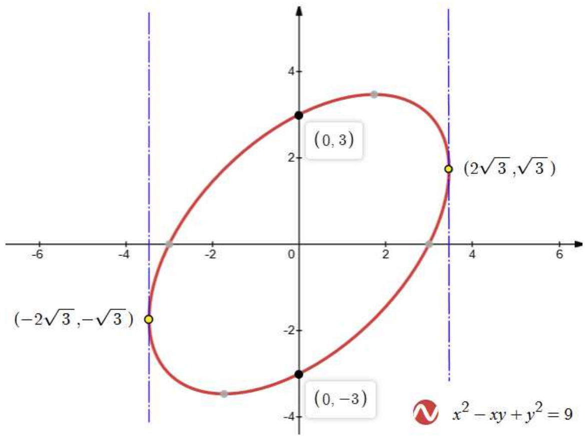


Σχήμα 2.7: Άσκηση 9/σελ.56

0.8 Δραστηριότητες σελ. 63-64 (Συνάρτηση που ορίζεται Παραμετρικά)

Άσκηση 1

Να κατασκευάσετε τη γραφική παράσταση των πιο κάτω παραμετρικών καμπύλων:

(α) $\begin{cases} x = t \\ y = \sqrt{t} \end{cases}$, $t \in [0, +\infty)$ **(β)** $\begin{cases} x = 3t \\ y = 2 - 2t \end{cases}$, $t \in [0, 1]$ **(γ)** $\begin{cases} x = 3t \\ y = 9t^2 \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$

(δ) $\begin{cases} x = \text{τεμ}^2 t - 1 \\ y = \text{εφ} t \end{cases}$, $t \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ **(ε)** $\begin{cases} x = 2t - 1 \\ y = t^2 + 7 \end{cases}$, $t \in [-3, 10]$

Λύση **(α)** $\begin{cases} x = t \\ y = \sqrt{t} \end{cases}$, $t \in [0, +\infty)$

Βήμα 1: Βρίσκουμε το Σύνολο τιμών της καμπύλης: Αφού $t \geq 0$, έπεται ότι $\sqrt{t} \geq 0$. Έτσι, το Σ.Τ. της είναι το $[0, +\infty)$.

Βήμα 2: Βρίσκουμε την καρτεσιανή εξίσωση της καμπύλης: Προφανώς είναι $y(t) = \sqrt{x(t)}$, $\forall t \in [0, +\infty)$. Η καρτεσιανή εξίσωση της καμπύλης είναι λοιπόν η $y = \sqrt{x}$, $x \in [0, +\infty)$.

Βήμα 3: Κατασκευάζουμε το γράφημα της καμπύλης Αρχικό Σημείο είναι το $(x(0), y(0)) = (0, 0)$.

(β) $\begin{cases} x = 3t \\ y = 2 - 2t \end{cases}$, $t \in [0, 1]$

Βήμα 1: Βρίσκουμε το Σύνολο τιμών της καμπύλης: Είναι (και ο $t \mapsto x(t)$ και ο $t \mapsto y(t)$ είναι 1-1 μετασχηματισμοί)

$$t \in [0,1] \Rightarrow \begin{cases} 0 \leq \overbrace{3t}^{x(t)} \leq 3 \\ \\ 0 \leq \underbrace{2-2t}_{y(t)} \leq 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \in [0,3] \\ \\ y \in [0,2] \end{cases}$$

Βήμα 2: Βρίσκουμε την καρτεσιανή εξίσωση της καμπύλης: Λύνουμε την $x = x(t) = 3t$ ως προς $t : t = x/3$ και αντικαθιστούμε στην $y = y(t) = 2 - 2t$ η οποία γίνεται

$$y = 2 - \frac{2x}{3}, \quad x \in [0,3].$$

Βήμα 3: Κατασκευάζουμε το γράφημα της καμπύλης: Η καμπύλη μας είναι το ευθύγραμμο τμήμα με αρχή το σημείο $(x(0), y(0)) = (0,2)$ και τέλος το σημείο $(x(1), y(1)) = (3,0)$.

