

0.7 Δραστηριότητες σελ. 56 (Πεπλεγμένη Συνάρτηση)

Άσκηση 1

Να βρείτε την παράγωγο $\frac{dy}{dx}$ των συναρτήσεων που ορίζονται από τις πιο κάτω εξισώσεις:

(α) $x^2 + 2yx - y^2 = 0$

(β) $yx^2 = 3x + y$

(γ) $y = x + xe^y$

(δ) $y^2 - 2y\sqrt{1+x^2} + x^2 = 0$

(ε) $\eta\mu x + \eta\mu y = 1$

Λύση

(α)

$$x^2 + 2yx - y^2 = 0$$

παραγωγίζω
πεπλεγμένα

$$\Leftrightarrow \frac{d(x^2 + 2yx - y^2)}{dx} = \frac{d(0)}{dx}$$

$$\Leftrightarrow \frac{d(x^2)}{dx} + \frac{d(2yx)}{dx} - \frac{d(y^2)}{dx} = 0$$

$$\Leftrightarrow 2x + 2x \frac{dy}{dx} + 2y - 2y \frac{dy}{dx} = 0$$

$$\Leftrightarrow (y - x) \frac{dy}{dx} = x + y$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{x + y}{y - x} \quad (y \neq x)}$$

(β)

$$yx^2 = 3x + y$$

παραγωγίζω
πεπλεγμένα

$$\Leftrightarrow \frac{d(yx^2)}{dx} = \frac{d(3x + y)}{dx}$$

$$\Leftrightarrow x^2 \frac{dy}{dx} + 2xy = 3 + \frac{dy}{dx}$$

$$\Leftrightarrow (x^2 - 1) \frac{dy}{dx} = 3 - 2xy$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{3 - 2xy}{x^2 - 1} \quad (x \neq \pm 1)}$$

(γ)

$$y = x + xe^y$$

παραγωγίζω
πεπλεγμένα

$$\Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{d(x + xe^y)}{dx}$$

$$\Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = 1 + e^y + xe^y \frac{dy}{dx}$$

$$\Leftrightarrow (1 - xe^y) \frac{dy}{dx} = 1 + e^y$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{1 + e^y}{1 - xe^y}}$$

(δ)

$$y^2 - 2y\sqrt{1+x^2} + x^2 = 0$$

παραγωγίζω
πεπλεγμένα

$$\Leftrightarrow 2y \frac{dy}{dx} - 2 \frac{dy}{dx} \sqrt{1+x^2} - 2y \frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}} + 2x = 0$$

$$\Leftrightarrow 2(y - \sqrt{1+x^2}) \frac{dy}{dx} =$$

$$= \frac{2xy}{\sqrt{1+x^2}} - 2x$$

$$\Leftrightarrow (y - \sqrt{1+x^2}) \frac{dy}{dx} = x \left(\frac{y - \sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x^2}} \right)$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \quad (y \neq \sqrt{1+x^2})}$$

(ε)

$$\eta\mu x + \eta\mu y = 1 \quad \Leftrightarrow \text{παραγωγίζω πεπλεγμένα} \quad \sigma\upsilon\upsilon x + \sigma\upsilon\upsilon y \cdot \frac{dy}{dx} = 0$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\frac{dy}{dx} = -\frac{\sigma\upsilon\upsilon x}{\sigma\upsilon\upsilon y} \quad (\sigma\upsilon\upsilon y \neq 0)}$$

Άσκηση 2

Αν $x^2y = \sin(ax)$, να δείξετε ότι:

$$x^2 \frac{d^2y}{dx^2} + 4x \frac{dy}{dx} + (a^2x^2 + 2)y = 0.$$

Λύση Έχουμε

$$\begin{aligned} x^2y = \sin(ax) &\stackrel{\text{παραγωγίζω πεπλεγμένα}}{\iff} \frac{d(x^2y)}{dx} = \frac{d(\sin(ax))}{dx} \iff 2xy + x^2 \frac{dy}{dx} = -(ax)' \cdot \eta\mu(ax) \\ &\iff 2xy + x^2 \cdot \frac{dy}{dx} = -a \cdot \eta\mu(ax) \\ &\stackrel{\text{παραγωγίζω πεπλεγμένα}}{\iff} 2y + 2x \frac{dy}{dx} + 2x \frac{dy}{dx} + x^2 \frac{d^2y}{dx^2} = -a^2 \sin(ax) \\ &\iff x^2 \frac{d^2y}{dx^2} + 4x \frac{dy}{dx} + 2y + a^2 \sin(ax) = 0 \\ \text{αφού } x^2y = \sin(ax) &\iff x^2 \frac{d^2y}{dx^2} + 4x \frac{dy}{dx} + 2y + a^2x^2y = 0 \\ &\iff \boxed{x^2 \frac{d^2y}{dx^2} + 4x \frac{dy}{dx} + (a^2x^2 + 2)y = 0} \end{aligned}$$

