0.10 Δραστηριότητες σελ. 73-77 (Ενότητας)

Άσκηση 1

Να χαρακτηρίσετε ΣΩΣΤΟ ή ΛΑΘΟΣ κάθε μια από τις παρακάτω προτάσεις, δικαιολογώντας τις απαντήσεις σας:

(α) Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σ' ενα σημείο x_0, τότε είναι και συνεχής στο σημείο αυτό.

ΣΩΣΤΟ / **ΛΑΘΟΣ**

(β) Η συνάρτηση f με τύπο $f(x)=\sqrt{x}$, $x\geq 0$ είναι παραγωγίσιμη στο 0.

ΣΩΣΤΟ / **ΛΑΘΟΣ**

(γ) Η συνάρτηση f με τύπο $f(x)=\begin{cases}2x, & x>1\\ x^2, & x\leq 1\end{cases}$ είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=1$.

ΣΩΣΤΟ / **ΛΑΘΟΣ**

(δ) Για τη συνάρτηση f με τύπο $f(x)=\text{συν}x$, $x\in\mathbb{R}$ ισχύει $f''(0)=0$.

ΣΩΣΤΟ / **ΛΑΘΟΣ**

(ε) Αν μια (παραγωγίσιμη) συνάρτηση f έχει πεδίο ορισμού το σύνολο A, τότε και η παράγωγος f' έχει πεδίο ορισμού το A.

ΣΩΣΤΟ / **ΛΑΘΟΣ**

(στ) Θεωρούμε τη συνάρτηση f με τύπο $f(x)=x^3+x$, $x\in\mathbb{R}$. Ο στιγμιαίος ρυθμός μεταβολής της f ως προς x, όταν $x=1$, ισούται με 3.

ΣΩΣΤΟ / **ΛΑΘΟΣ**

(ζ) Ο αριθμός $f'(x_0)$ εκφράζει γεωμετρικά την κλίση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $M(x_0, f(x_0))$.

ΣΩΣΤΟ / **ΛΑΘΟΣ**

(η) Αν μια συνάρτηση f έχει δεύτερη παράγωγο στο x_0, τότε η παράγωγος f' είναι συνεχής στο x_0.

ΣΩΣΤΟ / **ΛΑΘΟΣ**

(θ) Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, τότε ισχύει

$$(f(f(x)))'=(f'(x))^2,\quad \forall x\in\mathbb{R}.$$

ΣΩΣΤΟ / **ΛΑΘΟΣ**

(ι) Αν μια συνάρτηση f είναι άρτια και παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, τότε η παράγωγος f' είναι περιττή.

ΣΩΣΤΟ / **ΛΑΘΟΣ**

(ια) Μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα Δ με $f'(x)\neq 0$ για κάθε $x\in\Delta$. Τότε η γραφική της παράσταση δε δέχεται οριζόντια εφαπτομένη.

ΣΩΣΤΟ / **ΛΑΘΟΣ**

Άσκηση 1

(ιβ) Η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f με τύπο $f(x) = \ln x$, $x > 0$ στο σημείο $(x_0, f(x_0))$ είναι κάθετη στην ευθεία με εξίσωση $y = -\frac{1}{2}x + 5$. Τότε $x_0 = 2$.

ΣΩΣΤΟ / **ΛΑΘΟΣ**

(ιγ) Οι καμπύλες δυο συναρτήσεων f και g τέμνονται στο σημείο με τετμημένη x_0. Αν $f'(x_0) = g'(x_0)$, τότε οι εφαπτομένες στο σημείο αυτό έχουν τις ίδιες εξισώσεις.

ΣΩΣΤΟ / **ΛΑΘΟΣ**

Λύση

(α) ΣΩΣΤΟ

Παραγωγίσιμη⇒συνεχής

Έστω $f : A \to B$ μια συνάρτηση η οποία είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο $x_0 \in A$. Τότε είναι συνεχής στο x_0.

Απόδειξη. Από υπόθεση, η $f'(x_0)$ υπάρχει, δηλ. **υπάρχει** το $f'(x_0) \equiv \lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ και είναι πραγματικός αριθμός. Έχουμε:

$$\lim_{x\to x_0}(f(x) - f(x_0)) = \lim_{x\to x_0}\left[\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}\cdot(x - x_0)\right] = \lim_{x\to x_0}\left[\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}\right]\cdot\lim_{x\to x_0}(x - x_0)$$

Αλλά, $\lim_{x\to x_0}(x-x_0) = x_0-x_0 = 0$ και $\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(x_0)$. Έτσι, $\lim_{x\to x_0}(f(x)-f(x_0)) = 0$, δηλ. $\lim_{x\to x_0} f(x)-\lim_{x\to x_0} f(x_0) = 0$, δηλ. $\lim_{x\to x_0} f(x)-f(x_0) = 0$, δηλ. $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$ και αρα η f είναι συνεχής στο x_0. □

(β) ΛΑΘΟΣ

$$f'_+(0) = \lim_{x\to 0^+}\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0^+}\frac{\sqrt{x}}{x} = \lim_{x\to 0^+}\frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$$

και άρα δεν υπάρχει η $f'_+(0)$ (παρόλο που η f ορίζεται στο $x = 0$ και είναι μάλιστα συνεχής στο σημείο αυτό).

(γ) ΛΑΘΟΣ Δεν είναι καν συνεχής στο $x_0 = 1$, αρα πόσο μάλλον παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό:

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+}(2x) = 2 \neq 1 = \lim_{x\to 1^-}(x^2) = \lim_{x\to 1^-} f(x).$$

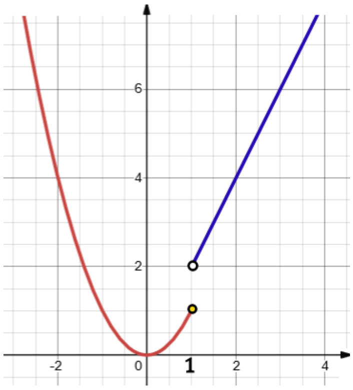
(δ) ΛΑΘΟΣ Είναι $f'(x) = -\text{ημ}x$, $\forall x \in \mathbb{R}$ και αρα $f''(x) = -\text{συν}x$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Συνεπώς,

$$f''(0) = -\text{συν}0 = -1.$$

(ε) ΛΑΘΟΣ Πάρτε για παράδειγμα τη συνάρτηση του ερωτήματος **(β)**.

(στ) ΛΑΘΟΣ Έχουμε

$$f(x) = x^3 + x,\ \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow f'(x) = 3x^2 + 1,\ \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow f'(1) = 4,$$



Σχήμα 2.11: Η συνάρτηση της 1(γ)

δηλ. ο ρυθμός μεταβολής της συνάρτησης όταν $x = 1$ ισούται με 4.

(ζ) ΣΩΣΤΟ Ανάτρεξε στη Θεωρία

(η) ΣΩΣΤΟ Αν η f'' υπάρχει, δηλ. η f' είναι παραγωγίσιμη, έπεται (δες το πρώτο ερώτημα) ότι (η f') είναι συνεχής συνάρτηση.

(θ) ΛΑΘΟΣ Πάρτε για παράδειγμα την $f(x) = x^2$, $x \in \mathbb{R}$. Είναι $f'(x) = 2x$, $\forall x \in \mathbb{R}$ και

$$(f(f(x)))' = f'(f(x)) \cdot f'(x) = f'(x^2) \cdot 2x = 2x^2 \cdot 2x = 4x^3$$

(ή απευθείας, αφού $f(f(x)) = x^4$) και $(f'(x))^2 = 4x^2$. Για $x = -1$ είναι $(f(f(-1)))' = -4 \neq 4 = (f'(-1))^2$.
Σημείωση: Στο πιο πάνω παράδειγμα, υπάρχουν σημεία στα οποία η σχέση είναι αληθής, π.χ. $(f(f(1)))' = 4 = (f'(1))^2$.

(ι) ΣΩΣΤΟ Αν η f είναι άρτια στο $\mathbb{R}$, τότε $f(-x) = f(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$ και αρα παραγωγίζοντας αμφότερα μέλη, έχουμε $-f'(-x) = f'(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$ και το ζητούμενο έπεται.

(ια) ΣΩΣΤΟ Αφού $f'(x) \neq 0$, $\forall x \in \Delta$.

(ιβ) ΛΑΘΟΣ Η κλίση της εφαπτομένης του γραφήματος της f στο τυχόν $x_0 > 0$ είναι $f'(x_0) = 1/x_0$. Η ευθεία με εξίσωση $y = -1/2x + 5$ έχει κλίση $\lambda = -1/2$. Αν $f'(x_0) \cdot \lambda = -1$, τότε $x_0 = 1/2$.