(γ) $\begin{cases} x = 3t \\ y = 9t^2 \end{cases} \quad , \quad t \in \mathbb{R}$

Βήμα 1: Βρίσκουμε το Σύνολο τιμών της καμπύλης: Αφού $t \in \mathbb{R}$, έπεται ότι $(3t) \in \mathbb{R}$ και $(9t^2) \in [0, +\infty)$. Έτσι, το Π.Ο. της είναι το $\mathbb{R}$ και το Σ.Τ. της το $[0, +\infty)$.
Βήμα 2: Βρίσκουμε την καρτεσιανή εξίσωση της καμπύλης: Προφανώς είναι $y(t) = 9t^2 = (3t)^2 = x^2(t)$, και αρα η καρτεσιανή εξίσωση της καμπύλης είναι η $y = x^2$, $x \in \mathbb{R}$.
Βήμα 3: Κατασκευάζουμε το γράφημα της καμπύλης: Είναι η γνωστή σε μας παραβολή με κορυφή στην αρχή των αξόνων όπου και λαμβάνει ελάχιστο.

(δ) $\begin{cases} x = \text{τεμ}^2 t - 1 \\ y = \text{εφ} t \end{cases} \quad , t \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

Βήμα 1: Βρίσκουμε το Σύνολο τιμών της καμπύλης: Αφού $t \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, έπεται ότι $(\text{τεμ}^2 t - 1) \in [0, +\infty)$ και $\text{εφ} t \in \mathbb{R}$ (η συνάρτηση $f : (-\pi/2, \pi/2) \to \mathbb{R}$ με $f(x) = \text{εφ} t$ είναι 1-1) Έτσι, το Π.Ο. της είναι το $[0, +\infty)$ και το Σ.Τ. της το $\mathbb{R}$.

Βήμα 2: Βρίσκουμε την καρτεσιανή εξίσωση της καμπύλης: Είναι $\forall t \in (-\pi/2, \pi/2)$, $\text{τεμ}^2 t - 1 = \text{εφ}^2 t$ δηλ. $y^2(t) = x(t)$ και αρα η καρτεσιανή εξίσωση της καμπύλης είναι η

$$y^2 = x, \quad x \in [0, +\infty)$$

Βήμα 3: Κατασκευάζουμε το γράφημα της καμπύλης: Είναι η γνωστή μας παραβολή με κλάδους τον $y = \sqrt{x}$ και τον $y = -\sqrt{x}$.
Αρχικό Σημείο $(x(0), y(0)) = (0,0)$

(ε) $\begin{cases} x = 2t - 1 \\ y = t^2 + 7 \end{cases} \quad , t \in [-3, 10]$

Βήμα 1: Βρίσκουμε το Σύνολο τιμών της καμπύλης: Είναι (και ο $t \mapsto x(t)$ και ο $t \mapsto y(t)$ είναι 1-1 μετασχηματισμοί)

$$t \in [-3,10] \Rightarrow \begin{cases} -7 \leq \overbrace{2t-1}^{x(t)} \leq 19 \\ \\ 7 \leq \underbrace{t^2+7}_{y(t)} \leq 107 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \in [-7,19] \\ \\ y \in [7,107] \end{cases}$$

Σημείωση:

$$-3 \leq t \leq 10 \Longrightarrow \begin{cases} -3 \leq t \leq 0 \\ \\ 0 < t \leq 10 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 0 \leq t^2 \leq 9 \\ \\ 0 < t \leq 100 \end{cases} \Longrightarrow 0 \leq t^2 \leq 100$$

Βήμα 2: Βρίσκουμε την καρτεσιανή εξίσωση της καμπύλης:

$$\begin{cases} x(t) = 2t - 1 \\ \\ y(t) = t^2 + 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t = \frac{x(t)+1}{2} \\ \\ y(t) = t^2 + 7 \end{cases} \Rightarrow y(t) = \frac{(x(t)+1)^2}{4} + 7, \quad t \in [-3, 10]$$

Αρα η καρτεσιανή εξίσωση της καμπύλης είναι η

$$y = \frac{(x+1)^2}{4} + 7, \quad x \in [-7, 19]$$

Βήμα 3: Κατασκευάζουμε το γράφημα της καμπύλης: Η καμπύλη μας είναι τμήμα παραβολής με κορυφή στο σημείο $(-1, 7)$ (στο οποίο λαμβάνει ελάχιστο) και Αρχικό και Τελικό Σημείο το $(x(-3), y(-3)) = (-7, 16)$ και $(x(10), y(10)) = (19, 107)$ αντίστοιχα.

