0.6 Δραστηριότητες σελ. 47 (Γεωμετρική Ερμηνεία της Παραγώγου)

Άσκηση 1

Να βρείτε την κλίση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f με τύπο $f(x) = x^2 + 4$ στο σημείο της $A(2, 8)$.

Λύση Η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = x^2 + 4$ είναι παντού παραγωγίσιμη ως πολυωνυμική με

$$f'(x) = 2x, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Η κλίση της εφαπτομένης στο γράφημα της συνάρτησης στο σημείο της $A(2, 8)$ είναι ο αριθμός $\lambda = f'(2) = 4$.

Άσκηση 2

Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f (αν αυτή ορίζεται) στο σημείο $A(x_0, f(x_0))$ για καθεμιά από τις πιο κάτω συναρτήσεις:

(α) $f(x) = \dfrac{1}{x^3}$, στο $A(1, f(1))$

(β) $f(x) = \begin{cases} x^2 + 3x + 3, & x < 0 \\ 3x + 3 & x \geq 0 \end{cases}$, στο $A(0, f(0))$

(γ) $f(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{x-1}, & x \geq 1 \\ -\sqrt[3]{1-x}, & x < 1 \end{cases}$, στο $A(1, 0)$

Λύση

(α) Η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = 1/x^3$, $x \in \mathbb{R}_*$ είναι παραγωγίσιμη στο Π.Ο. της με

$$f'(x) = -\frac{3}{x^4}, \quad \forall x \in \mathbb{R}_*$$

Είναι $f'(1) = -3$ και έτσι, η εξίσωση της εφαπτομένης στο γράφημα της συνάρτησης στο σημείο της $A(1, f(1)) = A(1, 1)$ δίνεται από την (εφ.) $: y - f(1) = f'(1) \cdot (x - 1)$, δηλ.την (εφ.) $: y - 1 = -3(x - 1)$, δηλ. την (εφ.) $: y = -3x + 4$.

(β) Η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = \begin{cases} x^2 + 3x + 3, & x < 0 \\ 3x + 3 & x \geq 0 \end{cases}$ είναι παραγωγίσιμη στην ένωση των διαστημάτων $(-\infty+, 0)$ και $(0, +\infty)$ ως πολυωνυμική σε κάθε ένα από αυτά. Ελέγχουμε την παραγωγισιμότητα της συνάρτησης στο σημείο $x = 0$:
Έχουμε $f(0) = 3 \cdot 0 + 3 = 3$ και η f είναι συνεχής στο σημείο $x = 0$:

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} (x + 3) = 3 = \lim_{x \to 0^+} (x^2 + 3x) = \lim_{x \to 0^+} f(x).$$

Τώρα, αφού

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0^-} \frac{x^2 + 3x}{x} \lim_{x \to 0^-} \frac{x \cdot (x + 3)}{x} = \lim_{x \to 0^-} (x + 3) = 3$$

και

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{3x+3-3}{x}\lim_{x\to 0^+}\frac{3x}{x}=3$$

έπεται ότι υπάρχει το $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}$ και ισούται με 3, δηλ. $f'(0)=3$.[5] Η εξίσωση της εφαπτομένης στο γράφημα της συνάρτησης στο σημείο της $A(0,f(0))=A(0,3)$ δίνεται από την (εφ.) : $y-f(0)=f'(0)\cdot(x-0)$, δηλ.την (εφ.) : $y-3=3x$,δηλ.την (εφ.) : $y=3(x+1)$.

(γ) Η συνάρτηση f με τύπο $f(x)=\begin{cases}\sqrt[3]{x-1}, & x\geq 1\\ -\sqrt[3]{1-x}, & x<1\end{cases}$ είναι παραγωγίσιμη στην ένωση των διαστημάτων $(-\infty,1)$ και $(1,+\infty)$ ως σύνθεση τέτοιων. Έχουμε $f(1)=\sqrt[3]{1-1}=0$ και η f είναι συνεχής στο σημείο $x=1$:

$$\lim_{x\to 1^-}f(x)=-\lim_{x\to 1^-}\sqrt[3]{1-x}=0=\lim_{x\to 1^+}\sqrt[3]{x-1}=\lim_{x\to 1^+}f(x)$$