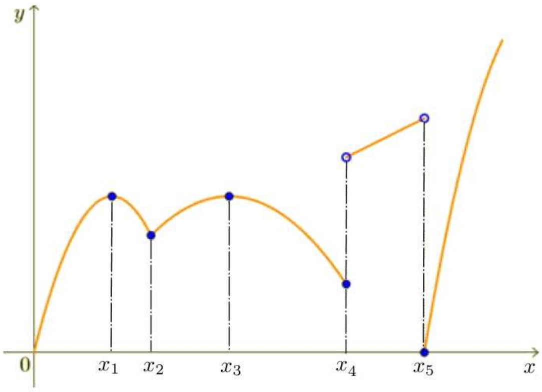
(ιγ) ΣΩΣΤΟ Σκεφθείτε την 'εξίσωση της εφαπτομένης' (και τη 'μοναδικότητα του ορίου')

Άσκηση 2

Στο πιο κάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f.

Να βάλετε σε κύκλο τη λανθασμένη πρόταση.

(α) Η f είναι παραγωγίσιμη στο x_1.
(β) Η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο x_2.
(γ) Η γραφική παράσταση της f δέχεται εφαπτομένη στο x_3.
(δ) Η f είναι παραγωγίσιμη στο x_4.
(ε) Η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο x_5.



Λύση

Η λανθασμένη απάντηση είναι η '**(δ)** Η f είναι παραγωγίσιμη στο x_4' αφού η συνάρτηση δεν είναι καν συνεχής στο σημείο αυτό. Για τις υπόλοιπες προτάσεις:

(α) Η f είναι παραγωγίσιμη στο x_1 και μάλιστα φαίνεται να είναι $f'(x_1) = 0$ (ύπαρξη οριζόντιας εφαπτομένης στο σημείο αυτό).

(β) Η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο x_2 αφού (φαίνεται) να σχηματίζει γωνιά (το x_2 είναι γωνιακό σημείο του γραφήματός της).

(γ) Η γραφική παράσταση της f δέχεται εφαπτομένη στο x_3 και μάλιστα φαίνεται να έχει οριζόντια εφαπτομένη στο σημείο αυτό.

(ε) Η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο x_5 αφού δεν είναι συνεχής στο σημείο αυτό.

Άσκηση 3

(α) Έστω μια συνάρτηση f και x_0 ενα σημείο του πεδίου ορισμού της. Πότε η f λέγεται παραγωγίσιμη στο x_0;

(β) Έστω η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = x\text{συν}|x| - x$. Με τη βοήθεια του ορισμού, να βρείτε την παράγωγο της f στο σημείο $x_0 = 0$.

Λύση

(α) Η f λέγεται παραγωγίσιμη σε ενα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της αν το όριο

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

υπάρχει και είναι πραγματικός αριθμός.

(β) Κατ'αρχάς, το $x_0 = 0$ ανήκει στο π.ο. της f. Αφού $|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$, έχουμε

$$f(x) = x\text{συν}|x| - x = \begin{cases} x\text{συν}x - x, & x \geq 0 \\ x\text{συν}(-x) - x, & x < 0. \end{cases}$$

Εξετάζουμε τη συνέχεια της f στο σημείο $x_0 = 0$:

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} (x\text{συν}x - x) = 0 \cdot \text{συν}0 - 0 = 0$$

και

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} (x\text{συν}(-x) - x) = 0 \cdot \text{συν}0 - 0 = 0$$

και αρα

$$\lim_{x\to 0} f(x) = 0 = f(0)$$

δηλ. η συνάρτηση είναι συνεχής στο σημείο $x_0 = 0$:
Διαφορετικά: η f είναι παντού συνεχής ώς σύνθεση συνεχών συναρτήσεων
Εξετάζουμε την παραγωγισιμότητα της f στο σημείο $x_0 = 0$:

$$f'_+(0) = \lim_{x\to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x\text{συν}x - x}{x}$$

το οποίο είναι απροσδιόριστη μορφή $0/0$. Αίρουμε την απροσδιοριστία:

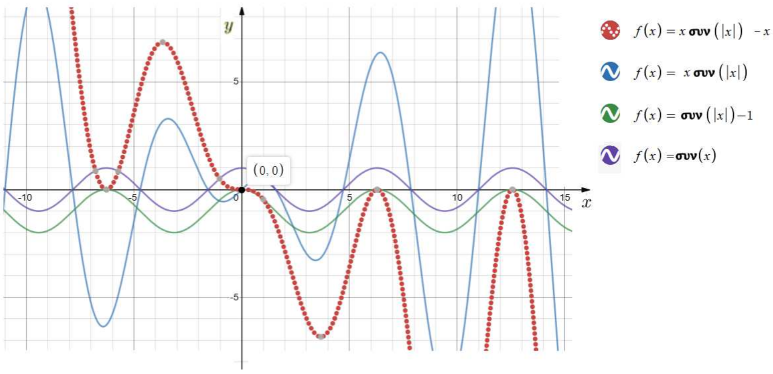
$$\lim_{x\to 0^+} \frac{x(\text{συν}x - 1)}{x} = \lim_{x\to 0^+} (\text{συν}x - 1) = \text{συν}0 - 1 = 1 - 1 = 0$$

Εντελώς όμοια βρίσκουμε ότι $f'_-(0) = 0$. Συνεπώς, $f'(0) = 0$.

Σημείωση:

1. Η μελέτη της ύπαρξης της παραγώγου $f'(0)$ μπορούσε να γίνει και χωρίς τη μελέτη (πρώτα) της συνέχειας της συναρτήσης στο σημείο αυτό (γιατί;)

2. Η χάραξη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f γίνεται με χρήση εργαλείων που θα μάθουμε στην επόμενη τάξη. Όμως, κάνοντας τις πιο κάτω παρατηρήσεις, μπορούμε να σκεφτούμε πως θα είναι η μορφή της:
Κατ'αρχάς, η συνάρτηση είναι περιττή (συμμετρική περι του άξονα των τετμημένων).
Ο πολλαπλασιασμός της συνάρτηση $x \mapsto \text{συν}x$ με την συνάρτηση $x \mapsto x$ (δηλ. την ταυτοτική συνάρτηση) 'έλκει' το γράφημα της πρώτης προς τα πάνω. Ακολούθως, η αφαίρεση της ταυτοτικής συνάρτησης από τη συνάρτηση $x \mapsto x \cdot \text{συν}x$ την 'σπρώχνει' προς τα κάτω.
Το ίδιο μπορούμε να το δούμε και ως εξής: η συνάρτηση $x \mapsto \text{συν}x - 1$ είναι κατακόρυφη μετατόπιση της συνάρτησης $x \mapsto \text{συν}x$ μια μονάδα προς τα κάτω, ενώ ο πολλαπλασιασμός της $x \mapsto \text{συν}x - 1$ με την ταυτοτική συνάρτηση, την έλκει προς τα κάτω.



Άσκηση 4

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο:

$$f(x)=\begin{cases}\eta\mu x, & x\le 0\\ xe^x, & x>0.\end{cases}$$

(α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=0$.

(β) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο με τετμημένη $x_0=0$.

Λύση

(α)Είναι

$$f'_+(0)=\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{xe^x}{x}=\lim_{x\to 0^+}e^x=e^{\lim_{x\to 0^+}x}=e^0=1$$

(λόγω της συνέχειας της εκθετικής συνάρτησης στο $x_0=0$) και

$$f'_-(0)=\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^-}\frac{\eta\mu x}{x}=1$$

(γνωστό όριο)

Άρα το όριο $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}$ υπάρχει και είναι ίσο με 1, δηλ. $f'(0)=1$.

(β) Είναι $f(0)=0$. Η εξίσωση της εφαπτομένης του γραφήματος της f στο σημείο με $x_0=0$ είναι η

$$y-f(0)=f'(0)\cdot(x-0),$$

δηλ. η $y=x$.

Άσκηση 5

Αν $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)}{x-1}=4$ και η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $x_0=1$, να δείξετε ότι η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=1$.

Λύση

Θεωρούμε τη συνάρτηση g με $g(x)=\dfrac{f(x)}{x-1}$, $x\neq 1$. Τότε για $x\neq 1$ είναι $f(x)=(x-1)\cdot g(x)$ και αρα

$$\lim_{x\to 1}f(x)=\lim_{x\to 1}(x-1)\cdot g(x)=0$$

Αφού η f είναι συνεχής στο $x_0=1$, έχουμε ότι $f(1)=\lim\limits_{x\to 1}f(x)$ και τα πιο πάνω δίνουν τελικά ότι $f(1)=0$. Τέλος,

$$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)}{x-1}=4\Rightarrow\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-0}{x-1}=4\Rightarrow\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=4,$$

δηλ. $f'(1)=4$.