Άσκηση 2

Παραμετρική καμπύλη ορίζεται από τις εξισώσεις

$$\begin{cases} x(t) = t - \text{ημ}t \\ \\ y(t) = 2 + \text{συν}t \end{cases}, \quad t \in [0, 2\pi]$$

(α) Να υπολογίσετε την τιμή της $\dfrac{dy}{dx}$ για $t = \frac{\pi}{3}$.

(β) Να βρείτε την $\dfrac{d^2y}{dx^2}$.

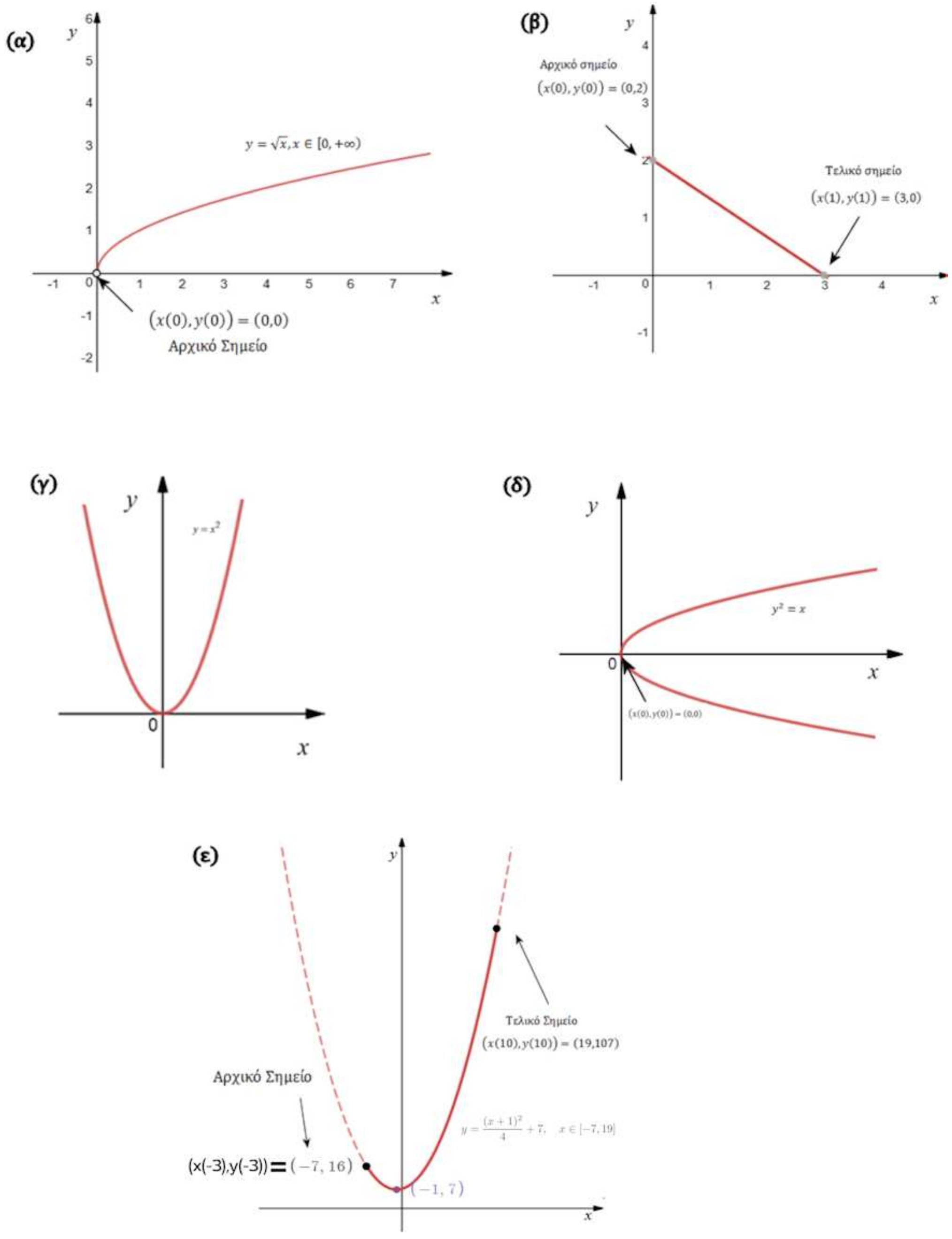
Λύση

(α) Είναι $\dfrac{dx}{dt} = 1 - \text{συν}t$ και $\dfrac{dy}{dt} = -\text{ημ}t$ και άρα για $t \in [0, 2\pi] - \{x \in [0, 2\pi] \,|\, \text{συν}t = 1\} = [0, 2\pi] - \{0,\ 2\pi\} = (0, 2\pi)$,

