0.9 Δραστηριότητες σελ. 71-72 (Παράγωγος Αντίστροφης Συνάρτησης)

Άσκηση 1

Με τη χρήση του θεωρήματος της παραγώγου αντίστροφης συνάρτησης, να αποδείξετε ότι:

$$(a^x)' = a^x \cdot \ln a, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad a \in \mathbb{R}^+ - \{1\}.$$

Λύση

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = \log_a(x)$. Τότε, η $f(x) = a^x$, $x \in \mathbb{R}$ είναι η αντίστροφη της g. Έτσι, για $x \in \mathbb{R}$, από το Θεώρημα Παραγώγισης Αντίστροφης Συνάρτησης έχουμε

$$f'(x) = (a^x)' = \frac{1}{g'(f(x))} = \frac{1}{(\log_a(a^x))'} = \frac{1}{\frac{1}{a^x \cdot \ln a}} = a^x \cdot \ln a$$

Άσκηση 2

Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με τύπο $y = f(x)$, η οποία αντιστρέφεται. Αν η γραφική παράσταση της f διέρχεται από το σημείο $A(-1, 3)$ και η κλίση της στο A ισούται με $-1/4$, να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f^{-1} για $x = 3$.

Λύση

$A(-1, 3) \in Gr(f) \Longrightarrow f(-1) = 3$ και αφού η f είναι αντιστρέψιμη, έπεται ότι $f^{-1}(3) = -1$. Η κλίση της εφαπτομένης του γραφήματος της f στο σημείο $A(-1, 3)$ είναι $-1/4$, δηλ. $f'(-1) = -1/4$. Η κλίση της εφαπτομένης του γραφήματος της f^{-1} για $x = 3$ δίνεται από το Θεώρημα Παραγώγισης Αντίστροφης Συνάρτησης:

$$(f^{-1})'(3) = \frac{1}{f'(f^{-1}(3))} = \frac{1}{f'(-1)} = -4.$$

Άσκηση 3

Να βρείτε την παράγωγο των πιο κάτω συναρτήσεων:

(α) $f(x) = \ln(x^2 - 5x), \quad x \in (-\infty, 0,) \cup (5, +\infty)$
(β) $f(x) = \ln(\eta\mu x), \quad x \in A = \{x | \eta\mu x > 0\}$
(γ) $f(x) = \ln(x^3 \sigma\upsilon\nu x), \quad x \in A = \{x | x^3 \sigma\upsilon\nu x > 0\}$
(δ) $f(x) = \ln\left(\frac{x^2+1}{x-1}\right), \quad x > 1$
(ε) $f(x) = \ln\left(e^x + e^{-x}\right), \quad x \in \mathbb{R}$
(στ) $f(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right), \quad x > 0$
(ζ) $f(x) = \log\left(\sqrt{4 - x^2}\right), \quad x \in [-2, 2]$
(η) $f(x) = \dfrac{\ln x + 1}{x^2}, \quad x > 0$
(θ) $f(x) = 2^{x^2+1}, \quad x \in \mathbb{R}$
(ι) $f(x) = x^{\eta\mu x}, \quad x \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$

Λύση

Τα πεδία ορισμού των προς παραγώγιση συναρτήσεων δίνονται έτσι ώστε οι εν λόγω συναρτήσεις να είναι καλά ορισμένες (να ορίζονται) καθώς και παραγωγίσιμες. Έτσι, δε χρειάζεται να ανησυχούμε κάθε φορά για το σύνολο $\{x \in \mathbb{R} \,|\, \exists\, f'\}$ (πλην του **(ζ)**) εύρεση του οποίου να απαιτεί επίλυση ανισώσεων και άλλων επίπονων διαδικασιών (που μπορεί να μην άπτονται και της παρούσης τάξης).