Άσκηση 6

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - \alpha x + 2, & x < 1 \\ \beta\sqrt{x}, & x \geq 1. \end{cases}$$

Να υπολογίσετε τις τιμές των $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ για τις οποίες η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 1$.

Λύση

Κατ'αρχάς, η f είναι καλά ορισμένη αφού για $x \geq 1$ έχουμε $\sqrt{x} \in \mathbb{R}$. Για να είναι παραγωγίσιμη η συνάρτηση στο σημείο $x_0 = 1$, πρέπει πρώτα να είναι συνεχής στο σημείο αυτό, δηλ. να ισχύει

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^-} f(x) = f(1) = \beta\sqrt{1} = \beta.$$

Είναι

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^-} f(x) \quad &\Longleftrightarrow \quad \overbrace{\lim_{x\to 1^+} \beta\sqrt{x}}^{=f(1)=\beta} = \lim_{x\to 1^-}(x^2 - \alpha x + 2) \\ &\Longleftrightarrow \quad \boxed{\beta = 3 - \alpha} \end{aligned}$$

Ακολούθως, για την πιο πάνω σχέση που συνδέει τα α και β η συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 1$

$$\begin{aligned} &\Longleftrightarrow \quad \lim_{x\to 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x\to 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} \Longleftrightarrow \lim_{x\to 1^-} \frac{x^2 - \alpha x + 2 - \overbrace{\beta}^{=3-\alpha}}{x - 1} = \lim_{x\to 1^+} \frac{\beta\sqrt{x} - \beta}{x - 1} \\ &\Longleftrightarrow \quad \lim_{x\to 1^-} \frac{x^2 - 1 - \alpha x + \alpha}{x - 1} = \beta \lim_{x\to 1^+} \frac{\sqrt{x} - 1}{(\sqrt{x} - 1)\cdot(\sqrt{x} + 1)} \\ &\Longleftrightarrow \quad \lim_{x\to 1^-} \frac{(x-1)\cdot(x+1) - \alpha(x-1)}{x - 1} = \beta \lim_{x\to 1^+} \frac{1}{\sqrt{x} + 1} \\ &\Longleftrightarrow \quad \lim_{x\to 1^-} \frac{(x-1)\cdot(x+1-\alpha)}{x - 1} = \frac{\beta}{1+1} \Longleftrightarrow \lim_{x\to 1^-}(x + 1 - \alpha) = \frac{\beta}{2} \Longleftrightarrow \boxed{\;2 - \alpha = \tfrac{\beta}{2}\;} \end{aligned}$$

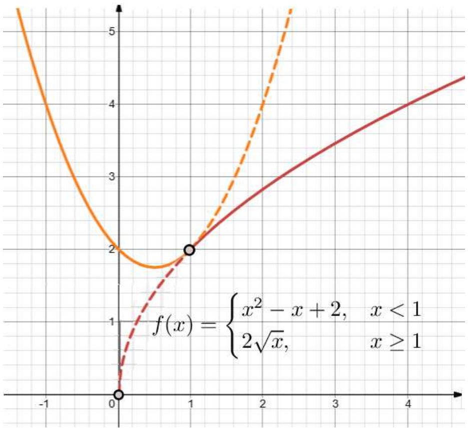
Άρα

$$\begin{cases} \beta = 3 - \alpha \\ \\ 2 - \alpha = \frac{\beta}{2} \end{cases} \Longleftrightarrow \alpha = 1, \quad \beta = 2$$

Για τα α και β αυτά, η συνάρτηση που προκύπτει είναι

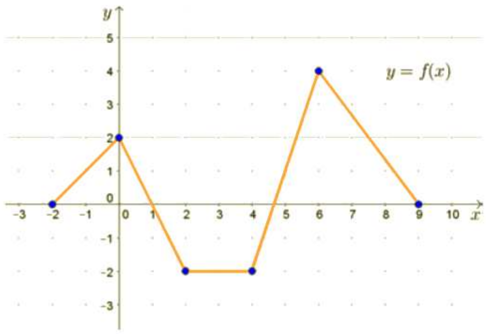
$$f(x) = \begin{cases} x^2 - x + 2, & x < 1 \\ 2\sqrt{x}, & x \geq 1. \end{cases}$$

η οποία είναι παραγωγίσιμη στο σημείο $x_0 = 1$.



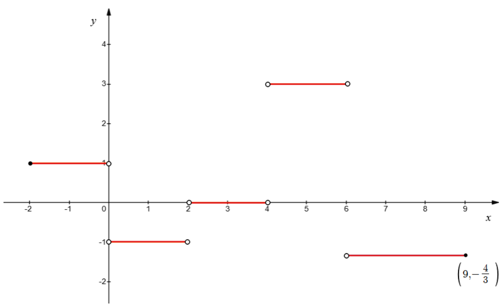
Άσκηση 7

Πιο κάτω δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f. Να παραστήσετε γραφικά την παράγωγό της, f'.



Λύση

Εφόσον η γραφική παράσταση της συνάρτησης f είναι κατα τμήματα ευθείες, η παράγωγός της στα αντίστοιχα τμήματα θα είναι σταθερά και ίση με την κλίση της αντίστοιχης ευθείας. Στα σημεία αλλαγής της κλίσης $(x = 0, 2, 4, 6)$ η παράγωγος δεν ορίζεται:



Άσκηση 8

Να βρείτε την παράγωγο συνάρτηση των πιο κάτω συναρτήσεων:

(α) $f(x) = x^3 - 2x^2 + x + 6$

(β) $f(x) = \dfrac{x^5}{5} - \dfrac{8}{x^2} - \ln 3$

(γ) $f(x) = 3\sqrt{x} - \text{ημ}x + 5\text{τεμ}x$

(δ) $f(x) = (x+2)\ln x$

(ε) $f(x) = x^4 \text{εφ}x$

(στ) $f(x) = \dfrac{x}{x^2+4}$

(ζ) $y = \dfrac{x\text{ημ}x}{e^x+1}$

(η) $y = \ln(x^3-1)$

(θ) $y = \sqrt{\text{ημ}^3 x}$

(ι) $y = \text{σφ}(\text{συν}x)$

(ια) $y = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$

(ιβ) $y = x^{e^x},\ x > 0$

Λύση

(α) Είναι $D(f) = \mathbb{R}$ και η f είναι παραγωγίσιμη στο π.ο. της (ως πολυωνυμική) με

$$f'(x) = (x^3 - 2x^2 + x + 6)' = (x^3)' - 2(x^2)' + x' + 6' = 3x^2 - 4x + 1, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

(β) Είναι $D(f) = \mathbb{R} - \{0\}$ και η f είναι παραγωγίσιμη στο π.ο. της (ως σύνθεση τέτοιων) με

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(\frac{x^5}{5} - \frac{8}{x^2} - \ln 3\right)' = \left(\frac{x^5}{5}\right)' - (8\cdot x^{-2})' + (-\ln 3)' \\ &= \frac{5x^4}{5} - 8\cdot\left(\frac{-2}{x^3}\right) = x^4 + \frac{16}{x^3}, \quad \forall x \in \mathbb{R} - \{0\}. \end{aligned}$$

(γ) Είναι $D(f) = (\mathbb{R} - \{k\pi/2,\, k \in \mathbb{Z}\}) \cap \{x > 0\} = (0, +\infty) - \{k\pi/2,\, k \in \mathbb{N}\} := A$ και η f είναι παραγωγίσιμη στο π.ο. της (ως σύνθεση τέτοιων) με

$$f'(x) = (3\sqrt{x} - \text{ημ}x + 5\text{τεμ}x)' = 3(\sqrt{x})' - (\text{ημ}x)' + 5(\text{τεμ}x)' = \frac{3}{2\sqrt{x}} - \text{συν}x + 5\text{τεμ}x\cdot\text{εφ}x$$

$\forall x \in A$.

(δ) Είναι $D(f) = (0, +\infty)$ και η f είναι παραγωγίσιμη στο π.ο. της (ως σύνθεση τέτοιων) με

$$f'(x) = [(x+2)\ln x]' = (x+2)'\cdot\ln x + (x+2)\cdot(\ln x)' = 1\cdot\ln x + (x+2)\cdot\frac{1}{x} = \ln x + 1 + \frac{2}{x}$$

$\forall x \in (0, +\infty)$.