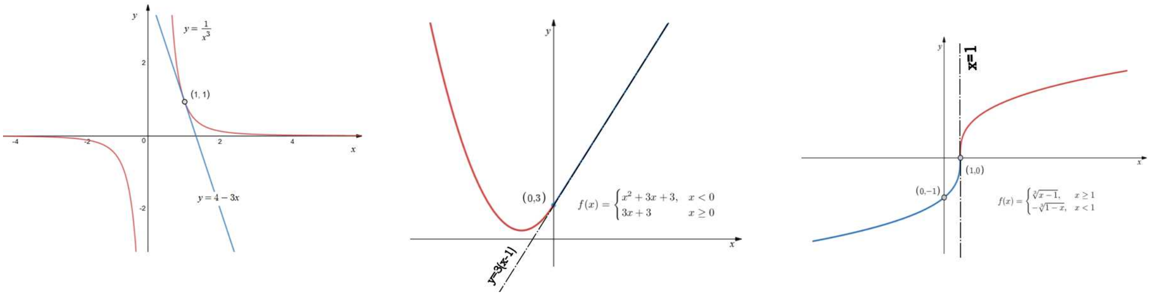
Τώρα,

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^-}\frac{-\sqrt[3]{1-x}}{x-1}=\lim_{x\to 1^-}\frac{\sqrt[3]{1-x}}{1-x}=\lim_{x\to 1^-}\frac{1}{(1-x)^{2/3}}=+\infty$$

αφού $x<1\implies(1-x)^{2/3}>0$ και

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{\sqrt[3]{x-1}}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{1}{(x-1)^{2/3}}=+\infty,$$

αφού $x>1\implies(x-1)^{2/3}>0$, έπεται ότι το γράφημα της συνάρτησης στο σημείο με $x=1$ παρουσιάζει κατακόρυφη εφαπτομένη, την ευθεία με εξίσωση $x=1$.



Σχήμα 2.2: Άσκηση 2/σελ.47

[5] Σημείωση: Αφού η f είναι παραγωγίσιμη στο σημείο $x=0$, έπεται ότι είναι και συνεχής στο σημείο αυτό.

Άσκηση 3

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο

$$f(x)=\begin{cases} x^2, & x\le 1 \\ \frac{1}{x} & x>1 \end{cases}.$$

Να δείξετε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης f δε δέχεται εφαπτομένη στο σημείο της $A(1,1)$.

Λύση

Ελέγχουμε την παραγωγισιμότητα της συνάρτησης στο σημείο $x=1$: Έχουμε $f(1)=1^2=1$ και η f είναι συνεχής στο σημείο $x=1$:

$$\lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^-}\frac{1}{x}=1=\lim_{x\to 1^+} x^2=\lim_{x\to 1^+} f(x)$$

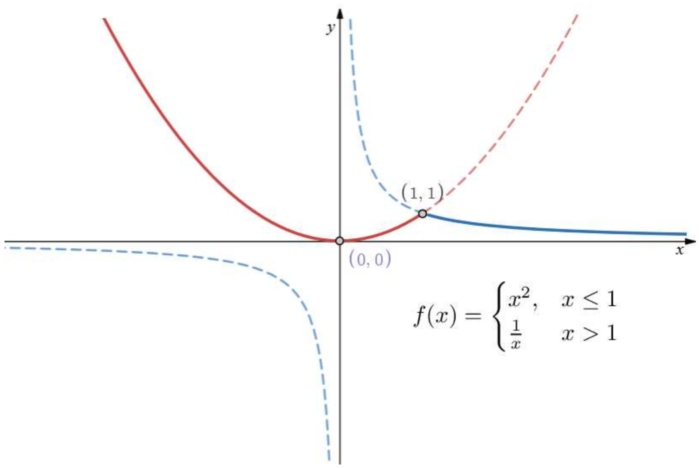
και αρα $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=1=f(1)$. Τώρα, αφού

$$f'_-(1)=\lim_{x\to 1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^-}\frac{x^2-1}{x-1}=\lim_{x\to 1^-}\frac{(x-1)\cdot(x+1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^-}(x+1)=2$$

και

$$f'_+(1)=\lim_{x\to 1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{\frac{1}{x}-1}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{1-x}{x(x-1)}=-\lim_{x\to 1^+}\frac{1}{x}=-1,$$

δηλ. $f'_-(1)\neq f'_+(1)$. Έπεται ότι ο παράγωγος αριθμός της συνάρτησης στο σημείο με $x=1$ δεν υπάρχει. Συνεπώς, το γράφημα της συνάρτησης στο σημείο με $x=1$ δεν επιδέχεται εφαπτομένη.