Άσκηση 3

Αν $e^y = e^x + e^{-x}$, να δείξετε ότι:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 1 = 0.$$

Λύση Έχουμε

$$\begin{aligned} e^y = e^x + e^{-x} &\stackrel{\text{παραγωγίζω πεπλεγμένα}}{\iff} e^y \frac{dy}{dx} = e^x - e^{-x} \stackrel{\text{παραγωγίζω πεπλεγμένα}}{\iff} e^y \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + e^y \frac{d^2y}{dx^2} = e^x + e^{-x} \\ e^y = e^x + e^{-x} &\iff e^y \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + e^y \frac{d^2y}{dx^2} = e^y \iff e^y \left[\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \frac{d^2y}{dx^2} - 1 \right] = 0 \\ e^y > 0, \forall y \in \mathbb{R} &\iff \frac{d^2y}{dx^2} + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 1 = 0 \end{aligned}$$

Διαφορετικά, παρατηρούμε ότι $e^y = e^x + e^{-x} \iff e^{x+y} = e^{2x} + 1$ και προχωράμε όπως πιο πάνω.

Άσκηση 4

Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης και της κάθετης ευθείας της καμπύλης με εξίσωση $xy = 2^x$ στο σημείο της με $x = 1$.

Λύση Έστω η καμπύλη $\{xy = 2^x\}$, δηλ. η καμπύλη της οποίας το γράφημα καθορίζεται από την εξίσωση $xy = 2^x$. Για $x = 1$, έχουμε $y = 2$. Παραγωγίζουμε πεπλεγμένα την πιο πάνω εξίσωση:

$$xy = 2^x \iff y + x \frac{dy}{dx} = 2^x \ln 2 \iff \frac{dy}{dx} = \frac{2^x \ln 2 - y}{x} \quad (x \neq 0)$$

και άρα

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{A(1,2)} = \frac{2^1 \ln 2 - 2}{1} = 2(\ln 2 - 1)$$

Συνεπώς, η εξίσωση της εφαπτομένης στο γράφημα της καμπύλης στο $A(1, 2)$ είναι η

$$y - 2 = 2(\ln 2 - 1) \cdot (x - 1) \iff y = 2(\ln 2 - 1)x + 4 - 2 \ln 2$$

Ομοίως, αφού $\lambda_{\text{κάθ.}} = -\frac{1}{\lambda_{\text{εφ.}}} = \frac{1}{2(1 - \ln 2)}$, βρίσκουμε ότι η εξίσωση της καθέτου στο γράφημα της καμπύλης στο $A(1, 2)$ είναι η

$$y - 2 = \frac{1}{2(1 - \ln 2)} \cdot (x - 1) \iff x + 2(\ln 2 - 1)y + 3 - 4 \ln 2 = 0$$

Άσκηση 5

Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης και της κάθετης ευθείας της καμπύλης με εξίσωση $y^2 = 4x$ στο σημείο της με $x = 4$ και τεταγμένη θετική.

Λύση Έστω η καμπύλη $C : \{y^2 = 4x\}$, δηλ. η καμπύλη της οποίας το γράφημα καθορίζεται από την εξίσωση $y^2 = 4x$. **Η πεπλεγμένη αυτή εξίσωση δεν καθορίζει συνάρτηση $x \mapsto y(x)$.** Παραγωγίζοντας πεπλεγμένα την εξίσωση της καμπύλης, έχουμε

$$2y \frac{dy}{dx} = 4 \iff y \frac{dy}{dx} = 2 \iff \frac{dy}{dx} = \frac{2}{y}, \quad (y \neq 0)$$

Το σημείο $x = 4$ ανήκει στον κλάδο της καμπύλης με εξίσωση $y = \sqrt{4x} = 2\sqrt{x}$ και άρα $y(4) = 4$. Επίσης,