(ε) Είναι $D(f) = \mathbb{R} - \{k\pi,\, k \in \mathbb{Z}\} := A$ και η f είναι παραγωγίσιμη στο π.ο. της (ως σύνθεση τέτοιων) με

$$\begin{aligned} f'(x) &= (x^4\text{εφ}x)' = (x^4)'\cdot\text{εφ}x + x^4\cdot(\text{εφ}x)' \\ &= 4x^3\cdot\text{εφ}x + x^4\cdot\text{τεμ}^2 x = x^3(4\text{εφ}x + x\cdot\text{τεμ}^2 x) \quad \forall x \in A \end{aligned}$$

(στ) Είναι $D(f)=\mathbb{R}$ και η f είναι παραγωγίσιμη στο π.ο. της (ως σύνθεση τέτοιων) με

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(\frac{x}{x^2+4}\right)' = \frac{(x)'\cdot(x^2+4)-x\cdot(x^2+4)'}{(x^2+4)^2} \\ &= \frac{x^2+4-x\cdot(2x)}{(x^2+4)^2} = \frac{4-x^2}{(x^2+4)^2}, \quad \forall x\in\mathbb{R} \end{aligned}$$

(ζ) Η συνάρτηση έχει π.ο. το $\mathbb{R}$ και είναι παραγωγίσιμη στο π.ο. της με

$$\begin{aligned} y'(x) &= \left(\frac{x\eta\mu x}{e^x+1}\right)' = \frac{(x\eta\mu x)'\cdot(e^x+1)-x\eta\mu x\cdot(e^x+1)'}{(e^x+1)^2} \\ &= \frac{[(x)'\cdot\eta\mu x+x\cdot(\eta\mu x)']\cdot(e^x+1)-x\eta\mu x\cdot e^x}{(e^x+1)^2} \\ &= \frac{(\eta\mu x+x\cdot\sigma\upsilon\nu x)\cdot(e^x+1)-x\eta\mu x\cdot e^x}{(e^x+1)^2} \\ &= \frac{e^x\cdot\eta\mu x+\eta\mu x+x\cdot e^x\sigma\upsilon\nu x+x\cdot\sigma\upsilon\nu x-x\cdot e^x\cdot\eta\mu x}{(e^x+1)^2} \end{aligned}$$

$\forall x\in\mathbb{R}$.

(η) Είναι

$$D(f)=\{x\in\mathbb{R}\,:\,x^3-1>0\}=\{x\in\mathbb{R}\,:\,(x-1)\cdot(x^2+x+1)>0\}=\{x>1\}=(1,+\infty)$$

και η συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη στο π.ο. της με

$$y'(x)=[\ln(x^3-1)]'=\frac{(x^3-1)'}{x^3-1}=\frac{3x^2}{x^3-1}, \quad \forall x\in(1,+\infty).$$

(θ) Είναι [6]

$$D(f)=[0,\pi]\cup\left(\bigcup_{k\in\mathbb{N}}[k\pi,(k+1)\pi]\right):=A$$

δηλ.

$$[0,\pi]\cup[\pi,2\pi]\cup[3\pi,4\pi]\ldots.$$

και η f είναι παραγωγίσιμη στο A με

$$y'(x)=\left((\eta\mu x)^{\frac{3}{2}}\right)'=\frac{3}{2}\cdot(\eta\mu x)'\cdot(\eta\mu x)^{\frac{1}{2}}=\frac{3}{2}\cdot\sigma\upsilon\nu x\cdot\sqrt{\eta\mu x}$$

$\forall x\in A$.

(ι) Είναι

$$D(f)=\mathbb{R}-\{k\pi/2,\,k\in\mathbb{Z}\}$$

και η f είναι παραγωγίσιμη στο $D(f)$ με

$$y'(x)=(\sigma\varphi(\sigma\upsilon\nu x))'=(\sigma\upsilon\nu x)'\cdot(-\sigma\tau\epsilon\mu^2(\sigma\upsilon\nu x))=\eta\mu x\cdot\sigma\tau\epsilon\mu^2(\sigma\upsilon\nu x)$$

[6] Θυμηθείτε τη γνωστή σύμβαση για τον ορισμό της ρητής δύναμης

$\forall x \in A$.
(ια) Είναι $D(f) = \mathbb{R}$ και (πολλαπλασιάζουμε αριθμητή και παρονομαστή με e^x)

$$y(x) = \frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}$$

Η συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη στο π.ο. της με

$$\begin{aligned} y'(x) &= \left(\frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}\right)' = \frac{(e^{2x}-1)'\cdot(e^{2x}+1)-(e^{2x}-1)\cdot(e^{2x}+1)'}{(e^{2x}+1)^2} \\ &= \frac{2e^{2x}\cdot(e^{2x}+1)-(e^{2x}-1)\cdot 2e^{2x}}{(e^{2x}+1)^2} = 2e^{2x}\cdot\frac{e^{2x}+1-e^{2x}+1}{(e^{2x}+1)^2} \\ &= \frac{4e^{2x}}{(e^{2x}+1)^2}, \quad \forall x \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

(ιβ) Έχουμε για κάθε $x > 0$ (λογαριθμική παράγωγος)

$$\begin{aligned} y(x) = x^{e^x} &\iff \ln(y(x)) = \ln(x^{e^x}) \iff \ln(y(x)) = e^x\ln(x) \\ &\iff \frac{d(\ln(y(x)))}{dx} = \frac{d(e^x\ln(x))}{dx} \\ &\iff \frac{y'(x)}{y(x)} = (e^x\ln(x))' = (e^x)'\cdot\ln(x) + (e^x)\cdot(\ln(x))' = e^x\cdot\ln(x) + e^x\cdot\frac{1}{x} \\ &\iff y'(x) = \underbrace{y(x)}_{=x^{e^x}}\cdot e^x\cdot\left(\ln(x)+\frac{1}{x}\right) = x^{e^x}\cdot e^x\cdot\left(\ln(x)+\frac{1}{x}\right) \end{aligned}$$

Άσκηση 9

Δίνεται η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = xe^x$.
(α) Να προσδιορίσετε τις συναρτήσεις f' και f''
(β) Να βρείτε τις τιμές των $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$, ώστε:

$$\alpha f(x) + \beta f'(x) + \gamma f''(x) = f(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Λύση

(α) Είναι

$$\begin{aligned} f(x)=xe^x,\quad \forall x\in\mathbb{R} &\iff f'(x)=(xe^x)',\quad \forall x\in\mathbb{R}\\ &\iff f'(x)=(x)'e^x+x\cdot(e^x)',\quad \forall x\in\mathbb{R}\\ &\iff \boxed{f'(x)=e^x+x\cdot e^x=(1+x)\cdot e^x,\quad \forall x\in\mathbb{R}}\\ &\iff f''(x)=(f'(x))'=[(1+x)\cdot e^x]',\quad \forall x\in\mathbb{R}\\ &\iff f''(x)=(1+x)'\cdot e^x+(1+x)\cdot(e^x)'\\ &\iff f''(x)=e^x+(1+x)\cdot e^x,\ \forall x\in\mathbb{R}\\ &\iff \boxed{f''(x)=(x+2)\cdot e^x,\quad \forall x\in\mathbb{R}} \end{aligned}$$

Διαφορετικά, παρατηρούμε ότι

$$f'(x)=e^x+x\cdot e^x=e^x+f(x),\quad \forall x\in\mathbb{R}$$

και αρα

$$f''(x)=e^x+f'(x)=e^x+e^x+x\cdot e^x=(x+2)\cdot e^x,\quad \forall x\in\mathbb{R}$$

(β) Είναι[7]

$$\begin{aligned} & \alpha f(x)+\beta f'(x)+\gamma f''(x)=f(x),\quad \forall x\in\mathbb{R}\\ \iff\ & \alpha xe^x+\beta(x+1)\cdot e^x+\gamma(x+2)\cdot e^x=xe^x,\quad \forall x\in\mathbb{R}\\ \iff\ & (\alpha+\beta+\gamma)\cdot xe^x+(\beta+2\gamma)\cdot e^x=1\cdot xe^x+0\cdot e^x,\quad \forall x\in\mathbb{R}\\ \iff\ & \begin{cases}\alpha+\beta+\gamma=1\\ \beta+2\gamma=0\end{cases} \iff \beta=-2\gamma,\quad \alpha=\gamma+1 \end{aligned}$$

Άρα, έχουμε άπειρες λύσεις, της μορφής

$$\alpha=\gamma+1,\qquad \beta=-2\gamma,\quad \gamma\in\mathbb{R}$$

[7] Η τρίτη ισοδυναμία έπεται λόγω της ισχύς της προηγούμενης για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Αυτό όμως είναι εκτός σχολικής ύλης και δικαιολογείται αυστηρά με το ότι το σύνολο $\{x, x\cdot e^x\}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο επί του $\mathbb{R}$

Άσκηση 10

Δίνεται η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = x^2 - 4x + 11$. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f, η οποία να:
(α) είναι παράλληλη με τον άξονα $x'x$.