(α) $f(x) = \ln(x^2 - 5x), \quad x \in A = (-\infty, 0,) \cup (5, +\infty)$. Έχουμε για $x \in A$:

$$f'(x) = (\ln(x^2 - 5x))' = \frac{(x^2 - 5x)'}{x^2 - 5x} = \frac{2x - 5}{x^2 - 5x}.$$

(β) $f(x) = \ln(\eta\mu x), \quad x \in A = \{x | \eta\mu x > 0\}$. Έχουμε για $x \in A$:

$$f'(x) = (\ln(\eta\mu x))' = \frac{(\eta\mu x)'}{\eta\mu x} = \frac{\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu x} = \sigma\varphi x.$$

(γ) $f(x) = \ln(x^3 \sigma\upsilon\nu x), \quad x \in A = \{x | x^3 \sigma\upsilon\nu x > 0\}$. Έχουμε για $x \in A$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= (\ln(x^3\sigma\upsilon\nu x))' = \frac{(x^3\sigma\upsilon\nu x)'}{x^3\sigma\upsilon\nu x} = \frac{(x^3)' \cdot \sigma\upsilon\nu x + x^3 \cdot (\sigma\upsilon\nu x)'}{x^3\sigma\upsilon\nu x} \\ &= \frac{3x^2 \cdot \sigma\upsilon\nu x - x^3 \cdot \eta\mu x}{x^3\sigma\upsilon\nu x} = \frac{x^2(3\sigma\upsilon\nu x - x\eta\mu x)}{x^3\sigma\upsilon\nu x} \\ &= \frac{3\sigma\upsilon\nu x - x\eta\mu x}{x\sigma\upsilon\nu x} = \frac{3}{x} - \varepsilon\varphi x \end{aligned}$$

(δ) $f(x) = \ln\left(\frac{x^2+1}{x-1}\right), \quad x > 1$. Έχουμε για $x > 1$:

$$\begin{aligned} f(x) &= \ln\left(\frac{x^2+1}{x-1}\right) = \ln(x^2+1) - \ln(x-1) \\ \Longrightarrow f'(x) &= (\ln(x^2+1))' - (\ln(x-1))' = \frac{(x^2+1)'}{x^2+1} - \frac{(x-1)'}{x-1} \\ &= \frac{2x}{x^2+1} - \frac{1}{x-1} = \frac{x^2 - 2x - 1}{(x^2+1)\cdot(x-1)} \end{aligned}$$

(ε) $f(x) = \ln\left(e^x + e^{-x}\right), \quad x \in \mathbb{R}$. Έχουμε για $\mathbb{R}$:

$$f'(x) = \frac{(e^x + e^{-x})'}{e^x + e^{-x}} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \overset{\cdot e^x}{=} \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}$$

(στ) $f(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right), \quad x > 0$. Έχουμε για $x > 0$:

$$f'(x) = \frac{(x + \sqrt{x^2+1})'}{x + \sqrt{x^2+1}}$$

Αλλά

$$(x + \sqrt{x^2+1})' = 1 + \frac{(x^2+1)'}{2\sqrt{x^2+1}} = 1 + \frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}} = 1 + \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{x + \sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}}$$

και αρα

$$f'(x) = \frac{\frac{x+\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}}}{x + \sqrt{x^2+1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$$

(ζ) $f(x) = \log\left(\sqrt{4-x^2}\right)$, $\quad x \in [-2,2]$. Έχουμε για $x \in (-2,2)$:

$$f(x) = \log\left(\sqrt{4-x^2}\right) = \frac{1}{2}\cdot\log\left(4-x^2\right)$$

και αρα

$$f'(x) = \frac{1}{2\cdot\ln 10}\cdot\frac{(4-x^2)'}{4-x^2} = \frac{x}{\ln 10\cdot(x^2-4)}$$

(η) $f(x) = \dfrac{\ln x + 1}{x^2}$, $\quad x > 0$. Έχουμε για $x > 0$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(\ln x+1)'\cdot x^2 - (\ln x+1)\cdot(x^2)'}{x^4} = \frac{\frac{1}{x}\cdot x^2 - (\ln x+1)2x}{x^4} \\ &= \frac{x - 2x\ln x - 2x}{x^4} = -\frac{1+2\ln x}{x^3} \end{aligned}$$