Σχήμα 2.3: Άσκηση 3/σελ.47

Άσκηση 4

Να χαρακτηρίσετε ΣΩΣΤΟ ή ΛΑΘΟΣ κάθε μια από τις παρακάτω προτάσεις:
(α) Η παράσταση

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}, \quad h \neq 0$$

εκφράζει την κλίση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο $A(x_0, f(x_0))$.

ΣΩΣΤΟ / **ΛΑΘΟΣ**

(β) Έστω:

$$\lim_{x\to 2} \frac{f(x)}{x-2} = f'(2) = 0.$$

Η γραφική παράσταση της f δέχεται εφαπτομένη στο $x_0 = 2$, η οποία είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$.

ΣΩΣΤΟ / **ΛΑΘΟΣ**

(γ) Αν για κάθε συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ισχύει

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x} = 2,$$

τότε $f'(2) = 0$.

ΣΩΣΤΟ / **ΛΑΘΟΣ**

Λύση

(α)ΛΑΘΟΣ. Το αριθμητικό πηλίκο

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}, \quad h \neq 0$$

εκφράζει την κλίση της χορδής που ενώνει τα σημεία $(x_0, f(x_0))$ και $(x_0+h, f(x_0+h))$. Δεν μπορούμε να πούμε τίποτα περισσότερο.

(β) ΣΩΣΤΟ. Η κλίση της εφαπτομένης του γραφήματος της f στο σημείο με $x = 2$ είναι μηδέν.

(γ) ΛΑΘΟΣ. Για παράδειγμα, για τη συνάρτηση f με τύπο $f(x) = 2x+2$, $x \in \mathbb{R}$, είναι

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{2x+2-2}{x} = 2\lim_{x\to 0} \frac{x}{x} = 2,$$

δηλ. $f'(0) = 2$, αλλά $f'(2) = 2 \neq 0$.
Σημείωση: Δεν έχει νόημα να πούμε 'για κάθε συνάρτηση' αλλά 'αν για κάποια συνάρτηση'.

Άσκηση 5

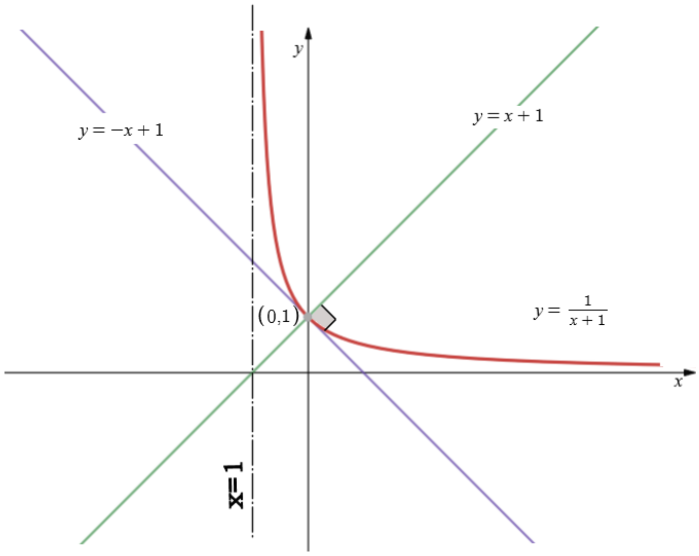
Η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f με τύπο $f(x) = \frac{1}{x+1}$, $x > -1$ στο σημείο της A σχηματίζει με τον άξονα των τετμημένων γωνία $\frac{3\pi}{4}$. Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου A και την εξίσωση της κάθετης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο αυτό.