(β) είναι παράλληλη με την ευθεία με εξίσωση $y = 4x + 2017$.

(γ) είναι κάθετη στην ευθεία με εξίσωση $x + 8y + 1 = 0$.

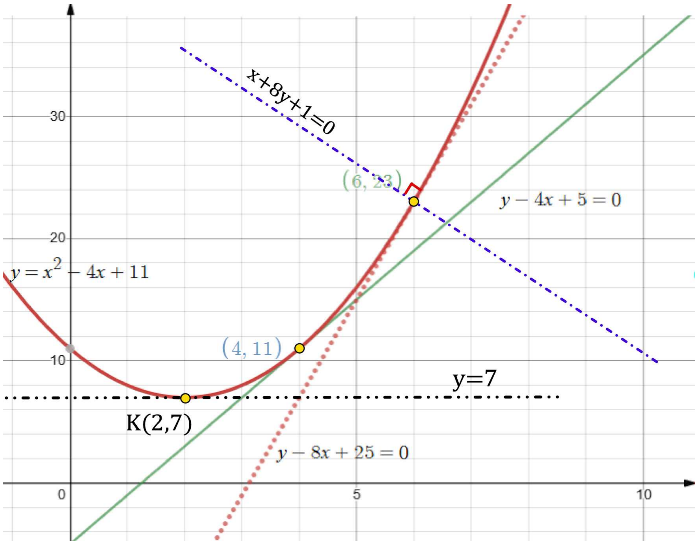
(δ) έχει σημείο επαφής το σημείο $A(6, -2)$.

Λύση
Είναι
$$f'(x) = 2(x-2), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$
Παρατηρήστε ακόμα ότι $\forall x \in \mathbb{R}$
$$f(x) = x^2 - 4x + 11 = (x-2)^2 + 7$$
δηλ. η γραφική παράσταση της συνάρτησης f είναι η παραβολή με κορυφή το σημείο $K(2, 7)$ στο οποίο λαμβάνει (ολικό) μέγιστο.
(α) Είναι
$$f'(x) = 0 \iff 2(x-2) = 0 \iff x = 2$$
Επίσης, $f(2) = 7$. Άρα, η εξίσωση της ευθείας η οποία είναι παράλληλη με τον άξονα των τετμημένων είναι η $y = 7$.

(β) Η κλίση της ευθείας με την οποία ζητούμε να είναι παράλληλη η εφαπτομένη είναι $\lambda = 4$. Έτσι, οι κλίσεις είναι ίσες στα σημεία $x \in \mathbb{R}$ τέτοια ώστε $f'(x) = 4$, δηλ. στο $x = 4$. Είναι $f(4) = 11$. Άρα, η εξίσωση της εφαπτομένης του γραφήματος της f η οποία είναι παράλληλη με την ευθεία με εξίσωση $y = 4x + 2017$ είναι η $y - f(4) = f'(4) \cdot (x-4)$,δηλ. η $y - 11 = 4(x-4)$, δηλ. η $\boxed{(\text{εφ.}): \quad y - 4x + 5 = 0}$

(γ) Η ευθεία με εξίσωση $x + 8y + 1 = 0$ έχει κλίση $\lambda = -1/8$. Έτσι, μια ευθεία η οποία είναι κάθετη στην ευθεία αυτή και εφάπτεται του γραφήματος της f, θα έχει κλίση αντιθετοαντίστροφη της κλίσης της πιο πάνω ευθείας. Συνεπώς,
$$f'(x) = 8 \iff x = 6.$$
Είναι $f(6) = 23$. Άρα, η εξίσωση της εφαπτομένης του γραφήματος της f η οποία είναι κάθετη με την ευθεία με εξίσωση $x + 8y + 1 = 0$ είναι η $y - f(6) = f'(6) \cdot (x-6)$, δηλ. η $y - 23 = 8(x-6)$, δηλ. η $\boxed{(\text{εφ.}): \quad y - 8x + 25 = 0}$

(δ) Το σημείο $A(6, -2)$ ΔΕΝ ανήκει στο γράφημα της f.



Άσκηση 11

Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ με τύπο

$$f(x)=x\ln x-\alpha x,\quad (\alpha\in\mathbb{R})$$

στο σημείο της $A(1,f(1))$, διέρχεται από σταθερό σημείο για κάθε τιμή του α.

Λύση

Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη για κάθε τιμή της παραμέτρου α με

$$f'(x)=\ln x+1-\alpha,\quad \forall x>0.$$

Η εφαπτομένη του γραφήματος της f στο σημείο της $A(1,f(1))$ έχει κλίση $\lambda=f'(1)=1-\alpha$. Επίσης, $f(1)=-\alpha$. Συνεπώς, η εξίσωση της ζητούμενης εφαπτομένης είναι η $y-f(1)=f'(1)(x-1)$, δηλ.η $y+\alpha=(\alpha-1)(x-1)$, δηλ. η $y+(1-\alpha)x+1=0$
Η ευθεία αυτή περνά από το σημείο $(0,-1)$ για κάθε τιμή της πραγματικής παραμέτρου α.

Άσκηση 12

Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ δυο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, ώστε

$$f(x)+f(-x)=x^2,\quad \forall x\in\mathbb{R}.$$

Να δείξετε ότι $f''(0)=1$.

Λύση

Είναι (αφού η f είναι δις-παραγωγίσιμη)

$$f(x)+f(-x)=x^2,\quad \forall x\in\mathbb{R} \overset{\text{παραγωγίζω}}{\iff} f'(x)-f'(-x)=2x,\quad \forall x\in\mathbb{R}$$

$$\overset{\text{παραγωγίζω}}{\iff} f''(x)+f''(-x)=2,\quad \forall x\in\mathbb{R}$$

Συνεπώς, για $x=0$, η πιο πάνω δίνει $f''(0)+f''(0)=2$, δηλ. $f''(0)=1$.

Άσκηση 13

Να βρείτε τις τιμές των $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, ώστε οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με τύπους $f(x)=\alpha+\text{συν}(\pi x)$ και $g(x)=x^2+3\beta x+1$, αντίστοιχα, να έχουν κοινή εφαπτομένη στο σημείο $x_0=1$.

Λύση

Οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και g έχουν κοινή εφαπτομένη στο σημείο $x_0=1$ αν και μόνο αν

$$\begin{cases} f(1)=g(1) \\ f'(1)=g'(1) \end{cases}$$

Αλλά, οι εν λόγω συναρτήσεις είναι παντού παραγωγίσιμες με

$$f'(x)=(\alpha+\text{συν}(\pi x))'=(\text{συν}(\pi x))'=(\pi x)'\cdot(-\text{ημ}(\pi x))=-\pi\cdot\text{ημ}(\pi x),\ \forall x\in\mathbb{R}$$

και $g'(x)=2x+3\beta$, $\forall x\in\mathbb{R}$. Έτσι,

$$\begin{cases} f(1)=g(1) \\ f'(1)=g'(1) \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha-1=2+3\beta \\ 0=3\beta+2 \end{cases} \iff \begin{cases} \beta=-\frac{2}{3} \\ \alpha=1 \end{cases}$$

Άσκηση 14

Δίνονται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}-\{0\}$ και η δύο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$. Αν ισχύει η σχέση

$$g^2(x)+(g'(x))^2=1,\quad \text{για κάθε } x\in\mathbb{R}$$

και αν $M(\alpha,\beta)$ είναι το κοινό σημείο των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και h, όπου $h(x)=f(x)\cdot g(x)$, $x\in\mathbb{R}$, να αποδείξετε ότι:

(α) $g'(\alpha)=1$ και $g(\alpha)+g''(\alpha)=0$.

(β) $g(\alpha)=0$.

Λύση

(α) Είναι $R(f)=\mathbb{R}-\{0\}$ και αρα $f(\alpha)\neq 0$. Τώρα,

$$f(\alpha)=h(\alpha)\iff f(\alpha)=f(\alpha)\cdot g(\alpha)\iff (1-g'(\alpha))\cdot f(\alpha)=0 \overset{f(\alpha)\neq 0}{\iff} 1-g'(\alpha)=0\iff g'(\alpha)=1$$

Τώρα, $\forall x \in \mathbb{R}$ είναι

$$\begin{aligned} g^2(x) + [g'(x)]^2 = 1 \quad & \overset{\text{παραγωγίζω}}{\iff} \quad 2g(x) \cdot g'(x) + 2g'(x) \cdot g''(x) = 0 \\ & \iff \quad 2g'(x) \cdot [g(x) + g''(x)] = 0 \\ & \iff \quad g'(x) \cdot [g(x) + g''(x)] = 0 \end{aligned}$$

και για $x = \alpha$ έχουμε

$$g'(\alpha) \cdot [g(\alpha) + g''(\alpha)] = 0,$$

δηλ. (αφού $g'(\alpha) = 1$),

$$g(\alpha) + g''(\alpha) = 0$$

(β) Είναι

$$g^2(x) + [g'(x)]^2 = 1,\ \forall x \in \mathbb{R} \iff g^2(\alpha) + \underbrace{[g'(\alpha)]^2}_{=1} = 1 \iff g^2(\alpha) = 0 \iff g(\alpha) = 0.$$

Άσκηση 15

Το ύψος (x) της στάθμης του νερού σε ενα κυλινδρικό δοχείο με ακτίνα βάσης $2\,cm$ ανεβαίνει με ρυθμό $2/\pi\, cm/sec$.