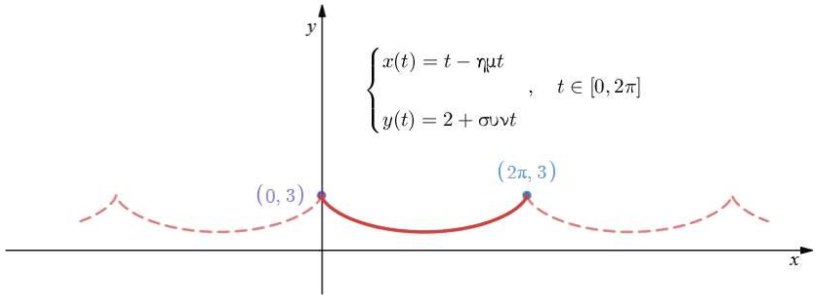
$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\text{ημ}t}{\text{συν}t - 1} \Longrightarrow \left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=\frac{\pi}{3}} = \frac{\text{ημ}\left(\frac{\pi}{3}\right)}{\text{συν}\left(\frac{\pi}{3}\right) - 1} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2} - 1} = -\sqrt{3}$$

(β) Είναι για $t \in (0, 2\pi)$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right) &= \frac{d}{dt}\left(\frac{\text{ημ}t}{\text{συν}t - 1}\right) = \frac{(\text{ημ}t)' \cdot (\text{συν}t - 1) - \text{ημ}t \cdot (\text{συν}t - 1)'}{(\text{συν}t - 1)^2} \\ &= \frac{\text{συν}t \cdot (\text{συν}t - 1) + \text{ημ}t \cdot \text{ημ}t}{(\text{συν}t - 1)^2} = \frac{\text{συν}^2 t - \text{συν}t + \text{ημ}^2 t}{(\text{συν}t - 1)^2} \\ &= \frac{1 - \text{συν}t}{(1 - \text{συν}t)^2} = \frac{1}{1 - \text{συν}t} \end{aligned}$$



Σχήμα 2.8: Άσκηση 1/σελ.63



Σχήμα 2.9: Άσκηση 2/σελ.63

και αρα

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\frac{1}{1-\sigma\upsilon\nu t}}{1 - \sigma\upsilon\nu t} = \frac{1}{(\sigma\upsilon\nu t - 1)^2}$$

Άσκηση 3

Παραμετρική καμπύλη (C) ορίζεται από τις εξισώσεις:

$$\begin{cases} x(t) = e^t \\ y(t) = e^{-2t} \end{cases} , \quad t \in \mathbb{R}$$

(α) Να εξετάσετε κατά πόσο το σημείο $A(1, 1)$ ανήκει στην καμπύλη.

(β) Να δείξετε ότι

$$y^{-2}\frac{d^2y}{dx^2} + 2x^3\frac{dy}{dx} - 2 = 0.$$

Λύση

(α) Έχουμε $x(t) = 1 \Leftrightarrow e^t = 1 \Leftrightarrow t = 0$ και $y(0) = e^0 = 1$. Συνεπώς, το σημείο $A(1, 1)$ ανήκει στην καμπύλη.