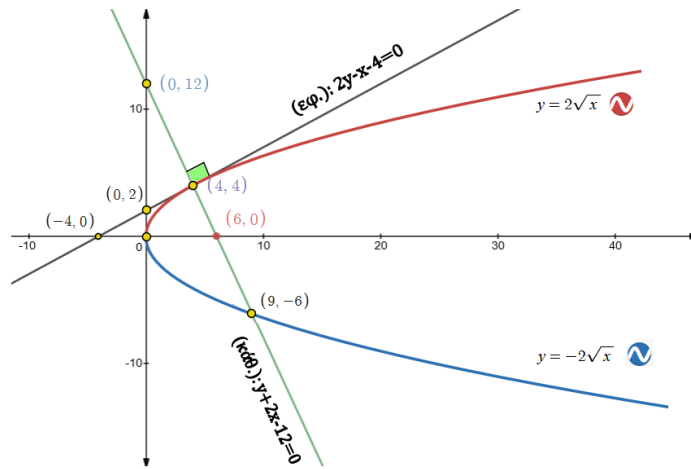
$$\lambda_{\text{εφ.}} = \left. \frac{dy}{dx} \right|_{A(4,4)} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

και $\lambda_{\text{κάθ.}} = -\frac{1}{\lambda_{\text{εφ.}}} = -2$. Έτσι, η εξίσωση της εφαπτομένης στο γράφημα της καμπύλης στο $A(4, 4)$ είναι η

$$y - 4 = \frac{1}{2} \cdot (x - 4) \iff 2y - x - 4 = 0$$

και η εξίσωση της καθέτου στο γράφημα της καμπύλης στο ίδιο σημείο είναι η

$$y - 4 = -2(x - 4) \iff y + 2x - 12 = 0$$



Σχήμα 2.5: Άσκηση 5/σελ.56

Άσκηση 6

Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης και της κάθετης ευθείας της καμπύλης με εξίσωση $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ στο σημείο της $A(3\sigma\upsilon\nu\theta, 2\eta\mu\theta)$.

Λύση Για κάθε $\theta \in [0, 2\pi]$ είναι

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1 \iff \frac{(3\sigma\upsilon\nu\theta)^2}{9} + \frac{(2\eta\mu\theta)^2}{4} = \eta\mu^2\theta + \sigma\upsilon\nu^2\theta = 1$$

και αρα το σημείο $A(3\sigma\upsilon\nu\theta, 2\eta\mu\theta)$ ανήκει πράγματι στην καμπύλη. Παραγωγίζοντας πεπλεγμένα την εξίσωση της καμπύλης, έχουμε

$$\frac{2}{9}x + \frac{2}{4}y \frac{dy}{dx} = 0 \iff \frac{dy}{dx} = -\frac{4}{9} \cdot \frac{x}{y}, \quad (y \neq 0).$$

και στο σημείο A είναι

$$\lambda_{\epsilon\phi.} = \left. \frac{dy}{dx} \right|_A = -\frac{4}{9} \cdot \frac{3\sigma\upsilon\nu\theta}{2\eta\mu\theta} = -\frac{2}{3} \cdot \frac{\sigma\upsilon\nu\theta}{\eta\mu\theta}$$

Η εξίσωση της εφαπτομένης στο γράφημα της καμπύλης στο A είναι η

$$\begin{aligned} y - 2\eta\mu\theta &= -\frac{2}{3} \frac{\sigma\upsilon\nu\theta}{\eta\mu\theta} (x - 3\sigma\upsilon\nu\theta) \iff 3\eta\mu\theta(y - 2\eta\mu\theta) = -2\sigma\upsilon\nu\theta(x - 3\sigma\upsilon\nu\theta) \\ &\iff (3\eta\mu\theta)y - 6\eta\mu^2\theta = -(2\sigma\upsilon\nu\theta)x + 6\sigma\upsilon\nu^2\theta \\ &\iff (3\eta\mu\theta)y + (2\sigma\upsilon\nu\theta)x = 6(\sigma\upsilon\nu^2\theta + \eta\mu^2\theta) \\ &\iff (3\eta\mu\theta)y + (2\sigma\upsilon\nu\theta)x = 6. \end{aligned}$$

Ομοίως, αφού

$$\lambda_{\kappa\acute{\alpha}\theta.} = -\frac{1}{\lambda_{\epsilon\phi.}} = \frac{3\eta\mu\theta}{2\sigma\upsilon\nu\theta},$$

βρίσκουμε ότι η εξίσωση της καθέτου στο γράφημα της καμπύλης στο A είναι η

$$(3\eta\mu\theta)x - (2\sigma\upsilon\nu\theta)y - 5\eta\mu\theta \cdot \sigma\upsilon\nu\theta = 0$$

Άσκηση 7

Να βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων της καμπύλης με εξίσωση $x^2 + y^2 - 2y = 1$, στα οποία η κλίση της γραφικής παράστασης της καμπύλης είναι ίση με -1 .