(α) Να βρείτε μια σχέση που να συνδέει τον όγκο (V) του νερού με το ύψος της στάθμης του (x).

(β) Να βρείτε το ρυθμό με τον οποίο αυξάνεται ο όγκος του νερού μέσα στο κυλινδρικό δοχείο.

Λύση

(α) Έστω

$$V : (0, +\infty) \to \mathbb{R} \qquad \text{με} \qquad t \to V(t) = \pi R^2 \cdot x(t)$$

η συνάρτηση που δίνει τον όγκο του νερού σε κυλινδρικό δοχείο με ακτίνα βάσης $R\,cm$ και ύψος στάθμης $x(t)$. Αφού $R = 2\,cm$ έπεται ότι $V(t) = 4\pi \cdot x(t)$, $t > 0$.

(β) Το ύψος της στάθμης του νερού ανεβαίνει με ρυθμό $2/\pi\, cm/sec$, δηλ. $x'(t) = 2/\pi\, cm/sec$, $\forall t > 0$. Έτσι, για κάθε $t > 0$ έχουμε

$$V'(t) = 4\pi \cdot x'(t) = 8\,\frac{cm^3}{sec}$$

Άσκηση 16

Σε ενα ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ η περίμετρος αυξάνεται με ρυθμό $3\,m/sec$. Να βρείτε:

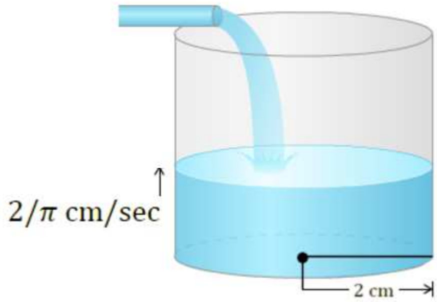
(α) τον ρυθμό μεταβολής της πλευράς του τριγώνου.

(β) τον ρυθμό μεταβολής του εμβαδού του τριγώνου, όταν αυτό είναι ίσο με $\sqrt{3}\,cm^2$.

Λύση

Έστω

$$\Pi : (0, +\infty) \to \mathbb{R} \qquad \text{με} \qquad x \mapsto \Pi(x) = 3x$$



η συνάρτηση που δίνει την περίμετρο του ισοπλεύρου τριγώνου.

(α) Από τα δεδομένα της άσκησης, είναι $\Pi'(x) = 3\,cm/sec$, $\forall x \in (0, +\infty)$.
Αν α δηλώνει το (μεταβαλλόμενο) μήκος της πλευράς του ισοπλεύρου τριγώνου, τότε αυτό είναι συνάρτηση του χρόνου, δηλ. $t \mapsto \alpha(t)$. Από τον κανόνα της αλυσίδας έχουμε

$$(\Pi \circ \alpha)'(x) = \Pi'(\alpha(t)) \cdot \alpha'(t) = 3\alpha'(t),\ \forall t \in (0, +\infty)$$

Έτσι,

$$\Pi'(t) = 3\,\frac{cm}{sec},\ \forall t \in (0, +\infty) \iff 3\alpha'(t) = 3,\ \forall t \in (0, +\infty) \iff \alpha'(t) = 1,\ \forall t \in (0, +\infty)$$

(β) Η συνάρτηση E που δίνει το εμβαδόν είναι η

$$E : (0, +\infty) \to \mathbb{R} \qquad \text{με} \qquad t \mapsto E(t) = \frac{\alpha^2(t) \cdot \text{ημ}\left(\frac{\pi}{3}\right)}{2} = \frac{\alpha^2(t)\sqrt{3}}{4}$$

Αν τη χρονική στιγμή $t = t_0$ το εμβαδόν $E(t_0)$ είναι ίσο με $\sqrt{3}\,cm^2$, τότε

$$\sqrt{3} = \frac{\alpha^2(t_0)\sqrt{3}}{4} \iff \alpha(t_0) = 2\,cm,$$

αφού $\alpha(t) > 0$, $\forall t > 0$. Συνεπώς, ο ρυθμός μεταβολής είναι

$$E'(t_0) = \frac{2\alpha(t_0) \cdot \alpha'(t_0)}{2} = \sqrt{3}\ \frac{cm^2}{sec}.$$

Άσκηση 17

Να βρείτε την παράγωγο $\dfrac{dy}{dx}$ των συναρτήσεων που ορίζονται από τις πιο κάτω:

(α) $x^2 + y^2 = 9$ **(β)** $x^3 - xy + y^2 = 7$ **(γ)** $x^3y^3 - y = x$

(δ) $\sqrt{xy} = x^2y + 1$ **(ε)** $y = \text{ημ}(xy)$ **(στ)** $(\text{ημ}(\pi x) + \text{συν}(\pi y))^2 = 2$

Λύση

(α)

$$x^2+y^2=9 \iff \frac{d(x^2+y^2)}{dx}=\frac{d(9)}{dx}$$
$$\iff \frac{d(x^2)}{dx}+\frac{d(y^2)}{dx}=0$$
$$\iff 2x+2y\frac{dy}{dx}=0$$
$$\iff \boxed{\frac{dy}{dx}=-\frac{x}{y}\quad (y\neq 0)}$$

(β)

$$x^3-xy+y^2=7 \iff \frac{d(x^3-xy+y^2)}{dx}=\frac{d(7)}{dx}$$
$$\iff \frac{d(x^3)}{dx}-\frac{d(xy)}{dx}+\frac{d(y^2)}{dx}=0$$
$$\iff 3x^2-\left(x'\cdot y+x\cdot\frac{dy}{dx}\right)+2y\frac{dy}{dx}=0$$
$$\iff 3x^2-y-x\cdot\frac{dy}{dx}+2y\frac{dy}{dx}=0$$
$$\iff (2y-x)\cdot\frac{dy}{dx}=y-3x^2$$
$$\iff \boxed{\frac{dy}{dx}=\frac{y-3x^2}{2y-x}\quad \left(y\neq\frac{x}{2}\right)}$$

(γ)

$$x^3y^3-y=x \iff \frac{d(x^3y^3-y)}{dx}=\frac{d(x)}{dx}$$
$$\iff \frac{d(x^3y^3)}{dx}-\frac{dy}{dx}=1$$
$$\iff 3x^2y^3+3x^3y^2\frac{dy}{dx}-\frac{dy}{dx}=1$$
$$\iff (3x^3y^2-1)\frac{dy}{dx}=1-3x^2y^3$$
$$\iff \boxed{\frac{dy}{dx}=\frac{1-3x^2y^3}{3x^3y^2-1}}$$

(δ)

$$\sqrt{xy}=x^2y+1 \iff \frac{d(\sqrt{xy})}{dx}=\frac{d(x^2y+1)}{dx}$$
$$\iff \frac{\sqrt{y}}{2\sqrt{x}}+\frac{\sqrt{x}}{2\sqrt{y}}\cdot\frac{dy}{dx}=2xy+x^2\cdot\frac{dy}{dx}$$
$$\iff \frac{dy}{dx}=\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}}\cdot\frac{4xy\sqrt{x}-\sqrt{y}}{\sqrt{x}-2x^2\sqrt{y}}$$
$$\iff \boxed{\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x}\cdot\frac{4x\sqrt{xy}-1}{1-2x\sqrt{xy}}}$$

(ε)

$$y=\text{ημ}(xy) \iff \frac{dy}{dx}=\frac{d(xy)}{dx}\cdot\text{συν}(xy)$$
$$\iff \frac{dy}{dx}=y\text{συν}(xy)\frac{dy}{dx}+x\cdot\text{συν}(xy)$$
$$\iff \boxed{\frac{dy}{dx}=\frac{y\cdot\text{συν}(xy)}{1-x\cdot\text{συν}(xy)}}$$