(β) Είναι

$$\frac{dx}{dt} = e^t \qquad \text{και} \qquad \frac{dy}{dt} = -2e^{-2t}$$

και άρα για $t \in \mathbb{R}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = -2e^{-3t}$$

$$\Longrightarrow \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)}{\frac{dx}{dt}} = \frac{6e^{-3t}}{e^t} = 6e^{-4t}$$

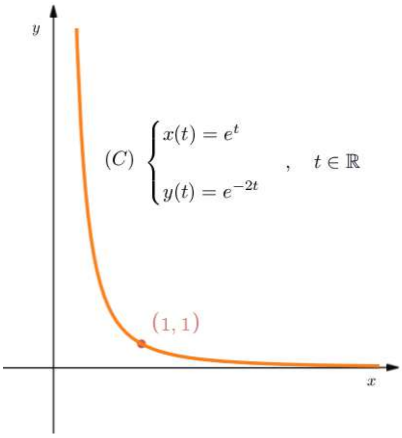
Συνεπώς, για $y \neq 0$,

$$y^{-2}\frac{d^2y}{dx^2} + 2x^3\frac{dy}{dx} - 2$$

$$= e^{4t} \cdot 6e^{-4t} + 2e^{3t} \cdot (-2e^{-3t}) - 2$$

$$= 6 - 4 - 2 = 0$$

Σημείωση: Για την καρτεσιανή μορφή της εξίσωσης της καμπύλης, αρκεί να παρατηρήσουμε ότι για κάθε $t \in \mathbb{R}$ είναι $x(t), y(t) > 0$ και $y(t) = \frac{1}{(e^t)^2} = \frac{1}{x^2(t)}$ (και αντίστροφα). Έτσι, η καρτεσιανή εξίσωση της καμπύλης (C) είναι η $y = 1/x$, $x > 0$.



Σχήμα 2.10: Άσκηση 3/σελ.63

Άσκηση 4

Παραμετρική καμπύλη ορίζεται από τις εξισώσεις:

$$\begin{cases} x(t) = \frac{2+t}{1+2t} \\ y(t) = \frac{3+2t}{t} \end{cases} \quad , \quad t \in \left(-\infty, -\frac{1}{2}\right)$$

(α) Να δείξετε ότι $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{(1+2t)^2}{t^2}$.

(β) Να υπολογίσετε την τιμή της $= \dfrac{d^2y}{dx^2}$ για $x = 0$.

Λύση

(α) Είναι για $t \in \left(-\infty, -\frac{1}{2}\right)$

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{3}{(1+2t)^2} \qquad \text{και} \qquad \frac{dy}{dt} = \frac{3}{t^2}$$

και άρα για $t \in \left(-\infty, -\frac{1}{2}\right)$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{-\frac{3}{t^2}}{\frac{3}{(1+2t)^2}} = -\frac{(1+2t)^2}{t^2}.$$

(β) Έχουμε για $t \in \left(-\infty, -\frac{1}{2}\right)$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right) &= -\frac{(t^2)' \cdot (1+2t)^2 - t^2 \cdot [(1+2t)^2]'}{t^4} = -\frac{(2t) \cdot (1+4t+4t^2) - t^2 \cdot 4(1+2t)}{t^4} \\ &= -2t\frac{1+4t+4t^2-2t \cdot (1+2t)}{t^4} = -2\frac{1+4t+4t^2-2t-4t^2}{t^3} \\ &= -\frac{2(1+2t)}{t^3} \end{aligned}$$

και άρα

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)}{\frac{dx}{dt}} = \frac{-\frac{2(1+2t)}{t^3}}{-\frac{3}{(1+2t)^2}} = \frac{2(1+2t)^3}{3t^3}$$

Τώρα,

$$x(t) = 0 \Leftrightarrow \frac{2+t}{1+2t} = 0 \Leftrightarrow t = -2$$

και αρα

$$\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{x=0} = \left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{t=-2} = \frac{9}{4}$$

Άσκηση 5

Παραμετρική καμπύλη (K) ορίζεται από τις εξισώσεις:

$$\begin{cases} x(t) = t^2 - 2 \\ \\ y(t) = \frac{t^3}{3} - t \end{cases} , \quad t \in (0, +\infty)$$

Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της καμπύλης (K) στο σημείο της με $t = 3$.

