση

Καταρχάς, η συνάρτηση f είναι καλά ορισμένη, αφού $e^{2x}+1\neq 0$, $\forall x\in\mathbb{R}$. Επίσης, είναι παραγωγίσιμη ως πηλίκο παραγωγίσιμων συναρτήσεων, με

$$f'(x)=\frac{2e^{2x}(e^{2x}+1)-(e^{2x}-1)2e^{2x}}{(e^{2x}+1)^2}=\frac{4e^{2x}}{(e^{2x}+1)^2},\quad \forall x\in\mathbb{R}$$

Έτσι, για κάθε $x\in\mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} f'(x)+f^2(x) &= \frac{4e^{2x}}{(e^{2x}+1)^2}+\left(\frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}\right)^2=\frac{4e^{2x}}{(e^{2x}+1)^2}+\frac{(e^{2x}-1)^2}{(e^{2x}+1)^2}\\ &= \frac{4e^{2x}}{(e^{2x}+1)^2}+\frac{e^{4x}-2e^{2x}+1}{(e^{2x}+1)^2}=\frac{4e^{2x}+e^{4x}-2e^{2x}+1}{(e^2x+1)^2}\\ &= \frac{e^{4x}+2e^{2x}+1}{(e^{2x}+1)^2}=\frac{(e^{2x}+1)^2}{(e^{2x}+1)^2}=1. \end{aligned}$$

Άσκηση 4

Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με τύπο

$$f(x)=xe^x,\quad x\in\mathbb{R}.$$

Να αποδείξετε ότι για κάθε $\nu\in\mathbb{N}$, είναι $f^{(\nu)}(x)=(x+\nu)\cdot e^x$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Λύση
Με επαγωγή στο $\nu \in \mathbb{N}$.
Ο προτασιακός τύπος $P(\nu)$ του οποίου θα αποδείξουμε ότι το σύνολο αλήθειας είναι το σύνολο $\mathbb{N}$ των φυσικών αριθμών είναι ο

$$P(\nu) : f^{(\nu)}(x) = (x+\nu) \cdot e^x, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Βήμα 1: Για $\nu = 1$, είναι

$$f^{(1)}(x) = f'(x) = e^x + x \cdot e^x = (x+1) \cdot e^x, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

δηλ. ο $P(1)$ είναι αληθής.
Βήμα 2: Υποθέτουμε ότι το ζητούμενο ισχύει για $\nu = k \in \mathbb{N}$ με $k > 1$, δηλ. ότι ο $P(k)$ είναι αληθής, δηλ. ότι η $f^{(k-1)}$ είναι παραγωγίσιμη με

$$f^{(k)}(x) = (x+k) \cdot e^x, \quad \forall x \in \mathbb{R} \qquad \text{(ε.υ.)}$$

και θα δείξουμε ότι ισχύει για $\nu = k+1$, δηλ. ότι ο $P(k+1)$ είναι αληθής, δηλ. ότι η $f^{(k)}$ είναι παραγωγίσιμη με

$$f^{(k+1)}(x) = (x+k+1) \cdot e^x, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Από την επαγωγική υπόθεση (ε.υ.), έχουμε ότι η k-παράγωγος συνάρτηση της f υπάρχει και είναι παραγωγίσιμη συνάρτηση με

$$\begin{aligned}
(f^{(k)}(x))' = (x+k) \cdot e^x, \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad &\Rightarrow \quad f^{(k+1)}(x) = (x+k)' \cdot e^x + (x+k) \cdot e^x, \quad \forall x \in \mathbb{R} \\
&\Rightarrow \quad f^{(k+1)}(x) = e^x + (x+k) \cdot e^x, \quad \forall x \in \mathbb{R} \\
&\Rightarrow \quad f^{(k+1)}(x) = (x+k+1) \cdot e^x, \quad \forall x \in \mathbb{R}
\end{aligned}$$

και αρα το ζητούμενο ισχύει.
Βήμα 3: Από την **Αρχή της Μαθηματικής Επαγωγής**, το ζητούμενο ισχύει για κάθε $\nu \in \mathbb{N}$, δηλ. ο προτασιακός τύπος $P(\nu)$ έχει σύνολο αλήθειας το σύνολο $\mathbb{N}$ των φυσικών αριθμών.

Άσκηση 5

Αν η συνάρτηση f είναι δυο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και ισχύει:

$$f(x^3) = 5x^4, \quad x \in \mathbb{R},$$

να υπολογίσετε το $f''(27)$.