Λύση Έστω η καμπύλη $C : \{x^2 + y^2 - 2y = 1\}$, δηλ. η καμπύλη της οποίας το γράφημα καθορίζεται από την εξίσωση $x^2 + y^2 - 2y = 1$. Είναι

$$x^2 + y^2 - 2y = 1 \iff 2x + 2y \frac{dy}{dx} - 2 \frac{dy}{dx} = 0 \iff (1 - y) \frac{dy}{dx} = x \iff \frac{dy}{dx} = \frac{x}{1 - y}, \quad (y \neq 1)$$

Αν (a, b) με $b \neq 1$ είναι σημείο του γραφήματος της καμπύλης στο οποίο η κλίση της εφαπτομένης είναι ίση με -1 , τότε

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{(a,b)} = -1 \iff \frac{a}{1 - b} = -1 \iff b = a + 1$$

Αλλά το σημείο (a, b) ανήκει στην καμπύλη C και αρα $a^2 + b^2 - 2b = 1$. Έχουμε

$$\begin{cases} b = a + 1 \\ b \neq 1 \\ a^2 + b^2 - 2b = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} a^2 + (a + 1)^2 - 2(a + 1) = 1 \\ a^2 + a^2 + 2a + 1 - 2a - 2 = 1 \\ 2a^2 = 2 \iff a = \pm 1 \end{cases}$$

Για $a = 1$ έχουμε

$$1^2 + b^2 - 2b = 1 \iff b(b - 2) = 0 \iff b = 0, 2$$

και για $a = -1$ έχουμε

$$(-1)^2 + b^2 - 2b = 1 \iff b(b - 2) = 0 \iff b = 0, 2.$$

(ερώτηση: δώστε γεωμετρική ερμηνεία στο γιατί για τις δυο αυτές τιμές του a έχουμε τα ίδια b)
Έτσι, τα εν λόγω σημεία είναι τα $(1, 2)$ και $(-1, 0)$.

Άσκηση 8

Να δείξετε ότι η γραφική παράσταση της καμπύλης με εξίσωση $xy^5 + x^5y - 1 = 0$ δεν δέχεται οριζόντιες εφαπτομένες.

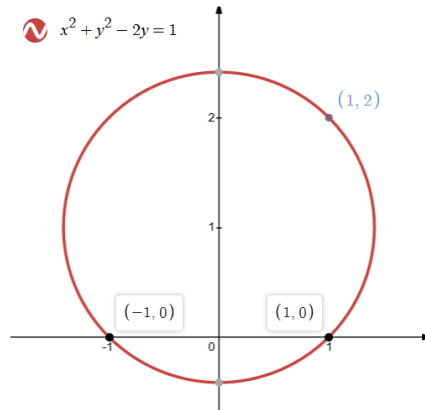
Λύση Το σύνολο των σημείων του γραφήματος της καμπύλης στα οποία το γράφημά της δεν έχει οριζόντιες εφαπτομένες είναι το σύνολο

$$G = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R} \mid xy^5 + x^5y - 1 = 0, \frac{dy}{dx} \neq 0 \right\}$$

Παρατηρούμε ότι το σημείο $(0, 0)$ δεν ανήκει στην καμπύλη αφού αν ανήκε, τότε αντικαθιστώντας στην εξίσωσή της, θα είχαμε $-1 = 0$, άτοπο.

Παραγωγίζουμε πεπλεγμένα την εξίσωση $xy^5 + x^5y - 1 = 0$:

$$xy^5 + x^5y - 1 = 0 \iff y^5 + 5xy^4 \frac{dy}{dx} + 5x^4y + x^5 \frac{dy}{dx} = 0 \iff (5xy^4 + x^5) \frac{dy}{dx} = -(5x^4y + y^5)$$



Σχήμα 2.6: Άσκηση 7/σελ.56

Αλλά, αφού το σημείο $(0, 0)$ δεν ανήκει στην καμπύλη, έπεται ότι $5x^4y + x^5 \neq 0$ και αρα

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{5x^4y + y^5}{5xy^4 + x^5}$$

και αφού $x \cdot y \neq 0$ για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$, έπεται ότι ο αριθμητής $5x^4y + y^5$ της πιο πάνω δε μηδενίζεται για κανένα ζεύγος (x, y) , δηλ. $\frac{dy}{dx} \neq 0$ για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$.