(στ)

$$(\text{ημ}(\pi x)+\text{συν}(\pi y))^2=2$$
$$\iff 2(\text{ημ}(\pi x)+\text{συν}(\pi y))\cdot$$
$$\cdot\frac{d(\text{ημ}(\pi x)+\text{συν}(\pi y))}{dy}=0$$
$$\iff 2(\text{ημ}(\pi x)+\text{συν}(\pi y))\cdot$$
$$\cdot\left(\pi\cdot\text{συν}(\pi x)-\pi\cdot\text{ημ}(\pi y)\frac{dy}{dx}\right)=0$$
$$\iff \frac{dy}{dx}=\frac{(\text{ημ}(\pi x)+\text{συν}(\pi y))\cdot\text{συν}(\pi x)}{(\text{ημ}(\pi x)+\text{συν}(\pi y))\cdot\text{ημ}(\pi y)}$$
$$\iff \boxed{\frac{dy}{dx}=\frac{\text{συν}(\pi x)}{\text{ημ}(\pi y)}}$$

Άσκηση 18

Να δείξετε ότι η κάθετη ευθεία της καμπύλης με εξίσωση $x^2+y^2=r^2$, $r>0$ σε οποιοδήποτε σημείο της διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

Λύση Έχουμε
$$x^2+y^2=r^2 \Longleftrightarrow \frac{dy}{dx}=-\frac{x}{y} \quad (y\neq 0)$$
Η κλίση της εφαπτομένης ευθείας του γραφήματος της πιο πάνω καμπύλης σε τυχαίο σημείο $A(\alpha,\beta)$ με $\alpha\cdot\beta\neq 0$ είναι
$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{A(\alpha,\beta)}=-\frac{\alpha}{\beta}$$
και άρα (κατα τα γνωστά) η κλίση της καθέτου στο σημείο αυτό είναι $\frac{\beta}{\alpha}$. Έτσι, η εξίσωση της καθέτου είναι
$$y-\beta=\frac{\beta}{\alpha}\cdot(x-\alpha), \qquad \text{δηλ. η} \qquad y=\frac{\beta}{\alpha}x$$
η οποία διέρχεται από την αρχή των αξόνων.
Αν $\alpha=0$, τοτε $A(\alpha,\beta)\equiv A(0,\beta)$ και αρα η κλίση της καθέτου δεν ορίζεται, δηλ. η κάθετη είναι ο άξονας των τεταγμένων.
Αν $\beta=0$, τότε $A(\alpha,\beta)\equiv A(\alpha,0)$ και αρα η κλίση της καθέτου είναι 0, δηλ. η κάθετη είναι ο άξονας των τετμημένων.

Άσκηση 19

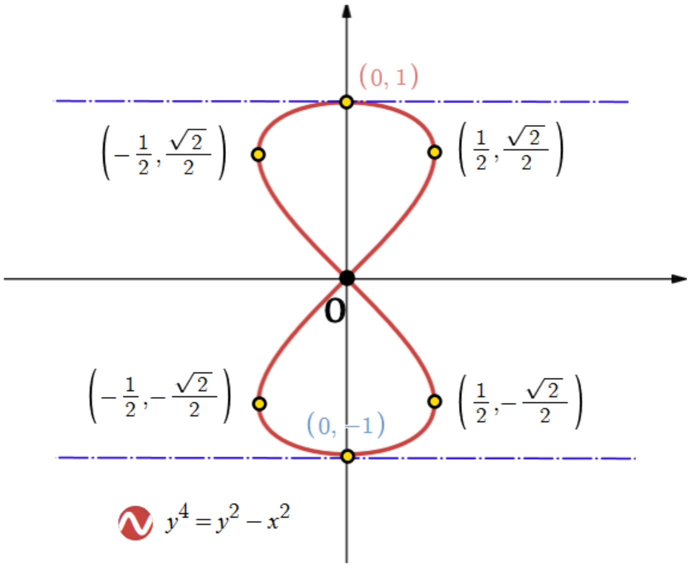
Να βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων της καμπύλης με εξίσωση $y^4=y^2-x^2$, στα οποία η εφαπτομένη ευθεία είναι οριζόντια.

Λύση Είναι
$$y^4=y^2-x^2 \overset{\text{παραγωγίζω}}{\Longleftrightarrow} 4y^3\frac{dy}{dx}=2y\frac{dy}{dx}-2x \Longleftrightarrow \frac{dy}{dx}=\frac{x}{y(1-2y^2)}$$
για $y\neq 0,\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$. Αν $A(\alpha,\beta)$ είναι σημείο του γραφήματος της καμπύλης που καθορίζεται από την πιο πάνω καμπύλη στο οποίο η κλίση της εφαπτομένης είναι 0, τότε
$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{A(\alpha,\beta)}=0 \Longleftrightarrow \frac{\alpha}{\beta(1-2\beta^2)}=0 \Longleftrightarrow \alpha=0.$$
και αφού $\beta\neq 0$,
$$\beta(1-2\beta^2)\neq 0 \Longleftrightarrow \beta\neq\pm 1.$$
Ετσι, τα ζητούμενα σημεία είναι τα $(0,1)$ και $(0,-1)$.

Άσκηση 20

Να κατασκευάσετε τη γραφική παράσταση των παραμετρικών καμπύλων:

(α) $\begin{cases} x=\text{συν}t \\ y=\text{ημ}t \end{cases}$, $t\in[0,2\pi)$ **(β)** $\begin{cases} x=t^2 \\ y=t+1 \end{cases}$, $t\in\mathbb{R}$



Σχήμα 2.12: Άσκηση 19

Λύση

(α) Βάζοντας τιμές στην παράμετρο t βρίσκουμε ότι η τροχιά της καμπύλης είναι κύκλος με κέντρο στην αρχή των αξόνων και ακτίνας $r = 1$. Ας βρούμε την καρτεσιανή εξίσωση της καμπύλης:

$$\begin{cases} x = \text{συν}t \\ y = \text{ημ}t \end{cases}, t \in [0, 2\pi) \iff \begin{cases} x^2 = \text{συν}^2 t \\ y = \text{ημ}^2 t \end{cases}, t \in [0, 2\pi) \iff x^2 + y^2 = 1$$

(β) Αφού $t \in \mathbb{R}$, έπεται ότι $(t+1) \in \mathbb{R}$ και $t^2 \in [0, +\infty)$. Έτσι, το Π.Ο. της είναι το $[0, +\infty)$ και το Σ.Τ. της το $\mathbb{R}$. Είναι $y(t) = t + 1 \Rightarrow y - 1 = t$ και αρα $x(t) = t^2 = (y(t) - 1)^2$. Έτσι η καρτεσιανή εξίσωση της καμπύλης είναι η

$$(y-1)^2 = x \quad (y \in \mathbb{R})$$

Αρχικό σημείο το $(x(0), y(0)) = (0, 1)$.

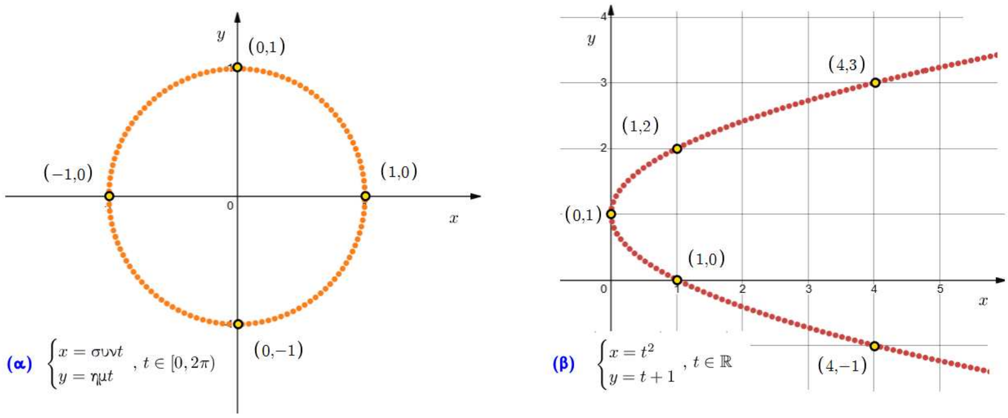
Άσκηση 21

Παραμετρική καμπύλη ορίζεται από τις εξισώσεις:

$$\begin{cases} x = t - t^2 \\ y = t - t^3 \end{cases}, t \neq \frac{1}{2}$$

Να βρείτε την παράγωγο $\dfrac{d^2 y}{dx^2}$.