Λύση

Από υπόθεση έχουμε ότι $\lambda_{\varepsilon\varphi.}(A) = \varepsilon\varphi(3\pi/4) = -\varepsilon\varphi(\pi/4) = -1$. Επίσης, για $x > -1$ η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη με $f'(x) = -\dfrac{1}{(x+1)^2}$. Άρα,

$$f'(x) = -1, \quad x > -1 \iff -\frac{1}{(x+1)^2} = -1, \quad x > -1 \iff (x+1)^2 = 1, \quad x > -1$$
$$\iff x = -2, 0,\ x > -1 \iff x = 0.$$

Έτσι, $A(0, f(0)) = A(0,1)$. Η κλίση $\lambda_{\kappa\acute{\alpha}\vartheta.}(A)$ της κάθετης του γραφήματος της f στο σημείο $A(0,1)$ είναι $\lambda_{\kappa\acute{\alpha}\vartheta.}(A) = -\frac{1}{\lambda_{\varepsilon\varphi.}(A)} = 1$ και αρα η εξίσωσή της είναι η (κάθ.) : $y - f(0) = -(x - 0)$, δηλ. η (κάθ.) : $y = x + 1$.



Σχήμα 2.4: Άσκηση 5/σελ.47

Άσκηση 6

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο

$$\begin{cases} \alpha x^2 + 2\alpha x + \beta + \alpha, & x \geq 2 \\ \frac{\gamma}{x+1}, & x < 2. \end{cases}$$

Να υπολογίσετε τις τιμές των $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$, ώστε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο $A(2, f(2))$ να είναι παράλληλη προς την ευθεία με εξίσωση $2x + y - 1 = 0$.

Λύση

Για να ορίζεται η εφαπτομένη στο γράφημα της συνάρτησης f στο σημείο της με $x = 2$, θα πρέπει να είναι παραγωγίσιμη (άρα και συνεχής) στο σημείο αυτό. Δεδομένου αυτού, για να είναι η εφαπτομένη στο σημείο της με $x = 2$ παράλληλη με την ευθεία (ε) με εξίσωση $2x+y-1 = 0$, θα πρέπει $\lambda_{(\varepsilon)} = f'(2)$,

δηλ. $f'(2) = -2$.
Η f είναι συνεχής στο σημείο $x = 2 \iff \lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^-} f(x) = f(2)$
Είναι $f(2) = \alpha \cdot 2^2 + 2\alpha \cdot 2 + \beta + \alpha = 9\alpha + \beta$ και $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \gamma/3$. Άρα

$$9\alpha + \beta = \frac{\gamma}{3} \tag{2.4}$$

Η f είναι παραγωγίσιμη στο σημείο $x = 2$

$$\iff \lim_{x\to 2^+} \frac{f(x) - f(2)}{x-2} = \lim_{x\to 2^-} \frac{f(x) - f(2)}{x-2} = \underbrace{\lim_{x\to 2} \frac{f(x) - f(2)}{x-2}}_{=f'(2)}$$

Έχουμε:

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 2^-} \frac{f(x) - f(2)}{x-2} = f'(2) &\iff \lim_{x\to 2^-} \frac{\frac{\gamma}{x+1} - \frac{\gamma}{3}}{x-2} = -2 \iff -\frac{\gamma}{3} \lim_{x\to 2^-} \frac{x-2}{(x-2)\cdot(x+1)} = -2 \\ &\iff -\frac{\gamma}{3} \lim_{x\to 2^-} \frac{1}{x+1} = -2 \\ &\iff -\frac{\gamma}{3} \cdot \frac{1}{3} = -2 \iff \boxed{\gamma = 18} \end{aligned}$$

Έτσι, από τη (2.4) παίρνουμε

$$9\alpha + \beta = \frac{18}{3} = 6 \tag{2.5}$$

Τώρα,

$$\lim_{x\to 2^+} \frac{f(x) - \overbrace{f(2)}^{=6}}{x-2} = f'(2) \iff \lim_{x\to 2^+} \frac{\alpha x^2 + 2\alpha x + \beta + \alpha - 6}{x-2} = -2$$

και χρησιμοποιώντας τη (2.5)

$$\begin{aligned} &\iff \lim_{x\to 2^+} \frac{\alpha x^2 + 2\alpha x - 8\alpha}{x-2} = -2 \\ &\iff \alpha \lim_{x\to 2^+} \frac{x^2 + 2x - 8}{x-2} = -2 \\ &\iff \alpha \lim_{x\to 2^+} \frac{(x-2)\cdot(x+4)}{x-2} = -2 \\ &\iff \alpha \lim_{x\to 2^+} (x+4) = -2 \iff 6\alpha = -2 \iff \boxed{\alpha = -\tfrac{1}{3}} \end{aligned}$$

Τέλος, αντικαθιστώντας στην (2.4), παίρνουμε $\boxed{\beta = 9}$.