(θ) $f(x) = 2^{x^2+1}$, $\quad x \in \mathbb{R}$. Έχουμε για $x \in \mathbb{R}$:

$$f'(x) = (x^2+1)'\cdot\ln 2\cdot 2^{x^2+1} = x\cdot 2^{x^2+2}\cdot\ln 2$$

(ι) $f(x) = x^{\eta\mu x}$, $\quad x \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$. Έχουμε για $x \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$:

$$\begin{aligned} y = x^{\eta\mu x} &\iff \ln y = \ln x^{\eta\mu x} \iff \ln y = \eta\mu x\cdot\ln x \\ &\iff \frac{y'}{y} = (\eta\mu x\ln x)' \iff \frac{y'}{y} = (\eta\mu x)'\cdot\ln x + \eta\mu x\cdot(\ln x)' \\ &\iff y' = y\cdot\left(\sigma\upsilon\nu x\cdot\ln x + \eta\mu x\cdot\frac{1}{x}\right) \\ &\iff y' = x^{\eta\mu x}\cdot\left(\sigma\upsilon\nu x\cdot\ln x + \eta\mu x\cdot\frac{1}{x}\right) \end{aligned}$$

Άσκηση 4

Δίνεται η καμπύλη με εξίσωση

$$\alpha x^2 + \beta x y^2 = \ln(x^2-3) + 1, \quad x \in (-\infty, -\sqrt{3}) \cup (\sqrt{3}, +\infty), \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

αν η εφαπτομένη ευθεία της καμπύλης στο σημείο της $A(2,1)$ είναι παράλληλη με την ευθεία $(\varepsilon): x + y = 5$, να υπολογίσετε τις τιμές των α και β.

Λύση

Το β δεν μπορεί να είναι =0 (σκεφτείτε γιατί). Αφού το σημείο $A(2,1)$ διέρχεται από το γράφημα της καμπύλης, έπεται ότι εξίσωση ότι $4\alpha + 2\beta = 1$. Αφού η εφαπτόμενη ευθεία είναι παράλληλη με την ευθεία με εξίσωση $x + y = 5$, αυτές θα έχουν την ίδια κλίση, δηλ. $y'(2) = \lambda_{\varepsilon\varphi} = -1$. Έχουμε για

$x \in (-\infty, -\sqrt{3}) \cup (\sqrt{3}, +\infty)$

$$\begin{aligned} \alpha x^2 + \beta x y^2 = \ln(x^2-3)+1 \quad &\overset{d/dx}{\Longleftrightarrow} \quad 2\alpha x + 2\beta y^2 + 2\beta x y y' = \frac{(x^2-3)'}{x^2-3} \\ &\Longleftrightarrow \quad \alpha x + \beta y^2 + \beta x y y' = \frac{x}{x^2-3} \\ &\overset{\beta \neq 0}{\Longleftrightarrow} \quad y' = \frac{1}{\beta x y}\left(\frac{x}{x^2-3} - \alpha x - \beta y^2\right) \end{aligned}$$

Άρα

$$y'(2) = 1 \Longleftrightarrow \frac{1}{2\beta \cdot 1}\left(\frac{2}{2^2-3} - 2\alpha - \beta \cdot 1^2\right) \Longleftrightarrow 4\alpha - 3\beta = 4$$

Λύνουμε το σύστημα $\begin{cases} 4\alpha - 3\beta = 4 \\ 4\alpha + 2\beta = 1 \end{cases}$ και βρίσκουμε

$$\boxed{\alpha = \frac{11}{20} \qquad \beta = -\frac{3}{5}}$$

Άσκηση 5

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = x^{\frac{1}{x}}$, $x \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$. Να βρείτε τα σημεία της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f, στα οποία οι εφαπτομένες της είναι παράλληλες στον άξονα $x'x$.

Λύση

Έχουμε:

$$\begin{aligned} f(x) \quad &= \quad x^{\frac{1}{x}} \\ \text{Λογαριθμούμε αμφότερα μέλη} \quad &\Longleftrightarrow \quad \ln(f(x)) = \ln(x^{\frac{1}{x}}) \\ &\Longleftrightarrow \quad \ln(f(x)) = \frac{1}{x} \cdot \ln x \\ \text{Παραγωγίζουμε αμφότερα μέλη} \quad &\Longleftrightarrow \quad [\ln(f(x))]' = \left(\frac{1}{x} \cdot \ln x\right)' \\ &\Longleftrightarrow \quad \frac{f'(x)}{f(x)} = -\frac{\ln x}{x^2} + \frac{1}{x^2} \end{aligned}$$

Λύνουμε ως προς $f'(x)$:

$$f'(x) = f(x) \cdot \left(-\frac{\ln x}{x^2} + \frac{1}{x^2}\right) = x^{\frac{1}{x}} \cdot \left(-\frac{\ln x}{x^2} + \frac{1}{x^2}\right)$$