Λύση



Σχήμα 2.13: Άσκηση 20

Είναι $\forall t \in \mathbb{R} - \{\frac{1}{2}\}$,

$$\frac{dx}{dt} = 1 - 2t \qquad \text{και} \qquad \frac{dy}{dt} = -\frac{1 - 3t^2}{1 - 2t}$$

και άρα για $\forall t \in \mathbb{R} - \{\frac{1}{2}\}$, η dx/dt ορίζεται και δεν είναι $=0$ και αρα

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \ldots = \frac{2(3t^2 + 3t + 1)}{(1 - 2t)^3}$$

Τώρα,

$$x(t) = 0 \iff \frac{2 + t}{1 + 2t} = 0 \iff t = -2$$

και αρα

$$\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{x=0} = \left.\frac{d^2y}{dt^2}\right|_{t=-2} = \frac{9}{4}$$

Άσκηση 22

Δίνεται η συνάρτηση $f : (2, +\infty) \to \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = x^2 - 4x - 5$. Να βρείτε την τιμή $(f^{-1})'(0)$.

Λύση

Η συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη στο πεδίο ορισμού της ως πολυωνυμική. Είναι αντιστρέψιμη ως 1-1 αλλά και επί του συνόλου $(2, +\infty)$ (δες θεωρία και παραδείγματα). Τώρα,

$$f(x) = 0 \iff x^2 - 4x - 5 = 0 \iff (x - 5)(x + 1) = 0,\ x \in (2, +\infty) \iff x = 5.$$

Πληρούνται οι υποθέσεις του Θεωρήματος παραγώγισης αντίστροφης συνάρτησης:

$$(f^{-1})'(0) = \frac{1}{f'(f^{-1}(0))} = \frac{1}{f'(5)} = \frac{1}{6}$$

αφού $f'(x) = 2(x - 2)$, $\forall x > 2 \Rightarrow f'(5) = 6$.

Άσκηση 23

Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση f με τύπο $y = f(x)$, η οποία αντιστρέφεται. Αν η γραφική παράσταση της f διέρχεται από το σημείο $A(0,0)$ και η κλίση της στο A ισούται με 2, να βρείτε την κλίση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f^{-1} για $x = 0$.

Λύση

Είναι $f(0) = 0$ και $f'(0) = 2$. Πληρούνται οι υποθέσεις του Θεωρήματος παραγώγισης αντίστροφης συνάρτησης:

$$(f^{-1})'(0) = \frac{1}{f'(f^{-1}(0))} = \frac{1}{f'(0)} = \frac{1}{2}$$

Άσκηση 24

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, η οποία είναι συνεχής στο $x_0 = 0$ και ικανοποιεί τη σχέση:

$$2x \cdot ημx \leq xf(x) \leq ημ^2x + x^2, \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Να αποδείξετε ότι:

(α) $f(0) = 0$ **(β)** $f'(0) = 2$

Λύση

(α) Θα χρησιμοποιήσουμε το Κριτήριο Παρεμβολής
Αν $x > 0$, τότε

$$2x \cdot ημx \leq xf(x) \leq ημ^2x + x^2 \Longrightarrow 2 \cdot \frac{ημ^2x}{x} \leq xf(x) \leq \frac{ημ^2x}{x} + x$$

και αφού

$$\lim_{x\to 0^+} (2ημx) = 2 \cdot ημ0 = 0$$

και

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{ημ^2x}{x} + x\right) &= \lim_{x\to 0^+}\left(x\frac{ημ^2x}{x^2} + x\right) = \lim_{x\to 0^+}\left(x\left(\frac{ημx}{x}\right)^2 + x\right) \\
&= \left(\lim_{x\to 0^+} x\right)\cdot\left(\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{ημx}{x}\right)^2\right) + \lim_{x\to 0^+} x \\
&= \left(\lim_{x\to 0^+} x\right)\cdot\left(\lim_{x\to 0^+}\frac{ημx}{x}\right)^2 + \lim_{x\to 0^+} x \\
&= 0 \cdot 1^2 + 0 = 0
\end{aligned}$$

Από το Κριτήριο Παρεμβολής έπεται λοιπόν ότι $\lim_{x\to 0^+} f(x) = 0$.
Εντελώς όμοια δείχνουμε ότι αν $x < 0$, τότε $\lim_{x\to 0-} f(x) = 0$. Συνεπώς,

$$\lim_{x\to 0} f(x) = 0$$

Αλλά, η f είναι συνεχής στο $x_0 = 0$ και άρα $f(0) = \lim_{x\to 0} f(x)$, δηλ. $f(0) = 0$.

(β) Είναι

$$f'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x) - \overbrace{f(0)}^{=0}}{x - 0} = \lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x}.$$

Για $x \neq 0$ έχουμε

$$2x \cdot \eta\mu x \leq x f(x) \leq \eta\mu^2 x + x^2 \Longrightarrow 2 \cdot \frac{\eta\mu x}{x} \leq \frac{f(x)}{x} \leq \frac{\eta\mu^2 x}{x^2} + 1$$

και αφού $2\lim_{x\to 0} \frac{\eta\mu x}{x} = 1$ και (ακολουθώντας ίδια επιχειρήματα όπως στο προηγούμενο ερώτημα)

$$\lim_{x\to 0} \left(\frac{\eta\mu^2 x}{x^2} + 1 \right) = \left(\lim_{x\to 0} \frac{\eta\mu x}{x} \right)^2 + 1 = 1 + 1 = 2,$$

έπεται από το Κριτήριο της Παρεμβολής ότι

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x} = 0,$$

δηλ. $f'(0) = 2$.

Άσκηση 25

Έστω η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, η οποία είναι συνεχής στο $x_0 = 0$ και ισχύει:

$$\lim_{x\to 0} \frac{x f(x) - 1 + \sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu^2 x} = \frac{1}{2}$$

Να αποδείξετε ότι:

(α) $f(0) = 0$ **(β)** $f'(0) = 1$ **(γ)** $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{\eta\mu x} = 1$

Λύση

(α) Θεωρούμε τη συνάρτηση $g : \mathbb{R} - \{k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\} \to \mathbb{R}$ με τύπο

$$g(x) = \frac{x \cdot f(x) - 1 + \sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu^2 x}$$

Για $x \in \mathbb{R} - \{k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$ έχουμε

$$g(x) \cdot \eta\mu^2 x = x \cdot f(x) - 1 + \sigma\upsilon\nu x$$

και άρα

$$f(x) = \frac{g(x) \cdot \eta\mu^2 x + 1 - \sigma\upsilon\nu x}{x} \tag{2.6}$$

Είναι τότε

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{g(x) \cdot \eta\mu^2 x + 1 - \sigma\upsilon\nu x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{g(x) \cdot \eta\mu^2 x + 2\eta\mu^2 \left(\frac{x}{2}\right)}{x}$$

Αλλά
$$\lim_{x\to 0}\frac{g(x)\cdot ημ^2 x}{x}=\left(\lim_{x\to 0}\frac{ημ^2 x}{x}\right)\cdot\left(\lim_{x\to 0} g(x)\right)$$
αφού τα δυο αυτά όρια υπάρχουν. Πράγματι, $\lim_{x\to 0}\frac{ημ^2 x}{x}=0$ (όπως πρίν) ενώ $\lim_{x\to 0} g(x)=1/2$ (από την υπόθεση) και αρα
$$\lim_{x\to 0}\frac{g(x)\cdot ημ^2 x}{x}=0.$$
Ομοίως,
$$\lim_{x\to 0}\frac{2ημ^2 x\left(\frac{x}{2}\right)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{ημ^2 x\left(\frac{x}{2}\right)}{\frac{x}{2}}=\lim_{h\to 0}\frac{ημ^2 h}{h}=0.$$
Έτσι,
$$\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{g(x)\cdot ημ^2 x+2ημ^2\left(\frac{x}{2}\right)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{g(x)\cdot ημ^2 x}{x}+\lim_{x\to 0}\frac{2ημ^2\left(\frac{x}{2}\right)}{x}=0$$
Τέλος, λόγω της συνέχειας της συνάρτησης στο σημείο $x_0=0$, έπεται ότι
$$f(0)=\lim_{x\to 0} f(x)=0.$$

(β) Έχουμε
$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}\overset{(2.6)}{=}\lim_{x\to 0}\frac{g(x)\cdot ημ^2 x+1-συνx}{x^2}$$
και ακολουθώντας τα ίδια επιχειρήματα με το προηγούμενο ερώτημα για τα όρια που εμφανίζονται, έχουμε τελικά ότι $f'(0)=1$.

(γ) Έχουμε
$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{ημx}\overset{(2.6)}{=}\lim_{x\to 0}\frac{g(x)\cdot ημ^2 x+1-συνx}{ημx}$$
και ακολουθώντας τα ίδια επιχειρήματα με το προηγούμενο ερώτημα για τα όρια που εμφανίζονται, έπεται ότι
$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{ημx}=1$$