Λύση
Έχουμε (με χρήση του κανόνα της αλυσίδας)

$$f(x^3) = 5x^4, \quad \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow (x^3)' \cdot f'(x^3) = 20 \cdot x^3, \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

δηλ. $3x^2 \cdot f'(x^3) = 20 \cdot x^3, \quad \forall x \in \mathbb{R}$. Έχουμε (χρησιμοποιώντας ξανά τον κανόνα της αλυσίδας)

$$3x^2 \cdot f'(x^3) = 20 \cdot x^3, \quad \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow (3x^2)' \cdot f'(x^3) + 3x^2 \cdot (x^3)' \cdot f''(x^3) = 60x^2, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

δηλ.

$$6x \cdot f'(x^3) + 9x^4 \cdot f'(x^3) = 60x^2, \quad \forall x \in \mathbb{R} \tag{2.7}$$

Επιλύουμε κατά τα γνωστά την εξίσωση $x^3 = 27$: έχει μοναδική λύση, την $x = 2$. Επίσης, αφού $3x^2 \cdot f'(x^3) = 20 \cdot x^3$, για $x = 3$, έχουμε $3 \cdot 3^2 \cdot f'(3^3) = 20 \cdot 3^3$, δηλ. $27f'(27) = 20 \cdot 3^3$, δηλ. $f'(27) = 20$. Έτσι, από την (2.7) για $x = 3$ έχουμε $6 \cdot 3 \cdot f'(3^3) + 9 \cdot 3^4 \cdot f''(3^3) = 60 \cdot 3^2$, δηλ. $2 \cdot 20 + 81 \cdot f''(27) = 60$, δηλ.

$$\boxed{f''(27) = \frac{20}{81}}$$

Άσκηση 6

Αν η συνάρτηση f είναι δυο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, για την οποία ισχύει:

$$f(x^2 + x + 1) = x^3, \quad x \in \mathbb{R}.$$

(α) Να δείξετε ότι η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο $x_0 = 1$ είναι οριζόντια.

(β) Να υπολογίσετε την κλίση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο $x_1 = 3$.

(γ) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο $A(3, f(3))$.

(δ) Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f' στο σημείο $(3, 1)$ έχει κλίση ίση με $\frac{4}{9}$.

Λύση

(α) Έχουμε (με χρήση του κανόνα της αλυσίδας)

$$f(x^2 + x + 1) = x^3, \quad x \in \mathbb{R} \Rightarrow (x^2 + x + 1)' \cdot f'(x^2 + x + 1) = 3x^2, \quad x \in \mathbb{R}$$

δηλ.

$$(2x + 1) \cdot f'(x^2 + x + 1) = 3x^2, \quad x \in \mathbb{R} \tag{2.8}$$

και για $x = 0$, η σχέση αυτή δίνει $f'(1) = 0$. Έτσι, η εξίσωση της εφαπτομένης του γραφήματος της f στο σημείο $x = 1$ είναι οριζόντια (παράλληλη με τον άξονα των τετμημένων).

(β) Για $x = 1$, η σχέση του προηγούμενου ερωτήματος δίνει $(2 \cdot 1 + 1) \cdot f'(1^2 + 1 + 1) = 3 \cdot 1^2$, δηλ. $f'(3) = 1$. Έτσι, η κλίση της εφαπτομένης του γραφήματος της f στο σημείο $x_1 = 3$ είναι ίση με 1.

(γ) Θέτοντας $x = 1$ στη σχέση που ικανοποιεί η f, έχουμε $f(3) = 1^3 = 1$ και επίσης, από το προηγούμενο ερώτημα έχουμε $f'(3) = 1$. Έτσι, η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $A(3, 1)$ είναι η $y - 1 = f'(3) \cdot (x - 3)$, δηλ. η

$$\boxed{y = x - 2.}$$

(δ) Παραγωγίζουμε αμφότερα μέλη της (2.8) (και κάνοντας χρήση του κανόνα της αλυσίδας)

$$(2x + 1)' \cdot f'(x^2 + x + 1) + (2x + 1) \cdot (x^2 + x + 1)' \cdot f''(x^2 + x + 1) = 6x, \quad x \in \mathbb{R}$$

δηλ.

$$2 \cdot f'(x^2 + x + 1) + (2x + 1)^2 f''(x^2 + x + 1) = 6x, \quad x \in \mathbb{R}$$

Για $x = 1$, η σχέση αυτή δίνει

$$2 \cdot f'(1^2 + 1 + 1) + (2 \cdot 1 + 1)^2 \cdot f''(1^2 + 1 + 1) = 6 \cdot 1$$

δηλ. $2 \cdot \underbrace{f'(3)}_{=1} + 9 \cdot f''(3) = 6$, δηλ.

$$\boxed{f'(3) = \frac{4}{9}}$$