Τα σημεία της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f, στα οποία οι εφαπτομένες της είναι παράλληλες στον άξονα $x'x$ είναι αυτά τα οποία ικανοποιούν την $f'(x) = 0$. Έχουμε

$$\begin{aligned} f'(x) = 0 \quad &\Longleftrightarrow \quad x^{\frac{1}{x}} \cdot \left(-\frac{\ln x}{x^2} + \frac{1}{x^2}\right) = 0 \\ &\Longleftrightarrow \quad -\frac{\ln x}{x^2} + \frac{1}{x^2} = 0 \Longleftrightarrow \ln x = 1 \Longleftrightarrow x = e \end{aligned}$$

και αρα έχουμε ενα μόνο σημείο, το $(e, f(1/e)) = \left(e, e^{\frac{1}{e}}\right)$.

Άσκηση 6

Παραμετρική καμπύλη (K) ορίζεται από τις εξισώσεις

$$\begin{cases} x = e^t - 1 \\ \\ y = \ln(1-t) \end{cases}, \quad t \in [0, 1).$$

Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της καμπύλης (K) στο σημείο της με $x = 0$.

Λύση

Έχουμε για $t \in [0, 1)$

$$\frac{dy}{dt} = e^t \qquad \text{και} \qquad \frac{dx}{dt} = \frac{1}{t-1}$$

και αρα

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{1}{e^t(t-1)} \Longrightarrow \frac{d^2y}{dt^2} = \frac{\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)}{\frac{dx}{dt}} = 6e^{-4t}$$

Είναι $x(t) = 0 \Longleftrightarrow e^t = 1 \Longleftrightarrow t = 0$. Άρα η κλίση της εφαπτομένης της καμπύλης αυτής στο σημείο της με $x = 0$ είναι

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=0} = \frac{1}{e^0(0-1)} = -1$$

Επίσης, $y(0) = \ln(1-0) = 0$. Έτσι, η εξίσωση της εφαπτομένης της καμπύλης στο σημείο της $(0, 0)$ είναι η $y = -x$.

Άσκηση 7

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο

$$f(x) = \frac{\ln^2 x}{x}, \quad x \in \mathbb{R}^+.$$

Να βρείτε τα σημεία της γραφικής παράστασης της f, στα οποία έχει οριζόντιες εφαπτομένες.

Λύση

Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο Π.Ο. της με

$$f'(x) = \frac{(2 - \ln x) \cdot \ln x}{x^2}$$

Έστω (a, b) σημείο του γραφήματος της f στο οποίο έχει οριζόντια εφαπτομένη. Τότε

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{(a,b)} = 0 \Longleftrightarrow \frac{(2 - \ln a) \cdot \ln a}{a^2} = 0 \Longleftrightarrow (\ln a = 2) \vee (\ln a = 0) \Longleftrightarrow (a = e^2) \vee (a = 1)$$

Είναι $f(1) = 0$ και $f(e^2) = \frac{4}{e^2}$ και αρα τα ζητούμενα σημεία είναι τα $\left(e^2, \frac{4}{e^2}\right)$ και $(1, 0)$.

Άσκηση 8

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο

$$f(x) = \ln(2x + e^{3g(x)}), \quad x \in (0, +\infty).$$

Αν η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$ και $g(0) = 0$, να δείξετε ότι:

$$f'(0) - 3g'(0) = 2.$$

Λύση

Αναδιατύπωση:

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο

$$f(x) = \ln(2x - e^{-3g(x)}), \quad x \in [-1, +\infty),$$

όπου η συνάρτηση $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη και τέτοια ώστε $e^{-3g(x)} > 2x$, $\forall x \in [-1, +\infty)$ και $g(0) = 0$. Να δείξετε ότι:

$$f'(0) - 3g'(0) = 2.$$

Είναι για $x > -1$

$$f'(x) = \frac{(2x - e^{-3g(x)})'}{2x + e^{-3g(x)}} = \frac{2 + 3g'(x)e^{-3g(x)}}{2x + e^{-3g(x)}}$$

και αρα

$$f'(0) = \frac{2 + 3 \cdot g'(0) \cdot e^{-3g(0)}}{2 \cdot 0 + e^{-3g(0)}} = 2 + 3g'(0)$$

δηλ.

$$f'(0) - 3g'(0) = 2.$$