Άσκηση 9

Να βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων της καμπύλης με εξίσωση $x^2 - xy + y^2 = 9$, στα οποία η στα οποία η εφαπτομένη είναι κατακόρυφη.

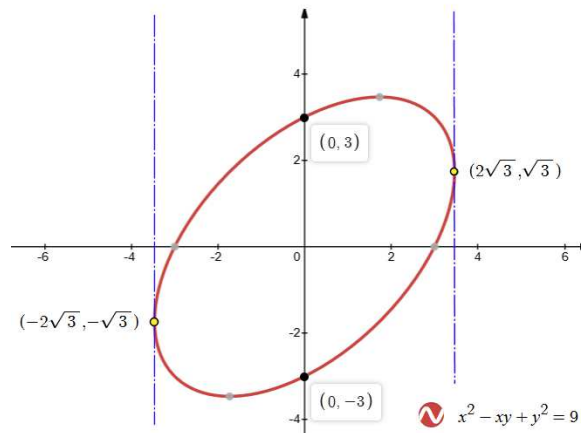
Λύση Το σύνολο των σημείων του γραφήματος μιας καμπύλης στα οποία το γράφημά της έχει κατακόρυφη εφαπτομένη είναι το σύνολο

$$G = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R} \mid x^2 - xy + y^2 = 9, \nexists \frac{dy}{dx} \right\}$$

Παραγωγίζουμε πεπλεγμένα την εξίσωση $x^2 - xy + y^2 = 9$:

$$x^2 - xy + y^2 = 9 \iff 2x - y - x\frac{dy}{dx} + 2y\frac{dy}{dx} = 0 \iff (2y - x)\frac{dy}{dx} = y - 2x$$

Αν $2y - x$, δηλ. $2y = x$, τότε αντικαθιστώντας στην εξίσωση της καμπύλης, έχουμε $3y^2 = 9$, δηλ. $y = \pm\sqrt{3}$ και $x = \pm 2\sqrt{3}$. Στα σημεία $(2\sqrt{3}, \sqrt{3})$ και $(-2\sqrt{3}, -\sqrt{3})$ το γράφημά της καμπύλης έχει κατακόρυφη εφαπτόμενη.



Σχήμα 2.7: Άσκηση 9/σελ.56

0.8 Δραστηριότητες σελ. 63-64 (Συνάρτηση που ορίζεται Παραμετρικά)

Άσκηση 1

Να κατασκευάσετε τη γραφική παράσταση των πιο κάτω παραμετρικών καμπύλων:

(α) $\begin{cases} x = t \\ y = \sqrt{t} \end{cases}, t \in [0, +\infty)$ (β) $\begin{cases} x = 3t \\ y = 2 - 2t \end{cases}, t \in [0, 1]$ (γ) $\begin{cases} x = 3t \\ y = 9t^2 \end{cases}, t \in \mathbb{R}$

(δ) $\begin{cases} x = \tan^2 t - 1 \\ y = \tan t \end{cases}, t \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ (ε) $\begin{cases} x = 2t - 1 \\ y = t^2 + 7 \end{cases}, t \in [-3, 10]$

Λύση (α) $\begin{cases} x = t \\ y = \sqrt{t} \end{cases}, t \in [0, +\infty)$

Βήμα 1: Βρίσκουμε το Σύνολο τιμών της καμπύλης: Αφού $t \geq 0$, έπεται ότι $\sqrt{t} \geq 0$. Έτσι, το Σ.Τ. της είναι το $[0, +\infty)$.

Βήμα 2: Βρίσκουμε την καρτεσιανή εξίσωση της καμπύλης: Προφανώς είναι $y(t) = \sqrt{x(t)}, \forall t \in [0, +\infty)$. Η καρτεσιανή εξίσωση της καμπύλης είναι λοιπόν η $y = \sqrt{x}, x \in [0, +\infty)$.

Βήμα 3: Κατασκευάζουμε το γράφημα της καμπύλης Αρχικό Σημείο είναι το $(x(0), y(0)) = (0, 0)$.

(β) $\begin{cases} x = 3t \\ y = 2 - 2t \end{cases}, t \in [0, 1]$

Βήμα 1: Βρίσκουμε το Σύνολο τιμών της καμπύλης: Είναι (και ο $t \mapsto x(t)$ και ο $t \mapsto y(t)$ είναι 1-1 μετασχηματισμοί)