Λύση

Είναι για $t \in (0, +\infty)$

$$\frac{dx}{dt} = 2t \qquad \text{και} \qquad \frac{dy}{dt} = t^2 - 1$$

Άρα, η κλίση της εφαπτομένης της πιο πάνω καμπύλης στο σημείο της με $t = 3$ είναι $\lambda = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=3} = \frac{4}{3}$.
Είναι $x(3) = 7$ και $y(3) = 6$. Συνεπώς, η εξίσωση της εφαπτομένης της καμπύλης στο σημείο της $(x(3), y(3)) = (7, 6)$ είναι η

$$y - 6 = \frac{4}{3} \cdot (x - 7) \qquad \text{δηλ. η} \qquad 4x - 3y - 10 = 0$$

Άσκηση 6

Παραμετρική καμπύλη (K) ορίζεται από τις εξισώσεις:

$$\begin{cases} x(t) = 2\eta\mu(2t) \\ \\ y(t) = 2\eta\mu t \end{cases} , \quad t \in [0, \pi]$$

Να βρείτε τα σημεία της καμπύλης (K), στα οποία έχει οριζόντιες και κατακόρυφες εφαπτομένες.

Λύση

Είναι για $t \in [0, \pi]$,

$$\frac{dx}{dt} = 4\sigma\upsilon\nu(2t) \qquad \text{και} \qquad \frac{dy}{dt} = 2\sigma\upsilon\nu t$$

Η πιο πάνω καμπύλη έχει οριζόντια εφαπτομένη στα σημεία $t \in [0, \pi]$ στα οποία $dy/dt = 0$, δηλ. στα σημεία εκείνα του $[0, \pi]$ τέτοια ώστε συν$t = 0$, δηλ. στο $t = \pi/2$. Έτσι, το ζητούμενο σημείο έχει συντεταγμένες $(x(\pi/2), y(\pi/2)) = (0, 2)$. Η πιο πάνω καμπύλη έχει οριζόντια εφαπτομένη στα σημεία $t \in [0, \pi]$ στα οποία $dx/dt = 0$, δηλ. στα σημεία εκείνα του $[0, \pi]$ τέτοια ώστε συν$(2t)$, δηλ. στα $t = \pi/4$, $3\pi/4$. Έτσι, τα ζητούμενα σημεία έχουν συντεταγμένες

$$(x(\pi/4), y(\pi/4)) = (2, \sqrt{2}) \qquad \text{και} \qquad (x(3\pi/4), y(3\pi/4)) = (-2, \sqrt{2})$$

Άσκηση 7

Παραμετρική καμπύλη (K) ορίζεται από τις εξισώσεις:

$$\begin{cases} x(t) = 1 + \text{ημ}t \\ y(t) = \text{συν}^2 t \end{cases}, \quad t \in (0, \pi)$$

Να βρείτε την εξίσωση της κάθετης της καμπύλης (K) στο σημείο της με $x = \frac{5}{4}$.

Λύση

Είναι για $t \in (0, \pi)$,

$$\frac{dx}{dt} = \text{συν}t \qquad \text{και} \qquad \frac{dy}{dt} = -2\text{ημ}t \cdot \text{συν}t$$

άρα για $t \in \mathbb{R} - \{\pi/2\}$,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{-2\text{ημ}t \cdot \text{συν}t}{\text{συν}t} = -2\text{ημ}t = -2(x(t) - 1).$$

και αρα

$$\lambda_{\text{εφ.}}(5/4) = \frac{dy}{dx}\bigg|_{x=\pi/4} = -2\left(\frac{5}{4} - 1\right) = -\frac{1}{2}$$

(η κλίση της **εφαπτόμενης** της καμπύλης στο σημείο της με $x = 5/4$)
και

$$\lambda_{\text{κάθ.}}(5/4) = -\frac{1}{\lambda_{\text{εφ.}}(5/4)} = 2.$$

Για $x = \frac{5}{4}$ είναι

$$\text{ημ}t = \frac{5}{4} - 1 = \frac{1}{4} \qquad \text{και} \qquad y = \text{συν}^2 t = 1 - \text{ημ}^2 t = 1 - \frac{1}{16} = \frac{15}{16}$$

και έτσι η εξίσωση της κάθετης της καμπύλης στο σημείο της $\left(\frac{5}{4}, \frac{15}{16}\right)$ είναι η

$$y - \frac{15}{16} = 2\left(x - \frac{5}{4}\right) \qquad \text{δηλ. η} \qquad 16y - 32x + 25 = 0$$

Σημείωση: Εύκολα βρίσκουμε ότι η καρτεσιανή μορφή της εξίσωσης της καμπύλης είναι η

$$y = 1 - (x - 1)^2, \quad x \in (1, 2).$$